Funções Geratrizes

A principal ideia das funções geratrizes é aliar Álgebra e Combinatória, para unidos combaterem o crime de problemas ficarem sem serem resolvidos. Vejamos como fazer isso.

Um exemplo inicial

Vamos começar relembrando o *binômio de Newton*: para n inteiro positivo e x, y reais,

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n = \sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

Se usarmos a definição estendida $\binom{n}{k} = 0$ para $k > n$, podemos simplificar um pouco a fórmula, eliminando o limite superior do somatório:

$$(x+y)^n = \sum_{k\ge 0}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

O que o binômio de Newton e Combinatória têm a ver? Ambos contêm binomiais!

Exemplo 1. *Esmeralda está no ponto* $(0,0)$ *do plano cartesiano e Jade está no ponto* $(3,5)$ *do plano cartesiano. A cada segundo, Esmeralda vai para o ponto de coordenadas inteiras imediatamente à direita ou acima de onde estava, com a mesma probabilidade para os dois pontos; Jade faz o mesmo, mas indo para baixo ou para a esquerda. Qual é a probabilidade de as duas se encontrarem?*

Solução: A distâncias entre as duas, em passos, é $3+5=8$. Elas só podem ser encontrar após cada uma dar 4 passos, ou seja, elas se encontram em $(0,4)$, $(1,3)$, $(2,2)$, $(3,1)$ ou $(4,0)$. Há $\binom{m+n}{m}$ maneiras de se chegar ao ponto (m,n) de $(0,0)$ e $\binom{3-m+5-n}{3-m}$ maneiras de se chegar ao ponto (m,n) de $(3,5)$. Assim, como há $(2^4)^2 = 2^8$ caminhos possíveis, a probabilidade pedida é

$$\frac{1}{2^8}\sum_{n\ge 0}\binom{4}{n}\cdot\binom{4}{5-n} = \frac{1}{2^8}\sum_{n\ge 0}\binom{4}{n}\cdot\binom{4}{n-1}$$

Poderíamos calcular a soma abrindo os binomiais, mas o que aconteceria se Jade estivesse no ponto $(999, 1001)$? (além da resposta típica "elas não vão se encontrar porque vão se cansar no meio do caminho"). Vamos generalizar essa conta: calculemos

$$\sum_{n\geq 0}\binom{c}{n}\cdot\binom{c}{n-1}$$

Esses binomiais aparecem no binômio de Newton $(1+x)^c$. O que acontece se multiplicarmos $(1+x)^c$ por ele mesmo? Obtemos

$$\begin{aligned}(1+x)^{2c} = (1+x)^c\cdot(1+x)^c \iff \sum_{n\geq 0}\binom{2c}{n}x^n &= \sum_{k\geq 0}\binom{c}{k}x^k\cdot\sum_{\ell\geq 0}\binom{c}{\ell}x^\ell \\ \iff \sum_{n\geq 0}\binom{2c}{n}x^n &= \sum_{k,\ell\geq 0}\binom{c}{k}\cdot\binom{c}{\ell}x^{k+\ell}\end{aligned}$$

Comaparando os coeficientes em x^m, temos

$$\binom{2c}{m} = \sum_{k\geq 0}\binom{c}{k}\cdot\binom{c}{m-k} = \sum_{k\geq 0}\binom{c}{k}\cdot\binom{c}{c-m+k}$$

Fazendo $k = n$ e $c - m + k = n - 1 \iff m = c - 1$, temos

$$\binom{2c}{c-1} = \sum_{n\geq 0}\binom{c}{n}\cdot\binom{c}{n-1}$$

e portanto o resultado é

$$\frac{1}{2^8}\binom{8}{3} = \frac{7}{32}.$$

Essas operações nos mostram o quanto as operações algébricas podem ser úteis em problemas de combinatória.

Observação 1. *Com um pouco (mas nem tanto!) trabalho, é possível demonstrar que*

$$\sum_{0\leq k\leq p}\binom{m}{k}\cdot\binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}$$

Séries formais

Dada uma sequência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, que pode ser finita ou infinita, definimos a *série formal*

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{n\geq 0}a_nx^n$$

Com isso, podemos fazer *operações* com funções geratrizes e sequências. Por exemplo, para obter a soma de duas sequências $(a_0, a_1, \ldots)$ e $(b_0, b_1, \ldots)$, basta fazer $A(x) + B(x)$:

$$A(x) + B(x) = a_0 + b_0 + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \cdots = \sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)x^n$$

Além disso, para multiplicar todos os valores de uma sequência por uma constante k, basta multiplicar sua função geratriz por k:

$$kA(x) = ka_0 + ka_1x + ka_2x^2 + \cdots = \sum_{n\geq 0} ka_nx^n$$

Algumas séries formais conhecidas

Assim como você precisa saber as formulinhas de contagem como permutações, combinações e anagramas, é importante saber algumas séries para poder usá-las. Vamos lá!

Sequência	Série formal	Fórmula fechada
$(1, 1, 1, 1, \ldots)$	$\sum_{n\geq 0} x^n$	$\frac{1}{1-x}$
$(1, -1, 1, -1, \ldots)$	$\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$	$\frac{1}{1+x}$
$(1, 0, 1, 0, \ldots)$	$\sum_{n\geq 0} x^{2n}$	$\frac{1}{1-x^2}$
$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } k \mid n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\sum_{n\geq 0} x^{kn}$	$\frac{1}{1-x^k}$
$(1, 2, 3, 4, \ldots)$	$\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n$	$\frac{1}{(1-x)^2}$
$(1, c, \binom{c}{2}, \binom{c}{3}, \ldots)$	$\sum_{n\geq 0} \binom{c}{n} x^n$	$(1+x)^c$
$(1, c, \binom{c+1}{2}, \binom{c+2}{3}, \ldots)$	$\sum_{n\geq 0} \binom{c+n-1}{n} x^n$	$\frac{1}{(1-x)^c}$
$(1, c, c^2, c^3, \ldots)$	$\sum_{n\geq 0} c^n x^n$	$\frac{1}{1-cx}$
$(1, \binom{m+1}{m}, \binom{m+2}{m}, \binom{m+3}{m}, \ldots)$	$\sum_{n\geq 0} \binom{m+n}{m} x^n$	$\frac{1}{(1-x)^{m+1}}$
$(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$	$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$	$\ln \frac{1}{1-x}$
$(0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$	$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$	$\ln(1+x)$
$(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots)$	$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!}$	e^x

Algumas das séries são conhecidas do ensino médio: por exemplo, a boa e velha fórmula da soma da série geométrica:

$$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

e o bom e velho binômio de Newton:

$$\binom{c}{0} + \binom{c}{1}x + \binom{c}{2} + \cdots + \binom{c}{c}x^c = (1+x)^c$$

A maior parte da tabela acima pode ser deduzida a partir desses dois fatos (com exceção das entradas que envolvem logaritmos e exponenciais, que vamos usar sem demonstrar). As que faltam vão ser demonstradas posteriormente.

