Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Combinatória – Nível 3

Prof. Carlos Shine

Aula 10

Teoria dos Grafos: Casa dos Pombos e Teoria de Ramsey

Além de indução e contagem dupla, que vimos no capítulo anterior, há uma terceira técnica muito utilizada na Combinatória: o simples, porém poderosíssimo *Princípio da Casa dos Pombos*, que relembramos aqui:

Proposição 1 (Princípio da Casa dos Pombos)**.** *Se há* $n+1$ *pombos para serem distribuídos em* n *casas, então há pelo uma casa com pelo menos dois pombos.*

Às vezes, a seguinte formulação é mais útil:

Proposição 2 (Princípio da Casa dos Pombos (Médias))**.** *Se uma variável tem média igual a* M*, então existe a variável assume pelo menos um valor maior ou igual a* M *e pelo menos um valor maior ou igual a* M*.*

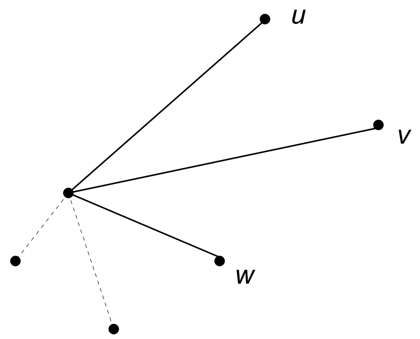
Na verdade, você pode pensar intuitivamente no Princípio da Casa dos Pombos da maneira a seguir, que pode ajudar a identificar problemas em que devemos aplicar esse princípio e é mais simples de lembrar.

Proposição 3 (Princípio da Casa dos Pombos (Intuitivo))**.** *Se há muitos pombos para poucas casas, alguma casa vai ter muitos pombos. E se há poucos pombos para muitas casas, haverá uma (ou até muitas!) casa(s) vazia(s).*

Exemplo 1. *Prove que, entre seis pessoas, existem três que se conhecem mutuamente ou três que se desconhecem mutuamente.*

Solução: Considere o grafo cujos vértices representam as pessoas e ligamos duas pessoas por aresta contínua se elas se conhecem e por aresta tracejadas se não se conhecem. O grafo obtido é completo, sendo as arestas de dois tipos e queremos provar que nesse grafo existe um triângulo (K_3) com arestas todas do mesmo tipo.

Tome um vértice qualquer. Dele saem cinco arestas, de modo que pelo menos três, u, v e w, são do mesmo tipo, que podemos supor, sem perda de generalidade, que são contínuas.



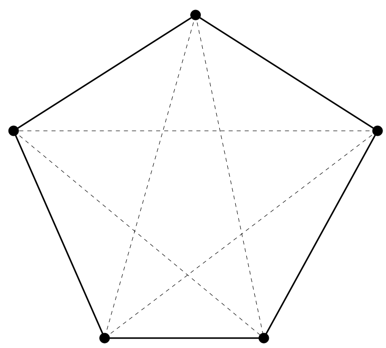
Note que se qualquer dois dos vértices u, v, w estiver ligado por aresta contínua então forma-se um triângulo contínuo. Caso contrário, esses três vértices estão todos ligados por arestas tracejadas, formando um triângulo tracejado. $\square$

Esse é um exemplo dos

Números de Ramsey

Definição 1. *O menor valor de n para o qual todo n-clique cujas arestas são pintadas de k cores c_1, c_2, $\ldots$, c_k contém um K_{m_1} da cor c_1 ou um K_{m_2} da cor c_2 ou $\ldots$ ou um K_{m_k} da cor c_k é o* número de Ramsey *$R(m_1, m_2, \ldots, m_k)$.*

No nosso último exemplo, mostramos que $K(3, 3) \leq 6$. De fato, a figura a seguir, que exibe uma maneira de pintarmos as arestas de um K_5 de duas cores sem formar um K_3 de qualquer cor, mostra que $R(3, 3) = 6$.



