Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Combinatória – Nível 3

Prof. Carlos Shine

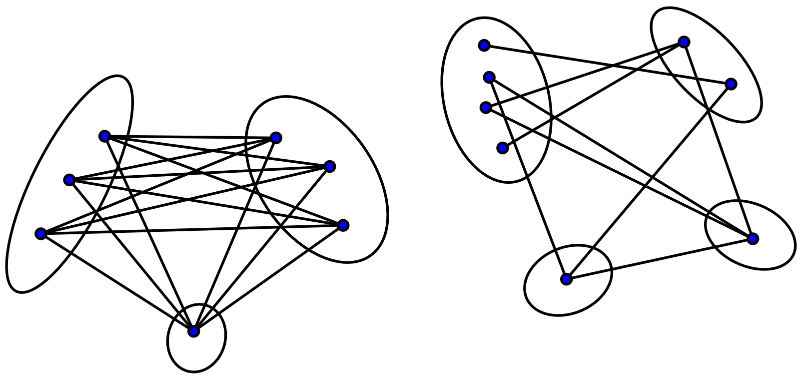
Aula 11

Teoria dos Grafos: Teorema de Turán e Teoria Extremal

Vamos agora trabalhar com *teoria extremal dos grafos*: responderemos a perguntas do tipo: “qual é a maior quantidade de arestas de um grafo que nao contém um certo subgrafo?”

Grafos $(r-1)$-partidos e K_r’s: o Teorema de Turán

Podemos generalizar a noção de grafos bipartidos para mais classes, obtendo assim os *grafos k-partidos*. Novamente, a única regra é que vértices em uma mesma classe não podem estar conectados. Da mesma forma, definimos *grafos k-partidos completos* como grafos em que os vértices são divididos em k classes, e dois vértices são ligados se, e somente se, pertencem a classes distintas. Na figura a seguir, à esquerda temos um grafo 3-partido completo e à direita um grafo 4-partido (mas não completo).



Os grafos $(r-1)$-partidos e grafos completos de r vértices (o K_r) têm uma relação bastante interessante:

Teorema 1 (Teorema de Turán)**.** *Se um grafo com n vértices não contém um K_r como subgrafo, então a sua quantidade de arestas é menor ou igual a*

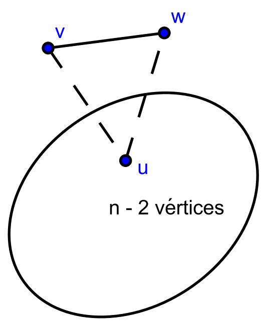
$$\frac{n^2}{2}\left(1-\frac{1}{r-1}\right)$$

O caso de igualdade ocorre se, e somente se, o grafo é $(r-1)$-partido completo com classes de mesmo tamanho.

Demonstração: Indução sobre a quantidade n de vértices. Vamos mostrar o caso particular $r = 3$ primeiro para que as ideias da demonstração fiquem mais claras. Nesse caso, devemos provar que a quantidade máxima de arestas é $n^2/4$ e que a igualdade ocorre quando se tem um grafo bipartido completo com $n/2$ vértices em cada classe.

A base é $n = 1$ e $n = 2$, em que não há o que demonstrar.

Agora considere um grafo com n vértices e suponha que o resultado é verdadeiro para grafos com menos vértices. Lembra-se de como devemos proceder em indução sobre vértices? Escolhemos um vértice, tiramos, aplicamos a hipótese e colocamos o vértice de volta. A grande vantagem desse procedimento é **escolher** o vértice. Mais ainda, podemos tirar **mais** vértices. Nesse caso, tiramos uma aresta uv e seus dois vértices:



Pela hipótese de indução, entre os demais $n - 2$ vértices há no máximo $(n - 2)^2/4$ arestas. Além disso, cada vértice u diferente de v e w pode se conectar a no máximo um dos vértices v e w, de modo que há no máximo $n - 2$ arestas ligando v ou w aos outros $n - 2$ vértices. Além disso, também temos a aresta uv. Desse modo, a quantidade total de arestas é menor ou igual a

$$\frac{(n-2)^2}{4} + n - 2 + 1 = \frac{n^2}{4},$$

como queríamos demonstrar.

