Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Combinatória – Nível 3

Prof. Carlos Shine

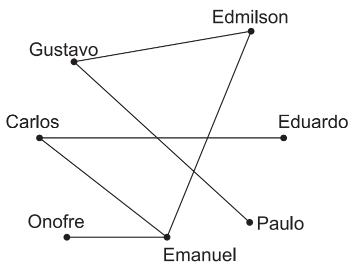
Aula 9

Introdução à Teoria dos Grafos

Define-se *grafo* como o par de conjuntos (V, A) onde $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é um conjunto de *vértices* e $A \subset \{\{v_i, v_j\}$ t.q. $v_i, v_j \in V\}$ é um conjunto de *arestas* (na verdade, uma aresta é um par de vértices).

A representação mais comum de grafos é associar os vértices a pontos e as arestas a linhas que ligam os pares de vértices que as formam.

Por exemplo, podemos construir um grafo que represente pessoas apertando mãos. Os vértices seriam as pessoas. Ligamos dois vértices (formando assim uma aresta) se duas pessoas se cumprimentaram.



Grau de vértice

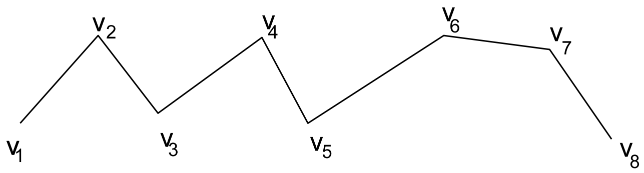
Definimos *grau de um vértice* v_i como o número de arestas ligadas a v_i. Denotamos o grau do vértice v_i como $g(v_i)$. No último exemplo, o grau de um vértice seria o número de apertos de mão que a pessoa correspondente deu.

Alguns grafos especiais

Alguns grafos merecem atenção especial porque nos ajudam a estruturar um pouco mais os outros grafos.

Caminho

Um *caminho* é um grafo cujos vértices são $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e cujas arestas são $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\ldots$, $\{v_{n-1}, v_n\}$.

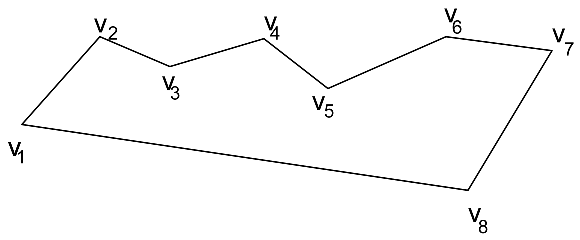


Observe que o grau de todos os vértices é 2, com exceção das "pontas" do caminho.

Diremos também que, num grafo, um *caminho* ligando dois vértices v e w é uma sequência de arestas que ligam v a w.

Ciclo

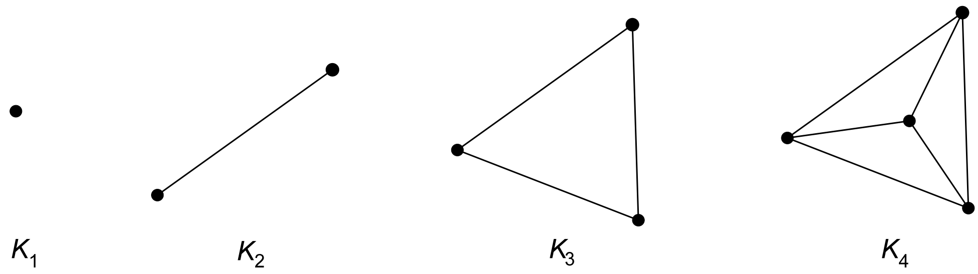
Um *ciclo* é um grafo cujos vértices são $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e cujas arestas são $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\ldots$, $\{v_{n-1}, v_n\}$, $\{v_n, v_1\}$.



Note que o grau de todos os vértices é 2.

Grafo completo ou clique

Um *grafo n-completo* ou *n-clique* é um grafo em que todos os pares de vértices estão ligados.



Floresta

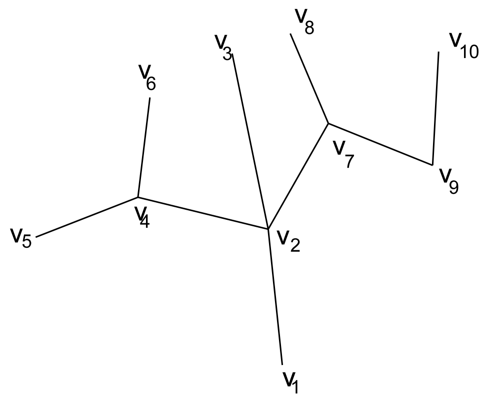
Uma *floresta* é um grafo que não contém ciclos.

Grafo conexo

Um grafo é dito *conexo* (ou *conectado*) quando, para quaisquer dois de seus vértices, existe um caminho que os liga. Todo grafo pode ser particionado em um ou mais *componentes conexos*, ou seja, subgrafos conexos.