A partir de agora, vamos nos focar nos números $R(n, n)$, ou seja, queremos encontrar um K_n quando pintamos um grafo completo de duas cores. Note que isso é o mesmo que procurar em um grupo n pessoas que se conhecem mutuamente ou n pessoas que se desconhecem mutuamente.

O próximo teorema nos mostra que precisamos realmente de muitas pessoas para garantir a presença de tal grupo.

Teorema 1. $\left(\sqrt{2}\right)^n \leq R(n, n) \leq 4^n$.

Demonstração: Para provar o teorema, devemos mostrar dois fatos:

(i) *Todo grafo completo de 4^n vértices com arestas pintadas de duas cores contém um K_n de uma cor.*

(ii) *Existe um grafo completo de pelo menos $\left(\sqrt{2}\right)^n$ vértices com arestas pintadas de duas cores sem K_n de qualquer uma das duas cores.*

Os dois fatos são provados utilizando o princípio da casa dos pombos, mas de maneiras diferentes.

Antes de mais nada, vamos supor que as cores são verde e amarelo (vamos valorizar o nosso país!).

Demonstração de (i). Aqui, utilizaremos a mesma ideia que utilizamos para provar que $R(3,3) \le 6$: considerar um vértice e utilizar casa dos pombos para encontrar quantidades grandes de arestas de uma cor. Mas o problema aqui é que, ao contrário daquela demonstração, a aparição de triângulos não acaba o problema.

Para remediar isso, vamos utilizar uma ideia de "bonecas russas" (aquelas mais ou menos redondas que vão uma dentro da outra): vamos encontrar grafos completos dentro de outros.

Bonecas russas!

Nossa primeira, e maior, boneca russa, é o grafo original, que será denotado por G_0. Considere um vértice v_0 de G_0. Dele saem $4^n - 1$ arestas, de modo que pelo menos $\left\lfloor \frac{4^n-1}{2} \right\rfloor = 2^{2n-1}$ arestas de mesma cor, que denotaremos c_0. Os pelo menos 2^{2n-1} vértices conectados por tais arestas formam a nossa segunda boneca russa, o grafo G_1. Note que G_1 recebe arestas da cor c_0 de v_0.

Da mesma forma, tome um vértice v_1 de G_1. Dele saem pelo menos $2^{2n-1} - 1$ arestas, de modo que pelo menos 2^{2n-2} são da mesma cor c_1 (note que pode ocorrer $c_0 = c_1$). Esses vértices formam a nossa terceira boneca russa G_2. E assim continuamos, obtendo os grafos G_i, $i = 1, 2, \ldots, 2n$, cada um com 2^{2n-i} vértices e a cor c_i conectando v_i a G_i. Note que cada grafo está contido no anterior, de modo que os grafos G_i se comportam como genuínas bonecas russas.

Note que temos $2n$ cores c_i, de modo que pelo menos n delas são iguais, digamos $c_{i_1} = c_{i_2} = \cdots = c_{i_n}$ são iguais a verde, $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$. Considere, então, os vértices v_{i_1}, v_{i_2}, $\ldots$, v_{i_n}. Afirmamos que esses vértices determinam um K_n verde. De fato, o vértice v_{i_1} envia somente arestas verdes para todos os vértices dos grafos G_k, $k > i_1$ (ou seja, as bonecas russas interiores recebem de v_{i_1} somente arestas verdes). Em particular, as arestas que ligam v_{i_1} a todos os demais v_{i_k}'s são verdes. Da mesma forma, as arestas que ligam

v_{i_2} a todos os demais v_{i_k}'s, $k > 2$, são verdes (movemos para a próxima boneca), e assim por diante, obtendo assim um K_n verde. $\square$

Demonstração de (ii). Aqui, utilizaremos probabilidade. O *método probabilístico* é bastante utilizado em grafos para provar a existência de certos grafos sem ter que construí-los.