O que acontece no caso de igualdade? Deve ocorrer a igualdade para $n - 2$, ou seja, o grafo de $n - 2$ vértices é bipartido completo com $n/2 - 1$ vértices em cada classe e cada vértice u deve se conectar a exatamente um dos vértices v e w. Vejamos quais vértices devem estar conectados com cada um dos vértices v e w. Suponha que u pertence à classe V_1 e está conectado a v. Se um vértice t de V_2 se conectar a v, v, t e u formam um triângulo (note que, da hipótese de indução, como u e t estão em classes diferentes eles estão conectados). Assim, todos os vértices de V_2 estão conectados a w. Analogamente, todos os vértices de V_1 estão conectados a v. Assim o grafo é bipartido completo e, como cada um dos vértices v e w entrou em uma classe, as quantidades de vértices em cada classe continuam iguais.

Note que, como no passo indutivo aplicamos a hipótese de indução para $n - 2$ vértices, precisamos de uma base de indução maior, começando com dois casos pequenos.

O caso geral não é muito diferente: apesar de isso não ser usual quando escrevemos soluções, começaremos com o passo indutivo. Depois veremos qual tamanho a base de indução deve ter.

Vamos entender um pouco melhor o que fizemos no caso $r = 3$. A ideia que parece ser a mais decisiva é, na hora de aplicar a indução, **escolher** uma aresta, para notar que cada um dos vértices restantes não pode se ligar aos dois extremos da aresta. Como generalizar essa ideia?

A resposta é a seguinte: a aresta é, na verdade, um K_2, e nenhum vértice pode estar conectado a todos os vértices do K_2, porque caso contrário um K_3 se formaria.

Com isso, podemos generalizar: considere um K_{r-1} (caso não exista, acrescente arestas até obter um K_{r-1} – note que só é possível formar um K_r se antes formarmos um K_{r-1}) e aplique a hipótese de indução para os $n - (r - 1)$ vértices restantes. Assim, há uma quantidade menor ou igual a $\frac{(n-r+1)^2}{2}\left(1 - \frac{1}{r-1}\right)$ de arestas. Cada um desses vértices restantes pode estar conectado a no máximo $r - 2$ vértices do K_{r-1} (se estiver ligado a todos, forma-se um K_r), originando no máximo mais $(n-r+1)(r-2)$ arestas. Adicionando-se a esse total os $\binom{r-1}{2} = \frac{(r-1)(r-2)}{2}$ arestas, temos que o total de arestas do grafo é no máximo

$$\frac{(n-r+1)^2}{2}\left(1 - \frac{1}{r-1}\right) + (n-r+1)(r-2) + \frac{(r-1)(r-2)}{2} = \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{r-1}\right)$$

arestas.

Agora, voltemos à base de indução: como retiramos $r - 1$ vértices do grafo, precisamos resolver o problema para $n \le r - 1$. Mas esses casos são óbvios: basta considerar K_n, pois $n < r$.

O caso de igualdade fica a cargo do leitor. $\square$

Em seguida provaremos diretamente que o caso em que há mais arestas sem K_r é exatamente o de um grafo $(r-1)$-partido completo com classes o mais igualmente distribuídas (isto é, as quantidades de vértices em classes é no máximo 1).

Outra demonstração: Sim, mais uma demonstração! Antes de começarmos a demonstração, vamos definir o conceito de *relação de equivalência em A*, em que A é um conjunto. Uma relação de equivalência $\sim$ em A é uma relação que tem as seguintes propriedades:

- (*reflexiva*) para todo $a \in A$, $a \sim a$;
- (*simétrica*) para todos $a, b \in A$, $a \sim b \iff b \sim a$;
- (*transitiva*) para todos $a, b, c \in A$, se $a \sim b$ e $b \sim c$ então $a \sim c$.

Exemplos de relação de equivalência são igualdade, congruência módulo m, paralelismo de retas, semelhança de triângulos, entre muitos outros.

As relações de equivalência partilham propriedades com a própria relação de igualdade. Por causa disso, dois elementos relacionados por uma relação de equivalência são, de certa forma, semelhantes no que se refere ao que a relação quer diferenciar. Uma das consequências dessa estrutura é a seguinte propriedade muito importante das relações de equivalência: elas dividem os elementos de A nas chamadas *classes de equivalência*, em que quaisquer dois elementos da mesma classe de equivalência estão relacionados e elementos de classes de equivalências diferentes não estão relacionados (pense um pouco para ver por que isso acontece). Por exemplo, todos os triângulos equiláteros formam uma das classes de equivalências da semelhança de triângulos.