Um tipo de grafo muito especial: árvores

Uma *árvore* é um grafo que não contém ciclos e é conexo. Assim, uma floresta é uma união de árvores.



Propriedades imediatas de árvores

- Uma árvore é *minimalmente conexa*, isto é, a retirada de qualquer uma de suas arestas desconecta o grafo. Provaremos a sua contrapositiva: se a retirada de alguma de suas arestas $\{v, w\}$ não desconecta o grafo, então existe um caminho de v a w; ao colocarmos a aresta de volta, obtemos um ciclo e, portanto, o grafo obtido não é uma árvore.
- Uma árvore é *maximal sem ciclos*, isto é, se ligarmos mais uma aresta surge um ciclo. A demonstração é análoga à que foi feita acima.

Técnicas de resolução de problemas envolvendo grafos

Grande parte dos problemas de grafos são resolvidos com a ajuda de três técnicas já conhecidas: *contagem dupla*, *indução* e *casa dos pombos*. Essas três técnicas são as mais importantes na Combinatória.

Contagem dupla

Uma das técnicas mais importantes na Combinatória como um todo é a *contagem dupla*, que consiste em contar ou estimar algo de duas ou mais maneiras para obter igualdades ou desigualdades. Cada maneira de contar nos dá o mesmo número, assim as expressões obtidas nessas duas ou mais contagens são iguais.

O próximo teorema é bastante importante e é o nosso primeiro exemplo de aplicação de contagem dupla.

Teorema 1 (Teorema zero de grafos). *Em um grafo, a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número de arestas. Em símbolos: no grafo (V, A),*

$$\sum_{v_i \in V} g(v_i) = 2|A|$$

($|X|$ denota o número de elementos do conjunto X.)

Demonstração: De cada vértice v saem $g(v)$ arestas. Assim, se somarmos os graus de todos os vértices, obtemos o número de arestas multiplicada por dois, pois contamos cada aresta duas vezes (lembre-se de que cada aresta está associada a dois vértices). $\square$

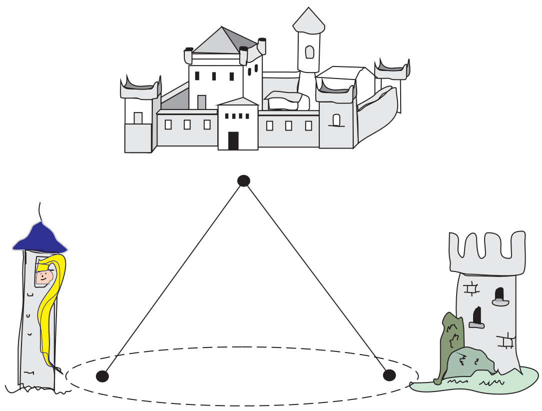
Note que no exemplo acima, contamos de duas maneiras o número de arestas: uma maneira do ponto de vista dos vértices e outro do ponto de vista das arestas. Esse procedimento pode se tornar sistemático.

Normalmente, nos problemas de grafos que são resolvidos com contagem dupla, contamos algo envolvendo pares de vértices, para que apareçam graus e arestas mais naturalmente. Aliando isso ao teorema importante acima e eventualmente, a alguma desigualdade, chega-se aos resultados.

Exemplo 1. *Na Terra de Oz há n castelos e várias estradas, sendo que cada uma liga dois castelos. Diz a lenda que se houver quatro castelos ligados em ciclo (ou seja, se existirem quatro castelos A, B, C e D tais que A e B, B e C, C e D e D e A estão ligados), um dragão aparecerá do centro dos castelos e destruirá a Terra de Oz. Mostre que para esta desgraça não acontecer o número de estradas deve ser menor ou igual a $\left(1+\sqrt{4n-3}\right)n/4$.*

Solução: Bom, para todos os efeitos, esse **é** um problema de grafos. Poderia ser traduzido para "prove que em um grafo de n vértices sem ciclos de 4 vértices há uma quantidade de arestas menor ou igual a $\left(1+\sqrt{4n-3}\right)n/4$". Mas convenhamos, com estradas e castelos e dragões está mais legal, não?

Considere um castelo ligado a outros dois:



Para cada castelo v do conjunto V dos castelos temos $\binom{g(v)}{2}$ pares de estradas. Para a desgraça não ocorrer, observemos que não podemos ter dois pares de estradas associados ao mesmo par de castelos. Assim, contando os pares de estradas, temos

$$\sum_{v\in V}\binom{g(v)}{2} = \text{pares de estradas} \le \text{pares de castelos} \le \binom{n}{2}$$

$$\implies \sum_{v\in V}\left((g(v))^2 - g(v)\right) \le n^2 - n \implies \sum_{v\in V}(g(v))^2 - \sum_{v\in V} g(v) \le n^2 - n \quad (*)$$

Sabemos que a soma $\sum_{v\in V} g(v)$ é igual ao dobro do número de estradas $2|A|$. Além disso, pode-se mostrar (usando a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética, ou mesmo Cauchy-Schwarz) que

$$\sum_{v\in V}(g(v))^2 \ge \frac{\left(\sum_{v\in V} g(v)\right)^2}{n} = \frac{4|A|^2}{n}$$