Seja N um inteiro menor ou igual a $\left(\sqrt{2}\right)^n$ a quantidade de vértices. Pinte cada aresta de verde ou amarelo com probabilidade $1/2$ para cada cor (decidindo através do lançamento de uma moeda, por exemplo). A probabilidade de n vértices determinarem um K_n verde é $2^{-\binom{n}{2}}$ ($1/2$ para cada uma das $\binom{n}{2}$ arestas). Assim, a probabilidade de n vértices um K_n verde ou amarelo é $2 \cdot 2^{-\binom{n}{2}} = 2^{1-\binom{n}{2}}$.

Assim, a média de K_n's de uma cor só em grafos de N vértices é obtida somando as probabilidades sobre todos os conjuntos de n vértices do grafo, ou seja, $\binom{N}{n}2^{1-\binom{n}{2}}$ (da mesma forma que a média de questões de uma prova com 100 testes de cinco alternativas que você acertaria se chutasse tudo é $100 \cdot 1/5 = 20$).

O princípio da casa dos pombos mostra que existe sempre alguém acima ou igual à média e alguém abaixo ou igual à média. Se provarmos que a média calculada acima é menor do que 1, provamos que existe um grafo com uma quantidade abaixo da média, ou seja, sem grafos completos de uma cor só. De fato, para $n > 3$,

$$\binom{N}{n}2^{1-\binom{n}{2}} < \frac{N^n}{n!}2^{1-(n^2-n)/2} = \frac{2^{1+n/2}}{n!} \le \frac{2^{n-1}}{n!} = \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdots \frac{2}{n} < 1$$

$\square$

Por incrível que pareça, esses limitantes ainda são os melhores conhecidos.

Grafos bipartidos

Um grafo é *bipartido* quando seu conjunto V de vértices pode ser particionado em duas classes V_1 e V_2 tais que não exista aresta ligando vértices dentro da mesma classe. Ou seja, toda aresta do grafo conecta vértices de classes diferentes.

Grafos bipartidos são fáceis de serem caracterizados, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 2. *Um grafo é bipartido se, e somente se, não contém ciclos ímpares.*

Demonstração: Primeiro, provemos que se o grafo contém um ciclo ímpar então não é bipartido. Suponha, por absurdo, que é bipartido. Considere somente o ciclo. Uma das classes contém mais vértices do ciclo do que a outra, pois o total de vértices é ímpar; mas todo vértice do ciclo tem grau 2, e isso contradiz o fato de que em um grafo bipartido as somas dos graus dos vértices em cada classe são iguais (veja o exercício a seguir).

Caso o grafo não contenha ciclos ímpares, considere o seguinte algoritmo que obtém duas classes para os vértices:

1. Tome um vértice qualquer v de G e coloque-o em V_1.

2. Tome todos os vizinhos de v e coloque-os em V_2.

3. Tome cada um dos elementos de V_2 e coloque todos os vizinhos sem classe desses vértices em V_1;

4. Tome cada um dos elementos de V_1 e coloque todos os vizinhos sem classe desses vértices em V_2;

5. Se não houver mais vizinhos mas houver vértices sem classe, aplique o passo 1 a qualquer vértice sem classe; se não houver mais vértices, o algoritmo termina; caso contrário, volte ao passo 3.

O algoritmo sempre termina, pois a cada execução dos passos 1, 2, 3 ou 4 a quantidade de vértices sem classe diminui. Vejamos por que funciona.