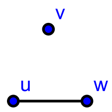
Considere um grafo G sem K_r's com quantidade máxima de arestas e a relação $\sim$ no conjunto dos vértices definida por

$$u \sim v \iff uv \notin A,$$

ou seja, dois vértices estão relacionados se, e somente se, não há aresta os ligando.

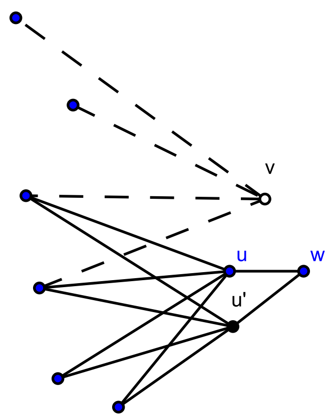
Note que $\sim$ é reflexiva (afinal, nenhum vértice se liga a si mesmo) e simétrica (já que arestas são simétricas). Veremos que o fato de G ter quantidade máxima de arestas implica $\sim$ ser transitiva.

Suponha que $\sim$ não é transitiva. Então existem vértices u, v, w tais que $u \sim v$, $v \sim w$ e $u \not\sim w$, ou seja, entre os vértices u, v, w só há a aresta uw:



Dividimos o problema em dois casos:

(1) $g(v) < g(u)$ ou $g(v) < g(w)$. Suponha, sem perda de generalidade, que $g(v) < g(u)$. Substitua v por uma cópia de u (um vértice u' que está ligado a todos os vizinhos de u, e que não está ligado a u):

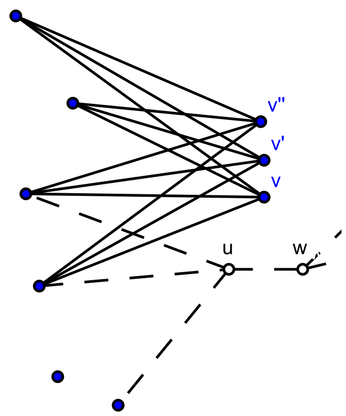


Note que não formamos K_r nesse processo (verifique!) e a nova quantidade de arestas é

$$A - g(v) + g(u) > A$$

o que contradiz a maximalidade de G.

(2) $g(v) \geq g(u)$ e $g(v) \geq g(w)$. Substitua u e w por duas cópias v' e v'' de v:



Note que não formamos K_r nesse processo (verifique!) e a nova quantidade de arestas (veja que ao subtrair $g(u)$ e $g(w)$ estamos excluindo uw duas vezes, por isso somamos 1 de volta) é

$$A - g(u) - g(w) + 1 + 2g(v) > A$$

o que novamente contradiz a maximalidade de G.

Assim, $\sim$ é transitiva e portanto é de equivalência. Como são as classes de equivalência de $\sim$? Elas são grupos de vértices tais que vértices de um mesmo grupo não estão ligados e vértices de grupos diferentes estão ligados, ou seja, um grafo m-partido completo. Como não podemos formar K_r's, $m \le r - 1$. Supondo que há grupos vazios, podemos supor que há exatamente $r - 1$ classes $V_1, V_2, \dots, V_{r-1}$ no grafo com $n_1, n_2, \dots, n_{r-1}$ vértices respectivamente. Agora, suponha que as quantidades de vértices não são o mais igualmente distribuídas possível, ou seja, que $n_1 \ge n_2 + 2$. Passando um vértice de V_1 para V_2, a quantidade de arestas aumenta em $(n_1 - 1)(n_2 + 1) - n_1 n_2 = n_1 - n_2 - 1 > 0$, o que novamente contradiz a maximalidade de G. Isso conclui a demonstração. $\square$

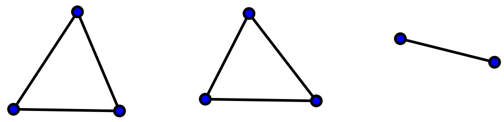
Mas o mais interessante é a gama de aplicações que o teorema de Turán tem.

Exemplo 1. *(OBM) Temos quatro baterias carregadas, quatro baterias descarregadas e um rádio que necessita de duas baterias carregadas para funcionar.*

Supondo que não sabemos quais baterias estão carregadas e quais estão descarregadas, quantas tentativas são necessárias para conseguirmos fazer com que o rádio funcione? Uma tentativa consiste em colocar duas das baterias no rádio e verificar se, então, funciona.