Assim

$$(*) \implies \frac{4|A|^2}{n} - 2|A| \le n^2 - n \iff 4|A|^2 - 2n|A| - n(n^2-n) \le 0 \quad (**)$$

Resolvendo $(**)$ em $|A|$, obtemos

$$\frac{n - n\sqrt{4n-3}}{4} \le |A| \le \frac{n + n\sqrt{4n-3}}{4} \implies |A| \le \left(1+\sqrt{4n-3}\right)\frac{n}{4}$$

□

Indução

O princípio da indução é o tipo de demonstração mais utilizado em grafos. Isso ocorre porque a definição de grafos é muito geral, o que acarreta uma certa falta de estrutura nos grafos. E o melhor método para se provar resultados em entidades sem estrutura (procurando, então, *fazer aparecer* alguma estrutura) é a indução.

Lembrando que a indução é feita sobre alguma variável inteira, em grafos tal técnica costuma seguir um dos três procedimentos a seguir.

Para exemplificarmos os três procedimentos, provaremos de três maneiras o seguinte

Teorema 2. *Uma árvore de n vértices tem $n-1$ arestas.*

Indução sobre número de vértices

A indução sobre vértices normalmente é feita nos seguintes passos: primeiro, elabore a hipótese em indução (o que pode ser feito estudando casos pequenos); prove a base de indução (o que normalmente já é feito ao se estudar os casos pequenos; e suponha que o resultado é válido para grafos com menos de n vértices. Até aqui, é o procedimento normal inerente a induções em geral. Agora vem a parte específica para grafos:

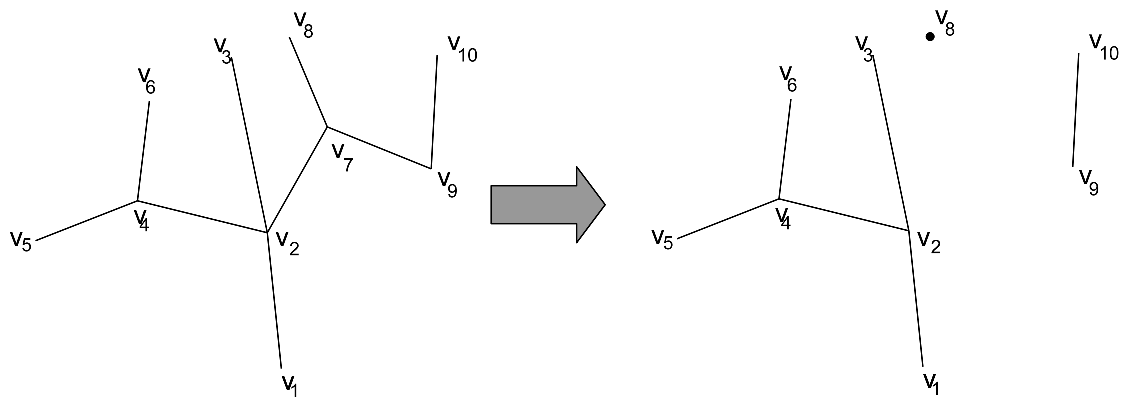
1. Dos n vértices, escolha um e retire-o do grafo. Ao retirar o vértice você também deve excluir todas as arestas que incidem nesse vértice;

2. Aplique a hipótese de indução no que sobrou do grafo;

3. Coloque o vértice de volta e veja o que acontece.

Algo que é muito comum ser feito é "colocar" mais um vértice no passo de indução. Mas fica a pergunta: onde? E com quem devo ligar? Note que se realmente quisermos cobrir todos os casos de grafo com um vértice a mais, temos que considerar todas as possibilidades de ligação desse novo vértice com os demais. Isso se realmente for possível gerar todos os grafos de um vértice a mais colocando esse vértice. O conselho aqui é evitar esse tipo de

indução a não ser que seja claro que "colocar" vértices realmente gera todos os grafos de um vértice a mais.
Demonstração do teorema: Vamos provar que toda árvore de n vértices tem $n-1$ arestas. Para fazer isso, apliquemos indução sobre n. Se $n=1$, não há o que provar. Agora suponha que o resultado é válido para árvores de menos vértices. Considere uma árvore com n vértices. Ao retirarmos um vértice v, retiramos também $g(v)$ arestas. A retirada desse vértice desconecta a árvore, gerando $g(v)$ árvores.



Pela hipótese de indução, cada árvore tem k_i vértices e k_i-1 arestas. Assim, como cada árvore tem quantidade de arestas igual à quantidade de vértices menos um, a quantidade total de arestas é $g(v)$ unidades menor que o total de vértices, ou seja, é $n-1-g(v)$.