Suponha que haja uma aresta ligando vértices v e w da mesma classe, digamos V_1. Provaremos que o grafo contém um ciclo ímpar, o que é um absurdo. Suponha, sem perdas, que o algoritmo colocou v antes de w em V_1. Então, da natureza do algoritmo, existe um caminho que liga v a w, alternando vértices em V_1 e V_2. Note que, como esse caminho começa e termina em V_1, ele tem um vértice a mais em V_1 do que em V_2, tendo um total de vértices ímpar. Esse caminho, unido à aresta vw, forma um ciclo com quantidade ímpar de vértices, concluindo a demonstração. $\square$

Problemas

1. Mostre que se há n pessoas em uma festa, então duas delas conhecem o mesmo número de pessoas entre as presentes.

2. Na terra de Oz há vários castelos e de cada um partem três estradas. Um cavaleiro errante deixa seu castelo ancestral e viaja pelo país. Para manter a viagem interessante, quando chega a um determinado castelo ele vira à direita se tinha virado à esquerda no castelo pelo qual passou anteriormente e vice-versa. Prove que o cavaleiro sempre retornará ao seu próprio castelo.

3. Todo par de cidades em um certo país são ligados diretamente por exatamente um meio de transporte: ônibus, trem ou avião. Todos os três meios de transporte são usados no país com nenhuma cidade sendo servida pelos três meios e não havendo três cidades ligadas duas a duas pelo mesmo meio. Determine o número máximo de cidades no país.

4. Prove que $R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{n \text{ três}}) \le \lfloor n!e \rfloor + 1$.

   Dica: faça uma indução sobre n, considerando um vértice, e obtenha uma recursão. Utilize o fato de que

$$\lfloor n!e \rfloor = n!\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

5. Prove que $R(3,3,3)$ é *exatamente* 17.

6. Associando o Princípio da Casa dos Pombos e indução, prove que $R(m,n) \le \binom{m+n-2}{m-1}$.
7. Prove que $R(4,3) = 9$.
8. Prove que $R(4,4) \le 18$.
9. Utilizando agora uma contagem dupla, prove que entre seis pessoas existem *dois* grupos de três pessoas, sendo que em cada grupo as três pessoas se conhecem mutuamente ou se desconhecem mutuamente.
10. (IMO) Uma sociedade internacional tem membros de 6 países diferentes. A lista de membros contém 1978 nomes, numerados $1, 2, \ldots, 1978$. Prove que existe pelo menos um membro cujo número é a soma dos números de dois membros de seu próprio país, ou é igual ao dobro do número de um membro de seu próprio país.
11. Mostre o *lema de Schur*: seja k um inteiro positivo fixado. coloridos cada um dos elementos de $A = \{1, 2, 3, \ldots, N\}$ com uma de k cores. Prove que para todo N suficientemente grande existem $a, b, c \in A$ de mesma cor tais que $a = b + c$.
12. Prove que o último teorema de Fermat é falso módulo p para infinitos valores primos de p, ou seja, que a congruência $x^n + y^n \equiv z^n \pmod{p}$ tem solução com $xyz \not\equiv 0 \pmod{p}$ para todo p primo suficientemente grande.
13. Prove que para todo inteiro $n \ge 3$ existe M tal que todo conjunto de M pontos no plano contém n pontos que são os vértices de um n-ágono convexo.
14. Prove que, em um grafo bipartido, as somas dos graus dos vértices em cada classe são iguais.
15. As cidades $C_1, \ldots, C_N$ são servidas por n companhias aéreas $A_1, \ldots, A_n$. Há um voo entre quaisquer duas cidades, e todas companhias que fornecem o serviço o fazem em ambas as direções. Se $N \ge 2^n + 1$, prove que pelo menos uma das companhias pode oferecer uma viagem com um número ímpar de escalas.
16. (OBM) Uma tela de computador exibe uma figura constituída por n pontos de uma superfície esférica, 4 a 4 não coplanares, e por todos os segmentos que eles determinam, cada um dos quais está colorido de azul ou vermelho. A cada um dos pontos está associado uma tecla, cujo toque provoca a mudança de coloração de todos os segmentos que incidem no ponto. Sabe-se para cada três pontos existe uma sequência de toques que torna vermelhos os três lados do triângulo que eles determinam.

    (i) Mostre que existe uma sequência de toques que torna vermelhos todos os segmentos da tela.