Usando séries formais para resolver recorrências

Usando o repertório acima, vamos resolver algumas recorrências. Para isso, usamos os seguitnes quatro passos:

1. Obtemos uma equação de recorrência.

2. Multiplicamos cada lado da equação por x^n e somamos sobre todo n. De um lado aparece a função geratriz que queremos calcular; do lado direito manipulamos até obter algo em função dessa função geratriz.

3. Resolvemos a equação, ou seja, encontramos a função geratriz na forma fechada.

4. Expandimos a função geratriz e obtemos o termo geral.

Exemplo 2. *Seja $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 2$. Encontre uma fórmula fechada F_n.*

Solução: Sim, a sequência de Fibonacci voltou! Vamos executar os passos.

O passo 1 já está OK (fazemos $F_{-1} = 1$ e $F_{-2} = -1$ para a recursão valer para $n = 1$ e $n = 0$ também). Vamos aos passos 2 e 3:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 0} F_n x^n = \sum_{n\geq 0} F_{n-1}x^n + \sum_{n\geq 0} F_{n-2}x^n \\
\iff &F(x) = F_{-1} + x\sum_{n\geq 1} F_{n-1}x^{n-1} + F_{-2} + F_{-1}x + x^2 \sum_{n\geq 2} F_{n-2}x^{n-2} \\
\iff &F(x) = 1 + xF(x) - 1 + x + x^2F(x) \\
\iff &F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}
\end{aligned}$$

Agora, vamos ao passo 4. A ideia é a seguinte: vamos escrever $F(x)$ como soma de *frações parciais*, ou seja, encontremos constantes a e b tais que

$$F(x) = \frac{a}{1 - xr_1} + \frac{b}{1 - xr_2}$$

sendo r_1, r_2 os inversos das raízes de $1 - x - x^2 = 0$, que são as raízes de $x^2 - x - 1 = 0$ (basta inverter a ordem dos coeficientes!). Sabemos que tais raízes são $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Desenvolvendo (e observando que $(1 - xr_1)(1 - xr_2) = 1 - x - x^2$, temos

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{a + b - x(ar_2 + br_1)}{1 - x - x^2}$$

Agora basta resolver o sistema

$$\left|\begin{array}{c} a + b = 0 \\ a\varphi + b\phi = -1 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} a = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ b = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right.$$

Desta forma

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1 - x\phi} - \frac{1}{1 - x\varphi}\right)$$

e podemos desenvolver usando o nosso repertório:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-x\phi} - \frac{1}{1-x\varphi}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n\ge 0}\phi^n x^n - \sum_{n\ge 0}\varphi^n x^n\right) = \sum_{n\ge 0}\frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \varphi^n)x^n$$

e, comparando coeficientes, concluímos que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \varphi^n)$$

Funções geratrizes também funcionam bem com recorrências que não são homogêneas.

Exemplo 3. *Resolva a recorrência* $a_0 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + n$.

Solução: O passo 1 já está feito. Vamos aos passos 2 e 3 (fazendo a_{-1} tal que $a_0 = 2a_{-1} + 0 \iff a_{-1} = 1/2$):

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\ge 0} a_n x^n = 2\sum_{n\ge 0} a_{n-1}x^n + \sum_{n\ge 0} nx^n\\
\iff& A(x) = 2a_{-1} + 2x\sum_{n\ge 1} a_{n-1}x^{n-1} + \sum_{n\ge 0}(n+1)x^n - \sum_{n\ge 0} x^n\\
\iff& A(x) = 1 + 2xA(x) + \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}\\
\iff& A(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{x}{(1-x)^2(1-2x)}
\end{aligned}$$

Vamos expandir $\frac{x}{(1-x)^2(1-2x)}$ em frações parciais. Ou seja, encontremos constantes a, b, c tais que

$$\frac{x}{(1-x)^2(1-2x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-2x}$$

Poderíamos fazer como no exemplo anterior e expandir o segundo membro da equação anterior. Mas, para variar um pouco (e mostrar um modo diferente de resolver o problema), vamos expandir um pouquinho só e depois atribuir valores a x. Multiplicando ambos os membros por $(1-x)^2(1-2x)$, obtemos

$$x = a(1-x)(1-2x) + b(1-2x) + c(1-x)^2$$

Apesar de a primeira equação não nos permitir substituir x por 0 e $1/2$, na segunda equação podemos fazer isso, já que a identidade é polinomial. Fazendo $x = 1$ e $x = 1/2$, obtemos $1 = b(1 - 2\cdot 1) \iff b = -1$ e $1/2 = c(1-1/2)^2 \iff c = 2$. Para achar a, fazemos $x = 0$: $0 = a + b + c \iff 0 = a + (-1) + 2 \iff a = -1$.

Logo

$$A(x) = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-2x} = \frac{3}{1-2x} - \frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2}$$

Utilizando nosso repertório, temos

$$A(x) = 3\sum_{n\geq 0} 2^n x^n - \sum_{n\geq 0} x^n - \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n = \sum_{n\geq 0}(3\cdot 2^n - n - 2)x^n$$

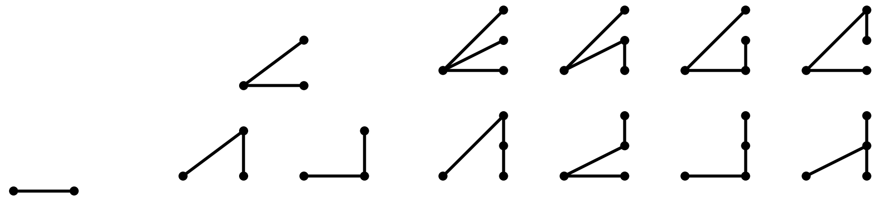
e, comparando coeficientes, obtemos $a_n = 3\cdot 2^n - n - 2$.

Vale a pena conferir alguns valores iniciais: $a_0 = 3\cdot 2^0 - 0 - 2 = 1$ confere. Usando a recursão temos $a_1 = 2a_0 + 1 = 3$ e a nossa fórmula diz que $a_1 = 3\cdot 2^1 - 1 - 2 = 3$; estamos bem. Para garantir, confiramos a_2: $a_2 = 2a_1 + 2 = 8$ e $3\cdot 2^2 - 2 - 2 = 8$. Parece que tudo bem!