Colocando o vértice e as $g(v)$ arestas de volta, obtemos de volta a árvore com n vértices, com a vantagem de sabermos a sua quantidade de arestas, que é $\big(n-1-g(v)\big)+g(v) = n-1$. $\square$

Indução sobre número de arestas

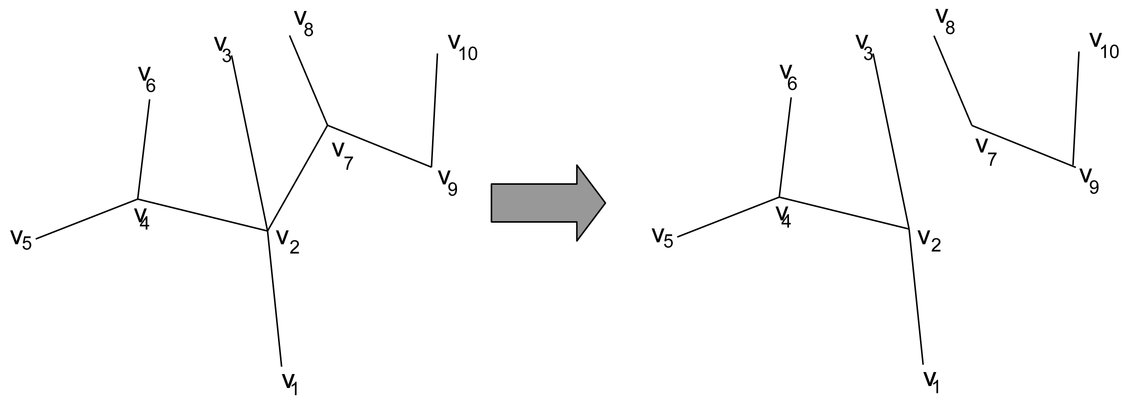
Os procedimentos específicos para indução em número de arestas de um grafo são:

1. Das m arestas, escolha uma e retire-a do grafo. Note que essa operação não altera o número de vértices;

2. Aplique a hipótese de indução no que sobrou do grafo;

3. Coloque a aresta de volta e veja o que acontece.

Outra demonstração do teorema: Se o grafo tem uma só aresta, então necessariamente tem dois vértices e assim provamos a base de indução. Agora suponha que o resultado é válido para árvores com menos arestas. Considere uma árvore com n vértices. Ao retirarmos uma aresta, desconectamos o grafo, obtendo duas árvores, com k e $n-k$ vértices.



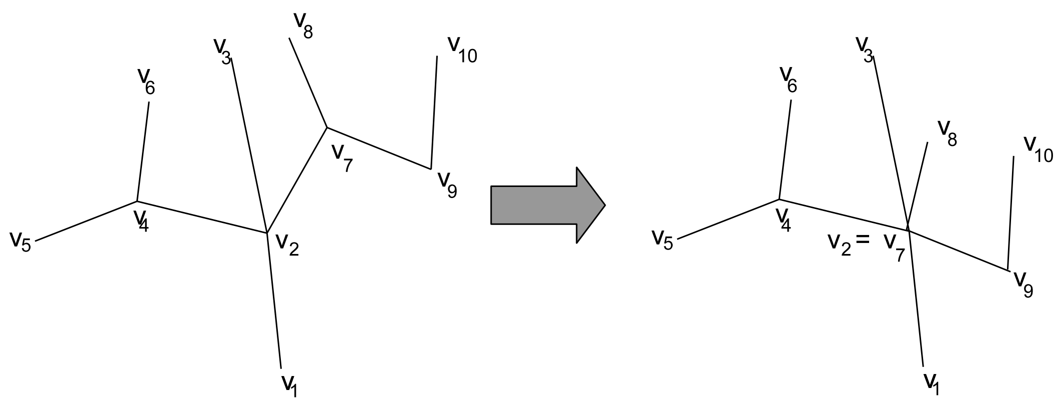
Pela hipótese de indução, essas duas árvores têm $k-1$ e $n-k-1$ arestas, respectivamente. Colocando a aresta de volta, obtemos uma árvore com n vértices e $(k-1)+(n-k-1)+1 = n-1$ arestas. $\square$

Indução com contração de vértices e/ou arestas

Aqui, em vez de retirar vértices ou arestas, juntamos arestas, aplicamos a hipótese de indução e "desjuntamos" os vértices ou arestas. Tal operação é chamada *contração* e grafo G' obtido depois de aplicar uma contração a um grafo G é um *menor* de G.

Essa técnica funciona particularmente bem quando queremos provar teoremas envolvendo conexidade.

Mais uma demonstração do teorema: Faremos indução sobre o número de vértices. A base de indução já foi feita acima. Suponha que o resultado é válido para grafos com menos vértices. Considere uma árvore com n vértices. Tome uma aresta e junte os dois vértices que nela incidem. Obtemos uma nova árvore com um vértice a menos, ou seja, $n-1$ vértices e uma aresta a menos.



Aplicando a hipótese de indução nessa nova árvore concluímos que esse tem $n-2$ arestas. Assim, desfazendo a contração, obtemos o resultado desejado. $\square$

Usando os teoremas envolvendo árvores

Os fatos que provamos sobre árvores podem ser aplicados a problemas sem demonstração.