    (ii) Calcule, em função de n, o número mínimo de toques necessários para tornar vermelhos todos os segmentos, no caso mais desfavorável.

Bibliografia

1. Carlos Gustavo T. de A. Moreira, *O Teorema de Ramsey*, Revista Eureka! 6, 1999.

2. B. Bollobás, *Graph Theory: An Introductory Course.*

3. R. Diestel, *Graph Theory.* Springer 2003.

4. T. Andreescu e Z. Feng, *102 Combinatorial Problems, From the training of the USA IMO team*, Birkhäuser 2003.

5. Site *Cut The Knot*,

   `http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Combinatorics/ThreeOrThree.shtml`

Respostas, Dicas e Soluções

1. Há n pessoas e n possibilidades de quantidades de pessoas que alguém pode conhecer: de 0 (ninguém) a $n-1$ (todo mundo). Se um dos números não aparece, há no máximo $n-1$ quantidades e o problema acaba por casa dos pombos; se todos aparecem, obtemos uma contradição, pois não é possível que coexistam duas pessoas, uma que não conhece nunguém, e outra que conhece todo mundo.

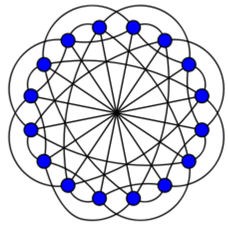
2. Primeiro, note que, por casa dos pombos, em algum momento o cavaleiro vai passar por um castelo e sair pela mesma estrada duas vezes. Isso quer dizer que ele fechou um ciclo. Como o caminho é reversível, o ciclo tem que passar pelo castelo inicial, então o cavaleiro tem que passar de novo pelo seu próprio castelo.

3. A resposta ainda é 5. O exemplo é o mesmo mostrado com duas cores e a demonstração para 6 vértices também é a mesma, mas forçando as cores.

4. Temos que provar que um grafo com $\lfloor n!e \rfloor + 1$ vértices cujas arestas são pintadas com n cores tem um triângulo monocromático. Para isso, faça indução sobre n e considere um dos vértices. Ele está conectado a pelo menos $\left\lfloor \frac{n!e-1}{n} \right\rfloor + 1 = \lfloor (n-1)!e \rfloor + 1$ vértices ligados com a mesma cor, digamos azul. Se dois desses vértices estiverem ligados por uma aresta azul, obtemos um triângulo azul, então podemos supor que eles estão ligados com as outras $n-1$ cores. Mas aí pela hipótese de indução há um triângulo monocromático com $n-1$ cores, e acabou.

   Observação 1. *De onde vem o número $\lfloor n!e \rfloor + 1$? Na nossa solução, consideramos um total de a_n vértices, em que $a_n = n(a_{n-1} - 1) + 2$ e $a_1 = 3$. Note que $a_2 = 6$ e $a_3 = 17$, exatamente como previsto. Resolvendo a recursão obtemos exatamente $a_n = \lfloor n!e \rfloor + 1$.*

5. O problema anterior mostra que $R(3, 3, 3) \le 17$. Para provar que é exatamente 17, mostramos um exemplo com 16 vértices cujas arestas são pintadas de 3 cores, sem triângulos monocromáticos. Para isso, considere o *grafo de Clebsch*:



O grafo é obtido da seguinte forma: numere os vértices de 1 a 16 e, considerando as operações módulo 16:

- Conecte os vértices $2i-1$ e $2i$, $i = 1, 2, \ldots, 8$;
- Conecte os vértices i e $i+8$, $i = 1, 2, \ldots, 8$;
- Conecte os vértices $2i-1$ e $2i+1$, $i = 1, 2, \ldots, 8$;
- Conecte os vértices $2i$ e $2i+3$, $i = 1, 2, \ldots, 8$;
- Conecte os vértices $2i$ e $2i+6$, $i = 1, 2, \ldots, 8$.