Solução: Considere o grafo em que os vértices são as baterias e ligamos dois vértices se **não** testamos as baterias. Note que queremos agora maximizar a quantidade de arestas desse grafo. O que significa um grafo completo nesse problema? Significa que não testamos nenhum par de baterias entre as correspondentes aos vértices. Assim, o grafo não pode conter K_4, pois corremos o risco de os vértices do K_4 serem exatamente as baterias carregadas, e o rádio não vai funcionar.

Desta forma, queremos maximizar a quantidade de arestas de um grafo que não contém K_4. Isso é um trabalho para o teorema de Turán! O grafo que tem a maior quantidade de arestas é um 3-partido completo com classes o mais igualmente distribuídas, ou seja, com $3, 3, 2$ vértices. Tomando o grafo "negativo" (ligando pares de vértices não ligados originalmente e desligando pares de vértices ligados originalmente), obtemos $3 + 3 + 1 = 7$ arestas:



Embora seja imediato do teorema de Turán que o grafo original não contém K_4's e, portanto, duas das baterias carregadas serão testadas, fazendo o rádio funcionar, pode-se provar que essas sete tentativas funcionam com casa dos pombos: de fato, como temos três grupos e quatro baterias carregadas, há duas baterias carregadas no mesmo grupo, de modo que, em algum momento, testaremos duas baterias carregadas. Todavia, esse argumento não mostra, como o teorema de Turán, que menos tentativas não são suficientes.

Alguns outros exemplos com grafos: grau médio

No que se segue, um *subgrafo* H de um grafo G é um grafo cujos vértices estão contidos em $V(G)$ e cujas arestas estão contidas em $A(G)$ (ou seja, vértices de H são vértices de G e arestas de H são arestas de G).

Exemplo 2. *Prove que todo grafo G com grau médio pelo menos d contém um subgrafo H com todos os vértices com grau maior ou igual a $d/2$.*

Solução: A soma dos graus de G é pelo menos $n \cdot d$, então G tem pelo menos $nd/2$ arestas. Se todos os vértices têm grau maior ou igual a $d/2$, tome $H = G$. Caso contrário, tome um vértice de grau menor que $d/2$ e retire-o de G. Isso tira menos de $d/2$ arestas, então o grafo resultante continua tendo grau médio de pelo menos d. Continue esse procedimento, e em algum momento o grau médio fica maior do que $d/2$, pois se o procedimento continuasse até o final, chegaria a um único vértice, e nesse caso o grau médio é $0 < d/2$, o que é uma contradição.

Exemplo 3. *Seja H uma árvore com t arestas. Prove que todo grafo com grau médio maior ou igual a $2t$ contém H como subgrafo.*

Solução: Aplique o resultado do exemplo anterior e seja G o subgrafo de grau mínimo maior ou igual a t obtido. São muitas arestas, e aí dá para construir H: primeiro, tome um vértice qualquer, e a cada passo, escolhemos uma folha nova: se já escolhemos m vértices, e $m < t + 1$ (se $m = t + 1$ acabamos!) tome o vértice v vizinho à folha nova: há pelo menos $t - (m - 1) > 0$ possibilidades, ou seja, é possível escolher a folha nova. Faça isso até completar o grafo H.

Teoria Extremal dos Grafos: Grafos sem $K_{p,q}$

O problema típico da *teoria extremal dos grafos* é "qual é a maior quantidade de arestas que um grafo G de n vértices pode ser sem ter um subgrafo H?". A essa quantidade damos a notação $\text{ex}(n, H)$. O teorema de Turán, por exemplo, diz que $\text{ex}(n, K_r) \le \frac{(r-1)^2}{2}\left(1 - \frac{1}{r-1}\right)$ e que a igauldade pode ocorrer (de fato, já vimos também quais são os grafos que dão a igualdade).

Um *grafo bipartido completo* $K_{p,q}$ é um grafo bipartido com p vértices em uma classe e q vértices em outra, de modo que todo par de vértices de classes diferentes são conectados. Quantas arestas podemos ter em um grafo sem $K_{p,q}$? Ou seja, quanto é $\text{ex}(n, K_{p,q})$?

Antes de enunciarmos o teorema, precisamos de umas estimativas.