Exemplo 2. *Nove barras idênticas de chocolate devem ser divididas igualmente entre n crianças, $n > 9$. Para quais valores de n isso é possível quebrando cada barra no máximo uma vez?*

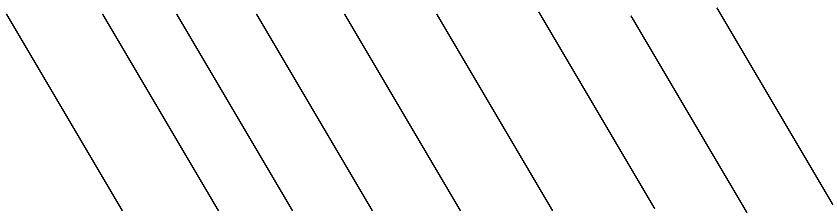
Solução: Primeiro, como cada criança vai receber $9/n < 1$ barra de chocolate, devemos quebrar todas as barras.

Seja G o grafo cujos vértices são as crianças e ligamos duas crianças quando elas compartilham um chocolate. Note que cada aresta corresponde a um chocolate, de modo que há n vértices e 9 arestas.

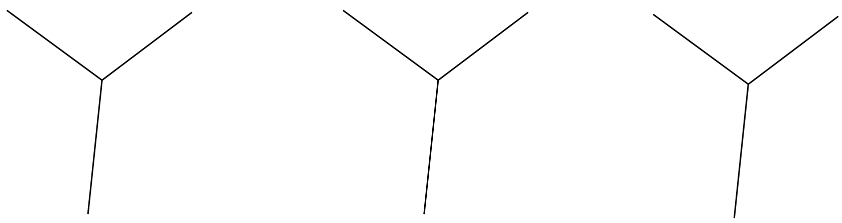
Vamos provar que G é uma floresta. Suponha que G tenha um ciclo de k vértices. Então G tem pelo menos k arestas. No nosso problema, isso quer dizer que k crianças vão partilhar pelo menos k chocolates, e cada criança ganharia um ou mais chocolates, o que não é possível. Logo G não pode ter ciclos.

Então cada componente conexo de G é uma árvore. Note que uma árvore de $m+1$ vértices tem m arestas, de modo que cada criança dessa árvore ganharia $\frac{m}{m+1}$ chocolate. Seja $m_1, m_2, \ldots, m_t$ as quantidade de arestas de cada árvore de G. Como todas as crianças devem ganhar a mesma quantidade de chocolate, $\frac{m_i}{m_i+1} = \frac{m_j}{m_j+1} \iff m_i = m_j$, ou seja, todas as árvores têm a mesma quantidade m de arestas. E, sendo o total de arestas igual a 9, m deve ser um divisor de 9, ou seja, é 1, 3 ou 9.

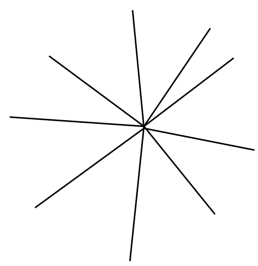
Se $m = 1$, obtemos 9 árvores com 1 aresta, e neste caso, $n = 18$. Cada criança recebe metade de um chocolate.



Se $m = 3$, obtemos 3 árvores com 3 arestas, e neste caso, $n = 12$. Uma maneira de dividir o chocolate é dar três pedaços de $1/4$ de barra para três crianças e os pedaços de $3/4$ de barras para as outras nove crianças.



Se $m = 9$, obtemos 1 árvore com 9 arestas, e neste caso, $n = 10$. Uma maneira de dividir o chocolate é dar nove pedaços de $1/10$ de barra para uma criança e os pedaços de $9/10$ de barras para as outras nove crianças.



Problemas

1. (OBM) Esmeralda adora os números triangulares (ou seja, os números 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28...) tanto que mudou de lugar os números 1, 2, 3, ..., 11 do relógio de parede do seu quarto de modo que a soma de cada par de números vizinhos é um número triangular. Ela deixou o 12 no seu lugar original. Que número ocupa o lugar que era do 6 no relógio original?

2. Em um país você pode ir de avião de uma cidade até qualquer outra. Quando não há nenhum voo direto entre duas cidades há um com escalas. Durante o voo de uma cidade até outra podemos passar no máximo uma vez em cada uma das cidades deste país. Nós chamamos de tamanho do trajeto entre duas cidades o número de escalas suficientes para se ir de uma cidade até outra (através de qualquer caminho).

   Prove que se existem dois trajetos de tamanho máximo, eles possuem uma escala em comum.

3. Durante uma conferência, cada um dos 5 matemáticos cochilaram exatamente duas vezes. Para cada par destes matemáticos, houve um momento em que ambos estavam cochilando simultaneamente. Prove que, em algum instante, três estavam cochilando ao mesmo tempo.

4. Vinte times de futebol participam de um torneio. No primeiro dia todos os times jogam exatamente uma vez, assim como no segundo dia. Prove que após o segundo dia é possível selecionar dez times tais que quaisquer dois dentre eles ainda não tenham se enfrentado.