Note que o grau de cada vértice é 5 e que esse grafo não tem triângulos. Verifique que o K_{16} pode ser particionado em três grafos de Clebsch.

6. Vamos provar que $R(a,b) \le R(a-1,b) + R(a,b-1)$. Considere um vértice v qualquer de um grafo com $R(a-1,b)+R(a,b-1)$ vértices. Entre os outros $R(a-1,b)+R(a,b-1)-1$ vértices, duas coisas podem ocorrer:

   - De v saem $R(a-1,b)$ arestas da primeira cor. Aí, entre esses $R(a-1,b)$ vértices tem um K_b com a segunda cor ou um K_{a-1} com a primeira cor. No segundo caso, é só juntar v aos $a-1$ vértices para obter um K_a.
   - De v saem $R(a,b-1)$ arestas da segunda cor. O raciocínio é análogo ao anterior.

   A partir daí, como $R(a,2) = a$ (porque se um vértice tem a vértices ou ligamos todos os vértices de uma cor ou aparece uma aresta da outra cor) e $R(a,b) = R(b,a)$, pode-se provar por indução sobre $a+b$ que $R(a,b) \le \binom{a+b-2}{a-1}$. De fato, a igualdade ocorre para $b = 2$ e $R(a,b) \le R(a-1,b) + R(a,b-1) \le \binom{a-1+b-2}{a-2} + \binom{a+b-1-2}{a-1} = \binom{a+b-2}{a-1}$.

7. O exercício anterior nos dá $R(4,3) \le \binom{4+3-2}{3-1} = 10$, o que não é bom o suficiente. Para isso, vamos refinar um pouco a desigualdade: provaremos que se $R(a-1,b)$ e $R(a,b-1)$ são ambos pares então $R(a,b) \le R(a-1,b) + R(a,b-1) - 1$. Note que é caso para $a = 4$ e $b = 3$, já que $R(3,3) = 6$ e $R(4,2) = 4$. Considere um grafo G com $M = R(a-1,b) + R(a,b-1) - 1$ vértices e os graus da primeira cor de cada vértice. Como G tem uma quantidade ímpar de vértices, ele tem um vértice v de grau par. Como v está conectado a $M-1$ vértices, que é uma quantidade par de vértices, das duas uma: o grau de v na primeira cor é maior ou igual a $R(a-1,b)$, e usamos o mesmo argumento do problema anterior, ou o grau é menor ou igual a $R(a-1,b)-2$, o que implica o grau na segunda cor ser maior ou igual a $R(a,b-1)$,

o que também nos leva ao argumento do problema anterior. Logo, em particular, $R(4,3) \le R(3,3) + R(4,2) - 1 = 9$.

O exemplo com 8 vértices é o seguinte: arranje-os em um círculo e ligue cada vértice a seus dois vizinhos e ao vértice oposto na segunda cor e as demais arestas na primeira cor.

8. Basta notar que $R(4,4) \le R(4,3) + R(3,4) = 18$. Na verdade, pode-se provar que $R(4,4) = 18$.

9. Conte de duas maneiras, no grafo resultante, a quantidade de pares (uv, vw) de arestas vizinhas com cores diferentes. Isso é igual a $\sum_{v \in V} g(v)(5 - g(v)) \le 6 \cdot 6 = 36$ (usamos o fato de que $x(5-x) \le 6$ para x inteiro). Como cada triângulo não monocromático tem pelo menos dois desses pares, então há no máximo $36/2 = 18$ triângulos não-monocromáticos, e portanto pelo menos $\binom{6}{3} - 18 = 2$ triângulos monocromáticos.