Vamos a um exemplo completo, incluindo a parte combinatória.

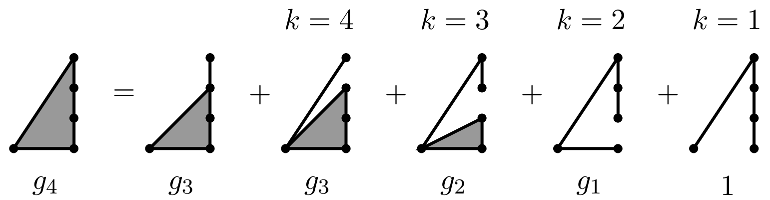
Exemplo 4. *Um grafo G tem como vértices os números $0, 1, 2, \ldots, n$. As arestas do grafo são obtidas ligando 0 a cada um dos outros vértices e ligando $k-1$ a k, $k = 2, 3, \ldots, n$. Quantas são as* árvores geradoras *desse grafo, ou seja, quantas árvores têm como vértices os $n+1$ vértices de G e como arestas algumas arestas de G?*

Solução: Seja g_n a quantidade de grafos com vértices $0, 1, 2, \ldots, n$. Vendo os casos pequenos, temos $g_1 = 1$, $g_2 = 3$ e $g_3 = 8$:



$g_1 = 1$ $g_2 = 3$ $g_3 = 8$

O passo 1 nos diz para encontrarmos uma equação de recorrência para g_n: para isso, observe o vértice n: ou ele não está conectado diretamente a 0 ou tem uma sequência de arestas ligando 0 a n, n a $n-1$, $n-1$ a $n-2$, ..., $k+1$ a k, e k e $k-1$ não estão ligados. Note que 0 não pode se ligar a nenhum dos vértices $n-1$, $n-2$, ..., k, pois isso formaria ciclo. Resta ligar os vértices de 1 a $k-1$, mas podemos usar a recursão. No caso em que $k = 1$, temos uma árvore só.



Com isso, podemos chegar à recursão

$$g_n = g_{n-1} + g_{n-1} + g_{n-2} + \cdots + g_1 + 1 = g_{n-1} + \sum_{1\leq k<n} g_k + 1$$

Vamos aplicar o passo 2, com g_0 tal que $g_1 = g_0 + g_0 + 1 \iff g_0 = 0$, e começando a soma de $n = 1$, que é de onde a recorrência começa a fazer sentido:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 1} g_n x^n = \sum_{n\geq 1} g_{n-1}x^n + \sum_{n\geq 1}\sum_{1\leq k<n} g_k x^n + \sum_{n\geq 1} x^n \\
\iff & G(x) = g_0 + x\sum_{n\geq 2} g_{n-1}x^{n-1} + \sum_{n\geq 1}\sum_{1\leq k<n} g_k x^k \cdot x^{n-k} + \frac{x}{1-x} \\
\iff & G(x) = xG(x) + \sum_{k\geq 1} g_k x^k \sum_{n>k\geq 1} x^{n-k} + \frac{x}{1-x} \\
\iff & G(x) = xG(x) + \sum_{k\geq 1} g_k x^k \sum_{m\geq 1} x^m + \frac{x}{1-x} \\
\iff & G(x) = xG(x) + G(x)\frac{x}{1-x} + \frac{x}{1-x} \\
\iff & G(x) = \frac{x}{1-3x+x^2}
\end{aligned}$$

Vamos achar os inversos das raízes de $1-3x+x^2 = 0$, que são as raízes de... $x^2-3x+1 = 0$! Resolvendo, encontramos $x = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, que são os quadrados das raízes de $x^2 - x - 1 = 0$, ou seja, são $\phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ e $\varphi^2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$.

Vamos encontrar as constantes a e b tais que

$$\frac{x}{1-3x+x^2} = \frac{a}{1-\phi^2 x} + \frac{b}{1-\varphi^2 x}$$

Abrindo, temos

$$x = a(1-\varphi^2 x) + b(1-\phi^2 x)$$

Substituindo $x = 1/\varphi^2$ obtemos $b = \frac{1}{\varphi^2-\phi^2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ e fazendo $x = 1/\phi^2$ obtemos $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e obtemos o resultado:

$$G(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^{2n} - \varphi^{2n}\right)x^n$$

Você reconhece a conta acima? Sim, é o Fibonacci $2n$! Logo $g_n = F_{2n}$.

Nem sempre o passo 4 é simples; de fato, muitas sequências são descritas pela sua função geratriz em vez de seu termo geral.

Multiplicando funções geratrizes: convoluções

Antes de resolver mais alguns problemas, vamos ver o que acontece quando multiplicamos duas funções geratrizes

$$\begin{aligned}
A(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \\
B(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots = \sum_{n\geq 0} b_n x^n
\end{aligned}$$

Temos

$$A(x) \cdot B(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{0\leq k\leq n} a_k b_{n-k} \right) x^n$$

Ou seja, $A(x) \cdot B(x)$ gera a sequência

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots + a_nb_0 = \sum_{0\leq k\leq n} a_k b_{n-k}$$

Essa operação entre sequências se chama *convolução*. Parece arbitrária, mas essa ideia é útil. Vamos provar uma das fórmulas do nosso repertório (as outras ficam para você!)

Exemplo 5. *Mostre que a função geratriz da sequência* $(1, 2, 3, \ldots)$ *dada por* $a_n = n + 1$ *é* $\frac{1}{(1-x)^2}$.

Solução: Sabemos da fórmula da série geométrica que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

gera a sequência $c_n = 1$, $\forall n \geq 0$. Note que

$$a_n = c_0c_n + c_1c_{n-1} + \cdots + c_nc_0 = n + 1,$$

então basta multiplicar $C(x) = \frac{1}{1-x}$ por si mesmo, ou seja,

$$A(x) = (C(x))^2 = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Note que isso prova o seguinte: tomando $B(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$, obtemos a fórmula para as somas parciais de uma sequência:

Proposição 1. *Sendo* $(a_n)_{n\geq 0}$ *uma sequência gerada por* $A(x)$, *a sequência* $(a_0, a_0+a_1, a_0+a_1+a_2, \ldots)$ *é gerada por* $\frac{A(x)}{1-x}$.

Vamos brincar um pouquinho com os números de Fibonacci.

Exemplo 6. *Sendo* F_n *o n-ésimo número de Fibonacci, encontre uma fórmula fechada para* $\sum_{0\leq k\leq n} F_kF_{n-k}$.