5. (OBM) Em um certo país há 21 cidades e o governo pretende construir n estradas (todas de mão dupla), sendo que cada estrada liga exatamente duas das cidades do país. Qual o menor valor de n para que, independente de como as estradas sejam construídas, seja possível viajar entre quaisquer duas cidades (passando, possivelmente, por cidades intermediárias)?

6. Em uma festa com 10000 pessoas, em cada grupo de quatro pessoas há pelo menos uma pessoa que conhece cada uma das outras três. Qual é o menor número de pessoas na festa que conhecem todos os demais?

7. Um *grafo direcionado* é definido de modo análogo aos grafos simples, mas no lugar de pares não ordenados de vértices temos pares ordenados (você pode imaginar "setinhas" no lugar de linhas). O *in-grau* e o *out-grau* de cada vértice são as quantidades

de arestas que saem e entram do vértice, respectivamente. Enuncie e prove uma variante do teorema da soma dos graus.

8. Prove que a quantidade de pessoas na história que deu um número ímpar de apertos de mão é par.

9. Um *triângulo* é um conjunto de três vértices ligados dois a dois. Prove que um grafo com m arestas e n vértices tem pelo menos

$$\frac{4m(m - n^2/4)}{3n}$$

triângulos.

10. Na Pasárgada há N cidades e $2N - 1$ estradas, todas de mão única, ligando pares de cidades. Sabe-se que é possível ir de cada cidade a qualquer outra utilizando uma ou mais estradas. Prove que podemos interditar uma dessas estradas de modo que ainda seja possível ir de cada cidade a qualquer outra utilizando uma ou mais estradas.

    Observação: note que, como as estradas são de mão única, você deve considerar outro tipo de grafo, o grafo *direcionado*, onde, em vez de linhas usamos flechas para ligar dois vértices. Para resolver o problema, faça uma indução (que surpresa!) e contraia um ciclo.

11. Considere um grafo finito com todos os seus vértices pintados de branco. A seguinte operação é permitida: escolha um vértice e troque a sua cor (branco para preto, preto para branco) e também a de todos os seus vizinhos. Prove que, não importa qual seja o grafo, é sempre possível, a partir de uma sequência finita de operações, deixar todos os vértices do grafo pretos.

12. Em um torneio de tênis em turno completo prove que exatamente uma das seguintes situações ocorre:

    (1) Os jogadores podem ser particionados em dois grupos de modo que cada um dos jogadores de um destes grupos venceu todos os seus jogos contra os jogadores do outro grupo.

    (2) Todos os participantes podem ser ranqueados de 1 até n de forma que o i-ésimo jogador venceu o $(i + 1)$-ésimo e o n-ésimo venceu o primeiro.

13. (IMO) É dado no plano um conjunto finito E de pontos de coordenadas inteiras. É sempre possível colorir todos os pontos de E, com duas cores, vermelho ou branco, de modo que para toda reta r paralela, quer ao primeiro, quer ao segundo eixo coordenado, a diferença entre o número de pontos vermelhos e o número de pontos brancos, pertencente a r, seja 1, 0 ou -1? Justifique.

14. Em um congresso há 1000 delegados de vários países. Sabe-se que qualquer grupo de 3 delegados pode conversar sem ajuda dos restantes (mas pode acontecer de uma das três pessoas servir de intérprete para as outras duas.) Prove que todos os participantes

do congresso podem ser instalados em um hotel com quartos para duas pessoas, de tal forma que, em cada quarto sejam instalados dois delegados que possam conversar sem ajuda dos restantes.

15. Prove que toda árvore tem pelo menos dois vértices com grau 1 (esses vértices em árvores são comumente chamados *folhas*).

16. (IMO) Uma diagonal de um polígono regular P de 2006 lados é um *segmento bom* se separa P em duas partes, cada uma tendo um número ímpar de lados de P. Os lados de P também são *segmentos bons*.

    Divide-se P em triângulos, traçando-se 2003 diagonais tais que, duas a duas, não se cortam no interior de P. Determine o maior número de triângulos isósceles nos quais dois lados são segmentos bons que podem aparecer numa divisão como essa.

17. Uma folha dividida em quadrados iguais é pintada com 23 cores. Um par de cores é denominado "bom" se existem quadrados vizinhos pintados com estas cores. Qual é o número mínimo de pares bons?

Bibliografia

1. B. Bollobás, *Graph Theory: An Introductory Course.*

2. R. Diestel, *Graph Theory.* Springer 2003.

3. T. Andreescu e Z. Feng, *102 Combinatorial Problems, From the training of the USA IMO team*, Birkhäuser 2003.

Respostas, Dicas e Soluções

1. 5. Considere o grafo cujos vértices são os números de 1 a 12 e dois vértices são conectados se a soma deles é um número triangular. Encontre primeiro os vértices conectados a somente dois outros vértices (isto é, os vértices de grau 2).

2. Suponha o contrário: considere dois trajetos disjuntos de tamanho máximo. Você consegue construir um trajeto maior? Use "pedaços" dos dois trajetos.