Lema 1. *Seja p inteiro positivo. Considere a função*

$$\binom{x}{p} = \begin{cases} \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-p+1)}{p!}, & \textit{se } x \ge p-1 \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Então:

(i) $\binom{x}{p}$ *é convexa.*

(ii) $\frac{(n-p+1)^p}{p!} \le \binom{n}{p} \le \frac{n^p}{p!}$.

Demonstração:

(i) Fazendo a substituição $x = y + p - 1$, para $y \ge 0$ temos que $\binom{x}{p} = \frac{y(y+1)(y+2)\ldots(y+p-1)}{p!}$ é um polinômio cujos coeficientes são todos não-negativos. Derivando duas vezes, os coeficientes continuam não negativos, e no trecho $y \ge 0 \iff x \ge p-1$ a função $\binom{x}{p}$ é convexa. Sejam $y < p-1 \le x$. Como $\binom{x}{p} + \binom{y}{p} = \binom{x}{p} + \binom{p-1}{p} \ge \binom{\frac{x+p-1}{2}}{p} \ge \binom{\frac{x+y}{2}}{p}$, $\binom{x}{p}$ é convexa em $\mathbb{R}$.

(ii) Basta trocar todos os fatores do produto $n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$ pelo menor fator $n-p+1$ para obter o lado esquerdo e pelo maior fator n para obter o lado direito.

Agora podemos partir para o teorema.

Teorema 2 (Teorema de Kővári-Sós-Turán)**.** *Sejam $2 \le p \le q$ inteiros fixados. Se um grafo tem pelo menos $\frac{1}{2}\sqrt[p]{q-1}\,n^{2-1/p} + \frac{1}{2}pn$, então tem um subgrafo $K_{p,q}$. Ou seja,*

$$\text{ex}(n, K_{p,q}) \le \frac{1}{2}\sqrt[p]{q-1}\,n^{2-1/p} + \frac{1}{2}pn.$$

Demonstração: Conte de duas maneiras o número N de subgrafos $K_{p,1}$, que nada mais é do que um vértice central ligado a outros p.

- Por grupo de p vértices: nenhum grupo pode estar ligado a q vértices, logo

$$N \le (q-1)\binom{n}{p}.$$

- Por vértice central v: basta escolher p entre os $g(v)$ vizinhos de v, ou seja,

$$N = \sum_{v \in V} \binom{g(v)}{p}.$$

Agora, pelo lema acima, e pela desigualdade de Jensen,

$$N = \sum_{v \in V} \binom{g(v)}{p} \ge n \binom{\frac{1}{n}\sum_{v \in V} g(v)}{p} = n \binom{2|A|/n}{p} \ge \frac{n}{p!} \left(\frac{2|A|}{n} - p \right)^p$$

e, como $(q-1)\binom{n}{p} \le (q-1)\frac{n^p}{p!}$,

$$\frac{n}{p!} \left(\frac{2|A|}{n} - p \right)^p \le (q-1)\frac{n^p}{p!} \iff |A| \le \frac{1}{2}\sqrt[p]{q-1}\, n^{2-1/p} + \frac{1}{2}np.$$

□

Problemas

1. Complete a demonstração por indução, mostrando que a igualdade ocorre somente para grafos $(r-1)$-partidos completos com classes com a mesma quantidade de vértices.

2. Prove as afirmações a seguir:

   (a) Dados 1993 pontos e 992015 arestas ligando pares destes pontos, existem três pontos A, B, C tais que A não está ligado a B, nem A a C, nem B a C.

   (b) Dados 1993 pontos e 993013 arestas ligando pares destes pontos (nunca há duas arestas ligando o mesmo par de pontos), existem três pontos A, B, C, tais que A está ligado a B, A está ligado a C e B está ligado a C.

3. Suponha que um conjunto M contenha $3n$ pontos do plano e que a máxima distância entre os pontos é igual a 1. Mostre que no máximo $3n^2$ das distâncias entre os pontos são maiores do que $\sqrt{2}/2$.

4. Dados $2n$ pontos no plano, de tal forma que não existam 3 colineares, mostre que o número máximo de segmentos que podem ser construídos com extremidades nestes pontos sem que apareçam triângulos é n^2.

5. São dados 21 pontos sobre uma circunferência. Prove que pelo menos 100 dentre os arcos determinados por estes pontos subtendem ângulos centrais menores ou iguais a $120°$.