Solução: Já vimos que a função geratriz de Fibonacci é

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{(1-x\phi)(1-x\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-x\phi} - \frac{1}{1-x\varphi} \right)$$

Sendo $S_n = \sum_{0\leq k\leq n} F_kF_{n-k}$ a soma pedida, basta fazer a convolução de Fibonacci consigo mesma:

$$S(x) = F(x) \cdot F(x) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{(1-x\phi)^2} - \frac{2}{(1-x\phi)(1-x\varphi)} + \frac{1}{(1-x\varphi)^2} \right)$$

Usando o repertório e o fato de que $\frac{2}{(1-x\phi)(1-x\varphi)} = \frac{2}{1-x-x^2} = \frac{2F(x)}{x} = 2\sum_{n\geq 0} F_{n+1}x^n$ (note que não há problemas pois $F_0 = 0$), temos

$$S(x) = \frac{1}{5}\sum_{n\geq 0}(n+1)\phi^n x^n - \frac{2}{5}\sum_{n\geq 0} F_{n+1}x^n + \frac{1}{5}\sum_{n\geq 0}(n+1)\varphi^n$$

Com isso, podemos encontrar $S_n = \frac{n+1}{5}(\phi^n + \varphi^n) - \frac{2}{5}F_{n+1}$.

Essa resposta é bacana, mas dá para ajeitar um pouco mais, de modo a ficar só números de Fibonacci. Isso parece difícil a priori, mas com a ajuda das funções geratrizes tudo fica mais simples: como ϕ e φ são raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$, $\phi + \varphi = 1$ e

$$\sum_{n\geq 0}(\phi^n + \varphi^n)x^n = \frac{1}{1-\phi x} + \frac{1}{1-\varphi x} = \frac{2-(\phi+\varphi)x}{(1-\phi x)(1-\varphi x)} = \frac{2-x}{1-x-x^2} = \frac{2}{x}F(x) - F(x)$$

de modo que

$$S(x) = \frac{1}{5}\sum_{n\geq 0}(n+1)(2F_{n+1} - F_n)x^n - \frac{2}{5}\sum_{n\geq 0} F_{n+1}x^n = \sum_{n\geq 0}\frac{2nF_{n+1} - (n+1)F_n}{5}x^n$$

e

$$\sum_{0\leq k\leq n} F_k F_{n-k} = S_n = \frac{2nF_{n+1} - (n+1)F_n}{5}$$

Filtrando valores: a fórmula da multisecção

Às vezes queremos calcular a soma de alguns termos, não todos. Isso é um trabalho para funções geratrizes e convoluções!

Lembre-se que para deslocar uma sequência em k unidades para a direita, basta multiplicar por x^k e que $\frac{1}{1-x^m}$ gera a sequência a_k tal que $a_k = 1$ se $m \mid k$ e $a_k = 0$ se $m \nmid k$.

Proposição 2. *Seja $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n$. Então*

$$\sum_{n\equiv k \pmod m} a_n x^n = \frac{1}{m}\sum_{s=0}^{m-1}\omega^{-ks}A(\omega^s x)$$

em que $\omega = e^{2\pi i/m} = \cos\frac{2\pi}{m} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{m}$ é a raiz m-ésima primitiva da unidade.

Demonstração: A ideia principal vem do fato de que

$$\sum_{s=0}^{m-1}\omega^{ks} = \begin{cases} m, & \text{se } m \mid k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

De fato, se $m \mid s$ então $\omega^{ks} = 1$ e aí só somamos m uns; se $m \nmid k$ então a soma é de uma progressão geométrica de razão $\omega^k \neq 1$, que é $\frac{\omega^{mk}-1}{\omega^k - 1} = 0$.

Ou seja, essa soma "filtra" os números. De fato,

$$\sum_{s=0}^{m-1} \omega^{-ks} A(\omega^s x) = \sum_{s=0}^{m-1} \omega^{-ks} \sum_{n\ge 0} a_n (\omega^s x)^n = \sum_{n\ge 0} a_n x^n \cdot \sum_{s=0}^{m-1} \omega^{-ks+ns}$$

A soma $\sum_{s=0}^{m-1} \omega^{-ks+ns}$ é igual a zero, exceto quando $m \mid n-k \iff n \equiv k \pmod{m}$. Logo

$$\sum_{s=0}^{m-1} \omega^{-ks} A(\omega^s x) = \sum_{n\ge 0, n\equiv k \pmod{m}} a_n x^n \cdot m$$

e o resultado segue.

Exemplo 7. *Calcule* $\sum_{k\ge 0} \binom{4n}{4k}$.

Solução: Já sabemos que a sequência $\binom{c}{n}$ é gerada por $(1+x)^c$. Então estamos pensando em somar os termos com índice múltiplo de 4 da série $F(x) = (1+x)^{4n}$. Para isso, basta usar a fórmula da multiseção, com i como raiz primitiva:

$$\begin{aligned}\sum_{4\mid t} \binom{4n}{t} x^t &= \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{3} F(i^s x) = \frac{1}{4}(F(x) + F(ix) + F(-x) + F(-ix)) \\ &= \frac{1}{4}((1+x)^{4n} + (1+ix)^{4n} + (1-x)^{4n} + (1-ix)^{4n})\end{aligned}$$

Para terminar, basta substituir $x = 1$:

$$\sum_{4\mid t} \binom{4n}{t} = \frac{1}{4}(2^{4n} + (1+i)^{4n} + 0^{4n} + (1-i)^{4n}) = \frac{2^{4n} + 2\cdot(-4)^n + 0^{4n}}{4}$$

O termo 0^{4n} parece redundante, mas $0^0 = 1$, e a fórmula também vale para $n = 0$.

Um caso particular útil é $m = 2$:

Proposição 3. *Sendo* $A(x) = \sum_{n\ge 0} a_n x^n$,

$$\sum_{k\ge 0} a_{2k} x^{2k} = \frac{A(x) + A(-x)}{2} \quad e \quad \sum_{k\ge 0} a_{2k+1} x^{2k+1} = \frac{A(x) - A(-x)}{2}$$

Outros tipos de funções geratrizes

Com um pouco de imaginação, funções geratrizes podem ser utilizadas de maneiras bastante efetivas.