3. Considere como vértices os $\binom{5}{2}$ *cochilos* e como arestas dois cochilos que ocorreram simultaneamente. Note que há pelo menos 10 arestas, o que mostra que esse grafo tem um ciclo (por quê?). O que esse ciclo significa?

4. Os vértices são os vite times e as arestas são as partidas. Todos os vértices têm grau dois. Que tipo de grafo só tem vértices de grau dois? E por que esse grafo não pode ter ciclos ímpares?

5. 191. Os vértices são as cidades e as arestas, as estradas. Um grafo minimamente desconexo com a maior quantidade de arestas tem duas componentes conexas com a e $21-a$ vértices, ambas completas. Quando $\binom{a}{2}+\binom{21-a}{2}$ é máximo?

6. Considere as pessoas como vértices e ligue dois vértices quando as pessoas correspondentes *não se conhecem*. A condição do problema diz que, para quaisquer quatro vértices, um está isolado dos outros três (ou seja, nenhum dos outros três vértices está ligado a ele. Isso quer dizer, em particular, que não há duas arestas disjuntas nesse grafo. Isso quer dizer que nenhuma componente conexa tem um caminho com mais de três vértices. Fica fácil concluir que se uma componente conexa tem uma aresta, ela deve ter no máximo três vértices (por quê?), e a resposta é $10000 - 3 = 9997$. Um exemplo é um grafo que tem um triângulo e 9997 vértices isolados.

7. A soma dos in-graus é igual à soma dos out-graus. A demonstração é análoga ao caso dos grafos simples, só que a contagem das arestas dá uma unidade para a soma dos in-graus e uma unidade para a soma dos out-graus para cada aresta.

8. Considere o grafo em que as pessoas são os vértices e os apertos de mão são as arestas. É possível que haja uma quantidade ímpar de vértices com grau ímpar?

9. Considere uma aresta vw. Há $n-2$ outros vértices, $g(v)-1$ outras arestas saindo de v e $g(w)-1$ outras arestas saindo de w. Se $n-2 < (g(v)-1)+(g(w)-1)$, então temos pelo menos $(g(v)-1)+(g(w)-1)-(n-2) = g(v)+g(w)-n$ triângulos com vw como aresta. Caso contrário, não temos triângulo. Assim, considerando que cada triângulo tem três arestas, o total de triângulos é pelo menos

$$\frac{1}{3}\sum_{vw\in A} g(v)+g(w)-n = \frac{1}{3}\sum_{vw\in A}(g(v)+g(w)) - \frac{mn}{3}$$

Vamos calcular $\sum_{vw\in A}(g(v)+g(w))$ com outra contagem dupla. Note que a parcela $g(v)$ aparece para cada aresta que incide em v, que são em um total de $g(v)$. Então $\sum_{vw\in A}(g(v)+g(w)) = \sum_{v\in V}(g(v))^2$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz,

$$\sum_{v\in V}(g(v))^2\cdot\sum_{v\in V}1^2 \ge \left(\sum_{v\in V} g(v)\cdot 1\right)^2 \iff \sum_{v\in V}(g(v))^2 \ge \frac{4m^2}{n}$$

Portanto a quantidade de triângulos é pelo menos

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{4m^2}{n} - \frac{mn}{3} = \frac{4m(m-n^2/4)}{3n}.$$

Observação 1. *Esse resultado implica um caso particular* teorema de Túran*: se um grafo com n vértices tem mais de $n^2/4$ arestas, há pelo menos um triângulo no grafo. Veremos esse teorema mais tarde.*

10. O grafo tem as cidades como vértices e estradas como arestas *direcionadas*. Na verdade, provaremos por indução sobre N algo ligeiramente mais forte: se o grafo tem *pelo menos* $2N-1$ arestas, permitindo *loops* (arestas direcionadas ligando um vértice a ele mesmo) então é possível eliminar uma das arestas e ter um grafo conexo.

Para $N = 2$ há pelo menos 3 estradas, de modo que há duas no mesmo sentido e podemos interditar uma delas. Suponha agora que o resultado é válido para todo $k < N$ vértices e provemos para N vértices. Considere um ciclo minimal (ele existe, pois sendo A e B dois vértices conectados por uma aresta existe um caminho de A para B e um caminho de B para A; caso haja cordas nesse ciclo, conseguimos um ciclo menor, e diminua o ciclo) e contraia-o. Então, se o ciclo tem k vértices, entre esses k vértices há k arestas. Com isso, obtemos um grafo com $N - k + 1$ vértices e $2N - 1 - k \le 2(N - k + 1) - 1$ arestas. Então, pela hipótese de indução, podemos eliminar uma das arestas.