6. (IMO) Considere nove pontos no espaço tais que nunca há quatro desses pontos que fiquem no mesmo plano. Cada par de pontos é ligado por uma aresta (isto é, um segmento de reta) e cada aresta é colorida de azul, vermelho ou é deixada não colorida. Encontre o menor valor de n tal que sempre que se pintam exatamente n arestas o conjunto das arestas coloridas necessariamente contém um triângulo cujas arestas têm todas a mesma cor.

7. (Mongólia) Seja G um grafo que não tem K_4 como subgrafo e com $3k$ vértices. No máximo quantos triângulos G tem?

8. (Japão) Seja G um grafo com 9 vértices. Sabe-se que, para quaisquer cinco vértices de G, existem pelo menos duas arestas com extremidades nesses vértices. Qual é a menor quantidade de arestas em G?

Bibliografia

1. B. Bollobás, *Graph Theory: An Introductory Course.*

2. R. Diestel, *Graph Theory.* Springer 2003.

3. M. Aigner, G. M. Ziegler, *Proofs from The Book.* Segunda edição, 2000.

4. Po-Shen Loh, *Extremal Graph Theory*, disponível em

   http://www.math.cmu.edu/ ploh/docs/math/mop2009/graph-theory-extremal.pdf

5. T. Andreescu e Z. Feng, *102 Combinatorial Problems, From the training of the USA IMO team*, Birkhäuser 2003.

Respostas, Dicas e Soluções

1. Indução em n de novo. O resultado é verdadeiro para grafos com $r-1$ vértices, pois $\frac{(r-1)^2}{2}\left(1-\frac{1}{r-1}\right) = \frac{(r-1)(r-2)}{2}$ e temos o K_{r-1}, que é um grafo $(r-1)$-partido completo com um vértice em cada classe. Considere agora um grafo com n vértices e quantidade máxima de arestas sem K_r e considere um K_{r-1} contido nele (se não houver, dá para colocar mais arestas nele!). Retire o K_{r-1} e aplique a hipótese de indução: o grafo obtido ainda tem que ser máximo, senão ao colocar o K_{r-1} de volta a gente teria mais arestas e não formaria K_r. Ou seja, ele é um grafo $(r-1)$-partido completo com a mesma quantidade de vértices k em cada classe. Agora, pelo mesmo raciocínio da demonstração de Turán, para ocorrer a igualdade cada vértice w está conectado a $r-2$ vértices do K_{r-1} separado. Nisso, colocamos mais $(r-2)\cdot k(r-1)$ arestas, de modo que colocamos, em média, $k(r-2)$ arestas para cada vértice do K_{r-1}. Suponha que algum dos vértices u do K_{r-1} ficou com mais de $k(r-2)$ arestas. Como são $r-1$ classes com k vértices, esse vértice está conectado a pelo menos um vértice v_i de cada classe. Mas aí $v_1, v_2, \ldots, v_{r-1}, u$ formam um K_r, absurdo. Logo cada vértice do K_{r-1} está conectado com exatamente $k(r-2)$ vértices, todos os vértices de $r-2$ classes. Com isso, podemos colocar cada vértice do K_{r-1} na classe que não está conectada a ele. Falta só provar que dois vértices u_1, u_2 não vão para a mesma classe. Mas isso quer dizer que tanto u_1 como u_2 estão conectados com as outas $r-2$ classes, e basta escolher u_1, u_2 e um representante de cada classe para formar um K_r. Então a demonstração está completa.

2. Para o item a, considere o grafo complementar ao descrito no enunciado: ligamos dois vértices se *não* o ligamos no grafo original (nesse caso, o grafo original tem no mínimo $\binom{1993}{2} - 997\cdot 996 = 992016$ arestas). O item b é uma aplicação direta de Turán (nesse caso, o grafo tem no máximo $997\cdot 996 = 993012$ arestas).

3. Primeiro mostre que não é possível que haja quatro pontos com distância máxima 1 com todas as distâncias maiores do que $\sqrt{2}/2$: de fato, qualquer triângulo ABC formado por três desses quatro pontos é acutângulo, pois $AB^2 + BC^2 - AC^2 > (\sqrt{2}/2)^2 + (\sqrt{2}/2)^2 - 1^2 = 0$ e vale o mesmo para os outros vértices. Mas entre quatro pontos sempre aparece um ângulo maior ou igual a $90°$: se o fecho convexo deles é um triângulo ABC, ao tomarmos um ponto P no interior dele, um dos ângulos $\angle APB$, $\angle BPC$, $\angle CPA$ é pelo menos $120°$; se o fecho convexo é um quadrilátero, um dos ângulos internos é maior ou igual a $90°$. Depois aplique Turán ao grafo cujos vértices são os pontos e ligamos dois pontos se a distância for maior do que $\sqrt{2}/2$.