Expoentes e somas

Uma outra maneira de trabalhar com funções geratrizes é olhar com mais ênfase nos *expoentes.*

Proposição 4. *Dados dois conjuntos A e B de inteiros não negativos, definimos $A(x) = \sum_{a\in A} x^a$ e $B(x) = \sum_{b\in B} x^b$. Se o número de maneiras de se escrever n como soma de um elemento de A com um elemento de B é c_n então $\sum_{n\geq 0} c_n x^n = A(x)\cdot B(x)$.*

Demonstração: Basta fazer a distributiva: sendo $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$,

$$A(x)\cdot B(x) = (x^{a_1} + x^{a_2} + \cdots)(x^{b_1} + x^{b_2} + \cdots) = x^{a_1+b_1} + x^{a_1+b_2} + \cdots + x^{a_i+b_j} + \cdots$$

e os termos com o mesmo expoente n se agrupam.

Note que:

- A e B podem ser infinitos ou finitos;
- A e B podem ser *multiconjuntos*, ou seja, podem ter elementos repetidos;
- generalizando a ideia acima, podemos usar coeficientes para refletir *pesos* nos elementos de A ou B.

Exemplo 8. *Esmeralda tem dois dados com a forma de tetraedro regular, cada um sorteando um número entre 1 e 4. Jade tem dois dados, mas com números diferentes, mas as probabilidades de obter cada soma, de 2 a 8, são iguais. Como podem ser os números dos dados de Jade?*

Solução: Cada um dos dados de Esmeralda podem ser representado pela função geratriz $x + x^2 + x^3 + x^4$. Assim, os resultados no lançamento de dois dados são gerados por $(x + x^2 + x^3 + x^4)^2$: o coeficiente em x^k indica de quantas maneiras obtemos a soma k.

Observe:

$$\begin{aligned}(x + x^2 + x^3 + x^4)^2 &= x^{1+1} + x^{1+2} + x^{1+3} + x^{1+4}\\ &+ x^{2+1} + x^{2+2} + x^{2+3} + x^{2+4}\\ &+ x^{3+1} + x^{3+2} + x^{3+3} + x^{3+4}\\ &+ x^{4+1} + x^{4+2} + x^{4+3} + x^{4+4}\end{aligned}$$

Note que a operação de multiplicação se assemelha ao produto cartesiano: para cada termo consideramos um par ordenado (a, b) de $A\times B$. Ao somarmos os expoentes, obtemos todas as somas $a + b$ com $a \in A$ e $b \in B$; e ao juntarmos os termos semelhantes obtemos o número de maneiras de obter cada soma.

Para que as probabilidades dos dados de Jade sejam iguais, a função geratriz de Jade deve ser a mesma. Sejam então $A(x) = x^{a_1}+x^{a_2}+x^{a_3}+x^{a_4}$ e $B(x) = x^{b_1}+x^{b_2}+x^{b_3}+x^{b_4}$ as funções geratrizes dos dados de Jade (os números nos dados são a_1, a_2, a_3, a_4 e b_1, b_2, b_3, b_4. Devemos ter então

$$(x^{a_1} + x^{a_2} + x^{a_3} + x^{a_4})(x^{b_1} + x^{b_2} + x^{b_3} + x^{b_4}) = (x + x^2 + x^3 + x^4)^2$$

O que fazemos agora é *não expandir*. Na verdade, *fatoramos* e usamos o fato de que fatoração em polinômios é única. De fato, a fatoração em $\mathbb{Z}$ de $(x + x^2 + x^3 + x^4)^2$ é $x^2(x + 1)^2(x^2 + 1)^2$. Então escolhemos alguns fatores para cada dado de Jade. Como

$A(1) = B(1) = 4$, devemos ter exatamente quatro termos em cada função geratriz. Podemos escolher dois $1 + x$ para $A(x)$ ou um $1 + x$ e um $1 + x^2$. Podemos também escolher os dois $x^2 + 1$'s, mas o caso é análogo. Então, considerando ainda que podemos distribuir os x's como quisermos, temos as possibilidades

$A(x)$	$B(x)$
$x^2(x+1)^2 = x^2 + x^3 + x^3 + x^4$	$(x^2+1)^2 = x^0 + x^2 + x^2 + x^4$
$x(x+1)^2 = x^1 + x^2 + x^2 + x^3$	$x(x^2+1)^2 = x^1 + x^3 + x^3 + x^5$
$(x+1)^2 = x^0 + x^1 + x^1 + x^2$	$x^2(x^2+1)^2 = x^2 + x^4 + x^4 + x^6$
$x^2(x+1)(x^2+1) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5$	$(x+1)(x^2+1) = x^0 + x^1 + x^2 + x^3$
$x(x+1)(x^2+1) = x^1 + x^2 + x^3 + x^4$	$x(x+1)(x^2+1) = x^1 + x^2 + x^3 + x^4$

Com isso, temos os pares de dados $\{2, 3, 3, 4\}$ e $\{0, 2, 2, 4\}$; $\{1, 2, 2, 3\}$ e $\{1, 3, 3, 5\}$; $\{0, 1, 1, 2\}$ e $\{2, 4, 4, 6\}$; $\{2, 3, 4, 5\}$ e $\{0, 1, 2, 3\}$ e, é claro, a original de Esmeralda $\{1, 2, 3, 4\}$ e $\{1, 2, 3, 4\}$. A única possibilidade com números inteiros positivos é a segunda; de fato, para que isso ocorra, devemos ter um x para cada função $A(x), B(x)$.

Exemplo 9. *Determine o número de maneiras de selecionar n frutas entre maçãs, bananas, laranjas e peras de modo que:*

- *a quantidade de maçãs é par;*
- *a quantidade de bananas é um múltiplo de* 5*;*
- *a quantidade de laranjas é no máximo* 4*;*
- *a quantidade de peras é no máximo* 1.

Solução: A ideia é considerar uma função para cada fruta:

- Para as maçãs, as quantidades são $0, 2, 4, \ldots$, ou seja, usamos $1 + x^2 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x^2}$;
- Para as bananas, as quantidades são $0, 5, 10, \ldots$, ou seja, usamos $1 + x^5 + x^{10} + \cdots = \frac{1}{1-x^5}$;
- Para as laranjas, as quantidades são $0, 1, 2, 3, 4$, ou seja, usamos $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{x^5-1}{x-1}$;
- Para peras, as quantidades são $0, 1$, e ficamos com a função $1 + x$.

Para somar as quantidades de frutas, basta multiplicar as séries que obtivemos:

$$F(x) = \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{x^5-1}{x-1} \cdot (1+x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n \geq 0} (n+1)x^n$$

e a resposta é… $n + 1$ (surpreso?).