Observação 2. *Note que essa ideia dá certo porque não podemos retirar arestas de ciclos minimais.*

11. Indução sobre o número de vértices. O resultado é imediato para um vértice; considere agora um grafo G com n vértices e suponha que o resultado é válido para grafos com $n - 1$ vértices. Separe um vértice v de G e aplique a hipótese de indução para $G \setminus v$. Isso vai mudar a cor de v algumas vezes. Se no final v ficar preto, o problema acabou, então suponha o contrário, ou seja, que v fica branco; mais ainda, podemos supor que isso ocorre para todo vértice v de G (se não, separamos um dos vértices que dá certo). Ou seja, há n procedimentos que tornam todos os vértices pretos, exceto um, um procedimento para cada vértice; ou, mais ainda, cada procedimento muda a cor de todos os vértices, exceto um. Se n é par, basta aplicar os n procedimentos; cada um dos vértices é mudado de cor $n - 1$ vezes, ficando preto; se n é ímpar, um dos vértices w tem grau par (pois a soma dos graus é par); aplique o procedimento para todos os vértices exceto w e seus vizinhos. Fazemos isso uma quantidade par de vezes (w e seus vizinhos totalizam uma quantidade ímpar de vértices), então os vértices onde aplicamos os procedimentos mudam de cor uma quantidade ímpar de vezes, ficando pretos, e w e seus vizinhos mudam de cor uma quantidade par de vezes, ficando brancos. Mas aí é só mudar a cor de w e seus vizinhos, e todos os vértices ficam pretos, completando a indução.

12. Primeiro note que se é possível dividir os vértices em dois grupos A e B tais que todas as arestas ligando A a B têm o mesmo sentido então não é possível que todos os vértices fiquem em ciclo (o ciclo teria que ir de A a B e depois "voltar" de B para A, o que não é possível), de modo que no máximo um dos itens (1) e (2) ocorre. Para provar que pelo menos um deles ocorre, aplique indução sobre o número de vértices. O resultado é válido para grafos com dois vértices. Agora, considere um grafo G com n vértices e retire um deles, v. Aplique a hipótese de indução para $G \setminus v$; se obtivermos um ciclo $v_1 v_2 \ldots v_{n-1} v_1$, se as arestas de v todas saem ou todas entram o problema está resolvido pois podemos dividir os vértices em dois grupos $A = \{v\}$ e $B = V(G) \setminus \{v\}$, de modo que todos de B venceram (ou perderam de) v. Caso contrário, existe k tal que $v_k v$ e $v v_{k+1}$ são arestas (sendo $v_n = v_1$), e podemos incluir v no ciclo.

    No caso em que os vértices de $G \setminus v$ pode ser dividido em dois grupos A e B, aplique a hipótese de indução nos grupos repetidamente para obter grupos $A_1, A_2, \ldots, A_m$

tais que todo vértice de A_i vence cada vértice de A_j para todo j, $i < j \leq m$, e todos os vértices dentro de um mesmo grupo A_i estão em um ciclo. Se v venceu todos os elementos de A_m, então divida os vértices de G em A_m e $V(G) \setminus A_m$. Se v perdeu de todos os elementos de A_1 divida os vértices em A_1 e $V(G) \setminus A_1$. Caso contrário, existem $u \in A_1$ e $w \in A_m$ tais que vu e wv são arestas. Então construa um ciclo $vu \to A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_m \to wv$, em que usamos o ciclo de cada conjunto A_i. A indução está completa.

13. Considere o grafo em que os vértices são os pontos de E e dois vértices são ligados quando eles têm a mesma coordenada x ou y e são vizinhos. Faça indução sobre o número de vértices. Para um vértice, o problema é trivial. Agora, suponha que há mais de um vértice e suponha, sem perda de generalidade, que o grafo é conexo (caso contrário, é só aplicar a hipótese de indução em cada componente conexa). Se ele tem um ciclo, pinte os vértices do ciclo de cores alternadas (por que isso é possível?) e retire-o do grafo; pinte o resto com a hipótese de indução e coloque o ciclo volta (por que isso dá certo?). Se ele não tem ciclo é uma árvore, e tome um vértice grau 1, retire, pinte o resto com a hipótese de indução e coloque o vértice de volta.

14. Considere quaisquer três pessoas; duas delas consegue conversar entre si; coloque-as em um quarto; repita o procedimento até ter 4 pessoas; suponha por absurdo que não é possível separar essas pessoas em dois grupos de duas pessoas tais que em cada grupo as duas pessoas possam se comunicar, forçando os casos chega-se a um absurdo.

15. Seja n a quantidade de vértices da árvore. A soma dos graus é $2|A| = 2n - 2$, de modo que se no máximo um vértice tivesse grau 1 a soma dos graus seria pelo menos $2(n-1) + 1 > 2n - 2$, absurdo. Logo há pelo menos duas folhas.

16. Primeiro, considere o triângulo que contém o centro; depois mostre (por indução!) que se um pedaço do polígono tem a lados do 2006-ágono original e não contém o centro então há no máximo $\lfloor a/2 \rfloor$ triângulos bons nele.

17. 22. Considere o grafo cujos vértices são as cores e ligamos duas cores quando o par de cores é bom. Esse grafo deve ser conexo, então tem pelo menos 22 arestas. Não é difícil construir um exemplo que é uma árvore (por exemplo, 23 listras verticais, uma de cada cor).