   Observação 2. *Generalizando para n vértices e duas cores, pode-se provar que há pelo menos $\binom{n}{3} - n \cdot \frac{(n-1)^2}{8} = \frac{n(n-1)(n-5)}{24}$ triângulos monocromáticos, aproximadamente $\frac{n(n-1)(n-5)}{24} / \binom{n}{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{n-5}{n-2} \approx \frac{1}{4} = 25\%$ dos triângulos para n grande!*

10. Considere o grafo cujos vértices são $0, 1, 2, \ldots, 1978$ e pinte a aresta ij da cor do país da pessoa $|i-j|$. Como $1979 > \lfloor 6!e \rfloor$, existe um triângulo monocromático, ligando, digamos, os vértices i, j, k. Mas um entre os números $|i-j|$, $|j-k|$, $|k-i|$ é a soma dos outros dois, então o problema acabou.

    Observação 3. *A grande ideia na resolução é fazer com que os membros sejam* arestas *no lugar de vértices.*

11. Repita o argumento acima com $N > R(\underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{k})$.

12. Seja p um primo grande qualquer e seja g uma raiz primitiva de p. Represente os números de 1 a $p-1$ na forma g^i e pinte-os de n cores, de acordo com o resto da divisão de i por n. Pelo lema de Schur, para todo p suficientemente grande existem três números g^a, g^b, g^c da mesma cor tais que $a + b = c$. Então, sendo $a = a_1 n + r$, $b = b_1 n + r$ e $c = c_1 n + r$, $g^a + g^b \equiv g^c \pmod{p} \iff g^{a_1 n + r} + g^{b_1 n + r} \equiv g^{c_1 n + r} \pmod{p} \iff (g^{a_1})^n + (g^{b_1})^n \equiv (g^{c_1})^n \pmod{p}$, de modo que basta escolher $x = g^{a_1}$, $y = g^{b_1}$ e $z = g^{c_1}$.

13. Primeiro, considere cinco pontos quaisquer no plano, e vamos mostrar que existem quatro deles que formam um quadrilátero convexo. Para isso, considere o *fecho convexo* desses cinco pontos, ou seja, o menor conjunto convexo que contém esses cinco pontos (um jeito bacana de visualizar o fecho convexo é imaginar o que acontece quando você solta um elástico em torno dos pontos). Se o fecho convexo desses cinco pontos tem quatro ou mais vértices, já obtemos o resultado; se tiver três pontos, os dois pontos dentro do triângulo determinam uma reta que corta dois lados. Tome esses dois pontos e os vértices do outro lado e temos um quadrilátero convexo.

Agora, vamos considerar uma *generalização* da teoria de Ramsey: em vez de pintar arestas, que são subconjuntos de dois vértices, vamos pintar arestas de subconjuntos de 4 vértices (ou seja, K_4's). No nosso problema, pintaremos um conjunto de quatro vértices de azul se eles formam um quadrilátero convexo e de vermelho, caso contrário. Seja $R_4(m,n)$ a quantidade mínima de vértices de um grafo completo de modo que sempre exista um K_m com todos os subconjuntos de K_4's azuis ou um K_n com todos os subconjuntos de K_4's vermelhos. Se tomarmos $M \geq R_4(n,5)$, o problema acaba: ou existe um conjunto de n pontos em que quaisquer quatro formam um quadrilátero convexo (e portanto um n-ágono convexo) ou existe um conjunto de 5 pontos em que quaisquer quatro não formam um quadrilátero convexo, o que sabemos que não pode ocorrer pelo parágrafo anterior.

Então basta provar que *existe* $R_4(m,n)$. De fato, vamos provar por indução que $R_4(m,n) \leq 1 + R_3(R_4(m-1,n), R_4(m,n-1))$. Considere um grafo G com $1 + R_3(R_4(m-1,n), R_4(m,n-1))$ vértices e separe um vértice v; para cada três dos vértices restantes, considere a cor do triângulo correspondente como a cor do K_4 obtido juntando-se v ao triângulo. Então, conseguimos um grafo completo com $R_4(m-1,n)$ vértices com todo triângulo azul ou um grafo completo com $R_4(m,n-1)$ vértices com todo triângulo vermelho. No primeiro caso, temos ou um K_n com todo K_4 vermelho (e acabou) ou um K_{m-1} com todo K_4 azul; mas aí é só juntar v, já que todo triângulo desses $R_4(m-1,n)$ vértices é azul, e portanto todo K_4 com quaisquer três desses vértices e v é azul. O outro caso é análogo. Agora, falta provar que $R_3(m,n)$ existe. Mas é só provar algo parecido: $R_3(m,n) \leq R(R_3(m-1,n), R_3(m,n-1))$. Deixamos isso (e as bases de indução) para o leitor.