O próximo exemplo mostra como trabalhar com *pesos*:

Exemplo 10. *Esmeralda tem n moedas viciadas $M_1, M_2, \ldots, M_n$, de modo que a probabilidade de obter cara na moeda M_k é $1/(2k+1)$. Se jogarmos as n moedas, qual é a probabilidade de a quantidade de caras ser ímpar?*

Solução: Vamos fazer o seguinte: associe a M_k o binômio

$$M_k(x) = \frac{2k}{2k+1} + \frac{1}{2k+1}x$$

e vamos ver o que acontece quando calculamos $M(x) = M_1(x)M_2(x)\ldots M_n(x)$. Note que o x "marca" a ocorrência de cara. O termo em x^m corresponde, então, a obter k caras e $n-k$ coroas. Como ao expandir, multiplicamos as probabilidades correspondentes, obtemos a probabilidade de obter k caras e $n-k$ coroas.

Mas não queremos a probabilidade para um k específico: só para uma quantidade ímpar. Para isso, basta considerar a soma dos coeficientes de índice ímpar, e isso é um trabalho para a... multissecção! Basta então calcular $\frac{M(1)-M(-1)}{2}$, o que é simples: temos $M_k(1) = 1$, logo $M(1) = 1$; e $M_k(-1) = \frac{2k-1}{2k+1}$, de modo que

$$M(-1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

Deste modo, a probabilidade pedida é

$$\frac{1 - \frac{1}{2n+1}}{2} = \frac{n}{2n+1},$$

que, só por curiosidade, é um pouco menor do que $1/2$.

Às vezes precisamos usar polinômios um pouco mais "para valer".

Exemplo 11. *Sejam $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ dois multiconjuntos distintos de n inteiros positivos cada (permitindo repetições!) tais que os números $a_i + a_j$, $i \neq j$, e $b_i + b_j$, $i \neq j$ são os mesmos (incluindo multiplicidades). Prove que n é uma potência de 2.*

Solução: Considere $A(x) = x^{a_1} + x^{a_2} + \cdots + x^{a_n}$ e $B(x) = x^{b_1} + x^{b_2} + \cdots + x^{b_n}$. Parece que temos $(A(x))^2 = (B(x))^2$, certo? Errado! Falta tirar os termos $x^{a_i+a_i} = x^{2a_i}$ e x^{2b_i}. Mas isso é fácil: retiramos $A(x^2)$. Assim,

$$(A(x))^2 - A(x^2) = (B(x))^2 - B(x^2) \iff (A(x)+B(x))(A(x)-B(x)) = A(x^2) - B(x^2)$$

Sendo $A(x)$ e $B(x)$ distintos,

$$A(x) + B(x) = \frac{A(x^2) - B(x^2)}{A(x) - B(x)}$$

Note que $A(1) = B(1) = n$, então 1 é raiz do polinômio $P(x) = A(x) - B(x)$. Sendo k a multiplicidade de 1 em $P(x)$, temos $P(x) = (x-1)^k Q(x)$, com $Q(1) \neq 1$. Mas aí $A(x^2) - B(x^2) = P(x^2) = (x^2-1)^k Q(x^2)$, ou seja,

$$A(x) + B(x) = \frac{(x^2-1)^k Q(x^2)}{(x-1)^k Q(x)} = (x+1)^k \frac{Q(x^2)}{Q(x)}$$

Substituir $x = 1$ não dá problema, pois $Q(1) \neq 0$, logo

$$A(1) + B(1) = (1+1)^k \frac{Q(1^2)}{Q(1)} = 2^k \iff 2n = 2^k \iff n = 2^{k-1},$$

ou seja, n é uma potência de 2.

Exponenciais

Às vezes, dada uma sequência $(a_n)_{n\geq 0}$, é mais vantajoso trabalhar com a função geratriz

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$$

que é a *função geratriz exponencial* associada a $(a_n)_{n\geq 0}$.

O nome "exponencial" vem do fato de que

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

e portanto é natural o e^x aparecer nas contas.

O motivo pelo qual esse tipo de função geratriz é bacana é a convolução:

$$A(x) \cdot B(x) = \sum_{k\geq 0} a_k \frac{x^k}{k!} \sum_{m\geq 0} b_m \frac{x^m}{m!} = \sum_{n\geq 0} \frac{a_k b_{n-k}}{k!\,(n-k)!} x^n = \sum_{n\geq 0} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \frac{x^n}{n!}$$

de modo que o produto gera a *convolução binomial*

$$c_n = \sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$$

Vamos voltar às permutações caóticas, lá da seção de inclusão-exclusão.

Exemplo 12. *Uma* permutação caótica *é uma permutação sem pontos fixos. Encontre uma fórmula para a quantidade de permutações caóticas de n números.*

Solução: A ideia é trabalhar *ao contrário*: vamos separar as $n!$ permutações de acordo com a quantidade de pontos fixos. De fato, sendo d_k a quantidade de permutações caóticas de k números, a quantidade de permutações com k pontos fixos é $\binom{n}{k} d_{n-k}$ (escolhemos os k pontos fixos e fazemos uma permutação caótica do resto). Assim,

$$\sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k} d_{n-k} = n!$$

Familiar? Sim, uma convolução binomial! Sendo $D(x) = \sum_{n\geq 0} d_n \frac{x^n}{n}!$, fazemos a convolução com a sequência constante 1, cuja função geratriz exponencial é $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x$! Logo

$$D(x)e^x = \sum_{n\geq 0} n! \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Com isso, podemos encontrar $D(x)$:

$$D(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n\geq 0} x^n = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n\geq 0} n!\frac{x^n}{n!}$$

e temos mais uma convolução binomial, agora entre as sequências $(-1)^n$ e $n!$:

$$d_n = \sum_{0\geq k\leq n} \binom{n}{k}(-1)^k(n-k)! = \sum_{0\leq k\leq n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

Note que não precisávamos calcular $\sum_{n\geq 0} x^n$. Tudo que fizemos foi passar e^x para o outro lado. Por outro lado, a função geratriz exponencial das permutações caóticas é bem bonitinha, e fácil de memorizar.

Usando mais de uma variável

Às vezes, uma variável só não é suficiente. Quando queremos "marcar" mais de alguma coisa, vale a pena usar mais variáveis.