4. Aplique o teorema de Turán para o grafo em que os vértices são os pontos e as arestas são os segmentos.

5. Considere o grafo em que os vértices são os pontos e ligamos dois pontos se o arco formado é *maior* do que $120°$. Não é possível ter um triângulo, logo há no máximo $11 \cdot 10 = 110$ arestas e, portanto, no mínimo $\binom{21}{2} - 110 = 110$ arcos de ângulos centrais menores ou iguais a $120°$.

6. Considere o grafo 5-partido completo com $2, 2, 2, 2, 1$ vértices nas classes. Nesse caso, há 4 pares de vértices não ligados, e portanto, um total de $\binom{9}{2} - 4 = 32$ arestas. Numere as classes de 1 a 5 e pinte as arestas ligando i a $i + 1$ (módulo 5) de azul e as arestas ligando i a $i+2$ (módulo 5) de vermelho. Assim, não se forma triângulo monocromático. Se houver mais arestas, pelo teorema de Turán há um K_6 e, pelo teorema de Ramsey, ao pintarmos o K_6 de duas cores aparece um triângulo monocromático (na verdade, como já vimos, aparecem pelo menos 2).

7. Seja $t(v)$ a quantidade de triângulos que contêm a aresta a. Então, para todo triângulo abc, $t(a)+t(b)+t(c) \le 3k$. Caso contrário, por casa dos pombos, dois vértices teriam um triângulo em comum, e isso formaria um K_4. Sendo T a quantidade de triângulos, somando sobre o conjunto $\mathcal{T}$ dos triângulos obtemos $\sum_{abc\in\mathcal{T}} t(a)+t(b)+t(c) \le T \cdot 3k$. Agora, a parcela $t(a)$ aparece para cada triângulo que contém a, ou seja, aparece $t(a)$ vezes. Logo $\sum_{abc\in\mathcal{T}} t(a) + t(b) + t(c) = \sum_{a\in A} t(a)^2 \ge \frac{1}{|A|} \left(\sum_{a\in A} t(a)\right)^2 = \frac{9T^2}{|A|}$, pois na soma $\sum_{a\in A} t(a)$ cada triângulo contribui com três arestas (basicamente, é uma contagem dupla entre triângulos e essa soma). Mas por Turán $|A| \le 3k^2$ (verifique!), então $T \cdot 3k \ge \frac{9T^2}{3k^2} \iff T \le 3k^2$. O exemplo é o mesmo da igualdade de Turán: considere o grafo 3-partido completo com k vértices em cada classe.

8. Seja a_n a menor quantidade de arestas em um grafo com n vértices com a propriedade. Encontremos uma recursão para a_n. Considere um grafo com $n+1$ vértices. Tiramos um vértice v e obtemos um grafo com a propriedade, logo $|A| - g(v) \ge a_n$. Somando sobre todos os vértices obtemos $(n + 1)|A| - \sum_{v\in V} g(v) \ge (n + 1)a_n \iff |A| \ge \frac{n+1}{n-1} a_n$. Logo, sendo $a_5 = 2$, $a_6 \ge \frac{5+1}{5-1} \cdot 2 = 3$, $a_7 \ge \frac{6+1}{6-1} \cdot 3 = \frac{21}{5} \implies a_7 \ge 5$, $a_8 \ge \frac{7+1}{7-1} \cdot 5 = \frac{20}{3} \implies a_8 \ge 7$ e $a_9 \ge \frac{8+1}{8-1} \cdot 7 = 9$. Assim, o grafo tem pelo menos 9 vértices. Mas existe um exemplo: tome três triângulos disjuntos.

Observação 1. *Note que isso prova não somente que* $a_9 = 9$*, mas que* $a_8 = 7$ *(se* $a_8 > 7$ *então* $a_9 > 9$*),* $a_7 = 5$ *(se* $a_7 \geq 6$ *então* $a_8 \geq \frac{7+1}{7-1} \cdot 6 = 8$*), e* $a_6 = 3$*. Você pode encontrar exemplos para esses casos? E quanto ao caso geral?*