14. Faça uma contagem dupla com as arestas. Como cada uma liga um vértice de uma classe A para outra classe B, cada aresta conta um ponto para o total de arestas saindo de cada classe.

15. Indução sobre n. Se $n = 1$, há três cidades servidas por somente uma linha aérea, e temos um 3-ciclo. Agora suponha que $n > 1$ e suponha que o resultado é verdadeiro para $n-1$. Considere a companhia A_n e suponha que ela não oferece uma viagem com um número ímpar de escalas. Então o grafo com vértices nas cidades e arestas correspondentes às viagens oferecidas por A_n é bipartido, ou seja, as cidades podem ser particionadas em duas classes, sendo que A_n não oferece viagens dentro de cada uma das classes. Uma das classes tem pelo menos $\left\lceil \frac{2^n+1}{2} \right\rceil = 2^{n-1}+1$ cidades, que são servidas por $n-1$ linhas aéreas, e o resultado segue da hipótese de indução.

16. A paridade da quantidade de arestas de cada cor em cada triângulo é invariante (por quê?), então cada triângulo tem uma quantidade par de arestas azuis. Considere um vértice qualquer v. Seja A o conjunto de vértices ligados a v por arestas azuis e B o conjunto dos vértices ligados a v por arestas vermelhas e o vértice v. Então toda aresta vw, $w \in B$, é vermelha, e sendo $w_1, w_2 \in B$, vw_1 e vw_2 serem vermelhas implica w_1w_2 ser vermelha também. Isso quer dizer que toda aresta ligando dois vértices de B é vermelha. Agora considere o triângulo vwu, com $w \in B$ e $u \in A$. Como vu é azul e vw é vermelho, uw é azul, de modo que toda aresta ligando um vértice de A a

um vértice de B é azul; enfim, considerando o triângulo vu_1u_2 com $u_1, u_2 \in A$, temos que vu_1 e vu_2 são ambas azuis, o que implica u_1u_2 vermelhos. Então o grafo induzido pelas arestas azuis é bipartido completo. Com isso, podemos resolver os itens.

(i) Basta tocar todos os vértices de A, por exemplo: todas as arestas azuis são transformadas exatamente uma vez, as arestas de B não são alteradas e as arestas de A são alteradas duas vezes.

(ii) A resposta é $\lfloor n/2 \rfloor$. De fato, um dos conjuntos A ou B, digamos A, tem no máximo $\lfloor n/2 \rfloor$ elementos e procedemos como no item a. Agora, se tocamos x vértices de A e y vértices de B, alteramos no máximo $x \cdot |B| + y \cdot |A|$ arestas azuis ($|B|$ para cada toque em A e $|A|$ para cada toque em B). Como temos que alterar todas as arestas azuis, $x \cdot |B| + y \cdot |A| \geq |A| \cdot |B|$. Supondo, sem perda de generalidade, $|A| \leq |B|$, temos $(x + y) \cdot |B| \geq x \cdot |B| + y \cdot |A| \geq |A| \cdot |B| \implies (x + y) \cdot |B| \geq |A| \cdot |B| \iff x + y \geq |A|$. O total de toques é $x + y$, e pode ocorrer $|A| = \lfloor n/2 \rfloor$, de modo que o valor mínimo, no pior caso, é $\lfloor n/2 \rfloor$.