Exemplo 13. *(IMO) Seja p um primo ímpar. Quantos subconjuntos de p de $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ têm soma dos elementos múltipla de p?*

Solução: Em princípio, podemos pensar na função geratriz

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots(1+x^{2p})$$

em que os expoentes representam os elementos. Ao multiplicar, escolhemos x^k se k pertence ao subconjunto e 1 se não pertence. Só que perdemos o controle sobre a quantidade de elementos do subconjunto. Para fazer isso, colocamos uma outra variável y:

$$f(x,y) = (1+xy)(1+x^2y)(1+x^3y)\ldots(1+x^{2p}y)$$

Agora, o coeficiente $x^S y^k$ indica a quantidade de subconjuntos de k elementos com soma igual a S. Sendo $f(x,y) = a_{S,k}x^S y^k$, queremos então

$$\sum_{p|S} a_{S,p}$$

Note que somamos os coeficientes em termos de x, e não de y. Então, como só nos interessa as somas múltiplas de p, ou seja, expoente de x múltiplo de p, fazemos uma p-multissecção em x e procuramos o termo em y^p. Ou seja, queremos o termo em y^p em

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f(\omega^k, y), \quad \omega = e^{2\pi i/p}$$

Calculemos, então, $f(\omega^k, y)$. Note que $(\omega^k)^{i+p} = \omega^{k(i+p)} = \omega^{ki+kp} = \omega^{ki}$, de modo que

$$f(\omega^k, y) = [(1+\omega^k y)(1+\omega^{2k}y)(1+\omega^{3k}y)\ldots(1+\omega^{kp}y)]^2$$

Se $k = 0$, então $\omega^{ki} = 1$ e $f(\omega^0, y) = f(1, y) = (1 + y)^{2p}$. Vejamos o que acontece se $0 < k < p$. Como p é primo, se $p \nmid k$ então $k, 2k, \ldots, pk \bmod p$ é uma permutação de $1, 2, \ldots, p \bmod p$, ou seja, $\omega^k, \omega^{2k}, \ldots, \omega^{pk}$ é uma permutação de $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^p$. Logo, para $0 < k < p$ temos

$$f(\omega^k, y) = [(1 + \omega y)(1 + \omega^2 y)(1 + \omega^3 y) \ldots (1 + \omega^p y)]^2$$

Mas o polinômio cujas raízes são os inversos de $-\omega^i$, $i = 1, 2, \ldots, p$ é $(-x)^p - 1 = -(x^p + 1)$. Logo

$$f(\omega^k, y) = [y^p + 1]^2$$

Logo

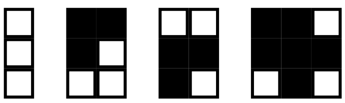
$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f(\omega^k, y) = \frac{1}{p}((y + 1)^{2p} + (p - 1)(y^p + 1)^2),$$

cujo termo em y^p é $\frac{1}{p}\left(\binom{2p}{p} + 2(p-1)\right)$.

Uma outra maneira de usar duas variáveis são os problemas de tabuleiro!

Exemplo 14. *Um* trominó *é obtido retirando o quadrado inferior direito de um quadrado 2×2. De quantas maneiras podemos colocar k trominós em um tabuleiro $3 \times n$? Não é permitido rotações sem sobreposições dos trominós.*

Solução: Depois de colocar os k trominós, preencha o resto com quadrados unitários. Note que podemos dividir o tabuleiro $3 \times n$ nas macropeças básicas a seguir:



(i) (ii) (iii) (iv)

Agora, seja $a_{n,k}$ o número de maneiras desejado. Vamos associar às peças (i), (ii), (iii), (iv) os monômios c, c^2t, c^2t e c^3t^2. Aqui, c marca a quantidade de colunas e t marca a quantidade de trominós. Com isso, cada escolha de peça está associada a multiplicar por $c + c^2t + c^2t + c^3t^2 = c(1 + ct)^2$. O número de maneiras de fazer isso com exatamente j peças está associado à função geratriz $[c(1+ct)^2]^j$; o coeficiente de c^nt^k dessa expansão nos diz a quantidade de maneiras de colocar k trominós em um tabuleiro $3 \times n$ obtido através da união de j peças básicas. Como a quantidade de peças básicas pode ser arbitrária, somamos todas as funções geratrizes. Logo queremos o termo em c^nt^k de

$$\sum_{j\ge 0}[c(1 + ct)^2]^j = \sum_{j\ge 0} c^j(1 + ct)^{2j} = \sum_{j\ge 0}\sum_{0\le k\le 2j}\binom{2j}{k}c^j(ct)^k = \sum_{j\ge 0}\sum_{0\le k\le 2j}\binom{2j}{k}c^{j+k}t^k$$

e basta fazer $j + k = n \iff j = n - k$, de modo que a resposta é $\binom{2n-2k}{k}$.

Algumas aplicações

Assim como bijeções, funções geratrizes podem ser extremamente úteis para *provar que dois conjuntos têm a mesma quantidade de elementos sem precisarmos contá-los.* De fato, usamos muito as funções geratrizes em *partições*, ou seja, maneiras de escrever números naturais como soma de números naturais, levando ou não a ordem em consideração.

Exemplo 15. *Encontre a função geratriz das partições* não ordenadas *de n em inteiros positivos sem restrições.*

Solução: Vamos usar funções geratrizes nos expoentes: primeiro consideramos as quantidades de 1's na soma: ou usamos nenhum 1 (x^0), ou um 1 (x^1), ou dois 1's (x^2)...desse modo, o primeiro fator é $1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$. Pensemos nas quantidades de 2's: ou nenhum (x^0) ou um (x^2) ou dois ($x^{2\cdot 2} = x^4$)..., e obtemos $1 + x^2 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x^2}$. Continuando, notamos que o k-ésimo fator é $1 + x^k + x^{2k} + \cdots = \frac{1}{1-x^k}$, e a função geratriz é

$$P(x) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^3}\cdots = \prod_{n\geq 0}\frac{1}{1-x^n}.$$

Infelizmente, não há fórmula fechada para o termo em x^n.

Exemplo 16. *Encontre a função geratriz das partições* ordenadas *de n em inteiros positivos sem restrições.*

Solução: No fundo, queremos o número de soluções de $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ com x_i inteiro positivo e k variando de 1 a n. Podemos usar a fórmula que vimos anteriormente, $\binom{n-1}{k-1}$ e somar de $k = 1$ a $k = n$, obtendo $\sum_{1\leq k\leq n}\binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$. Mas vamos usar funções geratrizes.

O segredo é ignorar o n e ver como obter somas ordenadas com k parcelas. Fazendo o i-ésimo fator corresponder ao valor de x_i (garantindo assim a *ordem* entre as parcelas) e observando que cada x_i pode ser igual a $1, 2, \ldots$, a função que gera as somas de k parcelas é

$$(x + x^2 + \cdots)^k = \left(\frac{x}{1-x}\right)^k$$

Como podemos ter qualquer quantidade de parcelas, a função que gera as partições ordenadas é

$$\sum_{k\geq 1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k = \frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}} = \frac{x}{1-2x} = \sum_{k\geq 0}2^k x^{k+1} = \sum_{n\geq 1}2^{n-1}x^n,$$

confirmando o que já provamos.

Exemplo 17. *Mostre que a quantidade de partições não ordenadas de n em naturais distintos é igual ao número de partições também não ordenadas de n em naturais ímpares.*

Solução: Para mostrar que duas sequências são iguais, basta provar que suas funções geratrizes são iguais.

Seja $A(x)$ a função geratriz das partições em naturais distintos. Cada natural tem duas opções: ou aparece ou não aparece. Assim, multiplicamos $1+x^k$, $k \ge 1$:

$$A(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots = \prod_{k\ge 1}(1+x^k)$$

Agora, considere as partições em ímpares. Cada ímpar pode aparecer qualquer quantidade de vezes. Assim,

$$B(x) = (1+x+x^2+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)\ldots = \prod_{k\ge 1}\frac{1}{1-x^{2k-1}}$$

Basta, então, mostrar que $A(x) = B(x)$. Para tanto, basta multiplicar as (infinitas!) identidades

$$\frac{1-x^2}{1-x} = 1+x; \quad \frac{1-x^4}{1-x^2} = 1+x^2; \quad \frac{1-x^6}{1-x^3} = 1+x^3; \ldots$$

obtendo

$$A(x) = \prod_{k\ge 1}(1+x^k) = \prod_{k\ge 1}\frac{1-x^{2k}}{1-x^k} = \frac{\prod_{\substack{k\ge 1\\ k \text{ par}}}(1-x^k)}{\prod_{k\ge 1}(1-x^k)} = \frac{1}{\prod_{\substack{k\ge 1\\ k \text{ ímpar}}}(1-x^k)} = B(x),$$

como queríamos demonstrar.

Problemas

1. (OBM) Para cada subconjunto A de $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$, seja $p(A)$ o produto de seus elementos. Por exemplo, $p(\{1;2;4;5\}) = 40$ e $p(A) = 10! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 10$. Por convenção, adote $p(\emptyset) = 1$. Calcule a soma de todos os 2^{10} produtos $p(A)$.

2. Esmeralda anda aleatoriamente no eixo x. Ela sempre começa no ponto $(0,0)$. Determine a probabilidade de ela estar no ponto $(i,0)$ após n passos se a cada passo ela:

   (a) se move uma unidade à direita ou uma unidade à esquerda.

   (b) se move uma unidade à direita, uma unidade à esquerda ou fica parada.

   (c) se move uma unidade à direita, uma unidade à esquerda ou fica parada. Como Esmeralda acabou de almoçar, ela tende a ficar parada mais vezes. Sendo mais exato, ela fica parada com probabilidade $1/2$ e se move para cada sentido com probabilidade $1/4$.

3. Arnaldo joga 999 moedas honestas, Bernaldo e Cernaldo jogam, cada um, 1000 moedas honestas e Dernaldo joga 1001 moedas honestas. Mostre que os dois eventos a seguir têm a mesma chance de ocorrer, e calcule-a.

- Cernaldo obtém exatamente uma cara a mais do que Bernaldo;
- Arnaldo e Dernaldo obtêm exatamente a mesma quantidade de caras.

4. Encontre uma fórmula fechada para

$$\binom{n}{0}^2 - \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}^2.$$

5. Encontre dois dados honestos cujas faces não são $1, 2, 3, 4, 5, 6$ que, quando jogados, deem, com a mesma probabilidade que dois dados normais, as somas $2, 3, 4, \ldots, 12$.

6. Um matemático excêntrico coleciona dominós guardados em uma caixa $2 \times n$, e paga \$4 por dominó vertical e \$1 por dominó horizontal. Quantas caixas (de qualquer tamanho) valem $\$m$?

7. Encontre o número de subconjuntos de $\{1, 2, 3, \ldots, 2000\}$ cuja soma dos elementos é um múltiplo de 5 (inclua o conjunto vazio na sua contagem).

8. Resolva a recorrência $g_0 = 1$, $g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + \cdots + ng_0$, $n > 0$.

9. Prove que

$$\binom{n}{n}F_0 + \binom{n}{n-1}F_1 + \binom{n}{n-2}F_2 + \cdots + \binom{n}{0}F_n = F_{2n}$$

sendo F_k o k-ésimo número de Fibonacci.

10. Prove que o número de partições em que apenas as partes ímpares podem ser repetidas é igual ao número de partições de n em que nenhuma parte aparece mais do que três vezes.

11. Mostre que o número total de 1's nas partições de n é igual à soma das quantidades de partes distintas em cada partição de n.

12. Denotaremos a progressão aritmética de razão a e primeiro termo b por

$$\{an + b\} = \{b, a + b, a + 2b, \ldots\}.$$

Dizemos que as progressões aritméticas $\{a_1n+b_1\}$, $\{a_2n+b_2\}$, $\ldots$, $\{a_mn+b_m\}$ *cobrem* os inteiros não-negativos quando cada inteiro não-negativo aparece em exatamente uma das progressões aritméticas. Por exemplo, $\{2n\}$, $\{4n + 1\}$ e $\{4n + 3\}$ cobrem os inteiros não-negativos. Prove que se $\{a_1n + b_1\}$, $\{a_2n + b_2\}$, $\ldots$, $\{a_mn + b_m\}$ *cobrem* os inteiros não-negativos e $2 \le a_1 \le \ldots \le a_m$ então $a_{m-1} = a_m$.

13. (China) Seja n um inteiro positivo. Encontre o número de polinômios com coeficientes em $\{0, 1, 2, 3\}$ tais que $P(2) = n$.

14. (Identidade de Euler) Seja

$$f(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots = \prod_{n\geq 1}(1-x^n)$$

Prove que o termo em x^n é $(-1)^k$ se $n = \frac{3k^2 \pm k}{2}$ e 0 caso contrário.

15. Determine se existe um conjunto X de inteiros não negativos com a seguinte propriedade: para cada inteiro não negativo n a equação $a + 2b = n$ tem exatamente uma solução com $a, b \in X$.

16. Cada vértice de um polígono regular é pintado de uma de uma quantidade finita de cores de modo que pontos da mesma cor são os vértices de um outro polígono regular. Prove que dois dos polígonos regulares obtidos são congruentes.

Bibliografia

1. T. Andreescu e Z. Feng, *A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies*, Birkhäuser 2003.

2. E. Tengan, *Séries Formais*, Revista Eureka! 11.

3. Knuth, Graham e Patashnik, *Concrete Mathematics*.

4. T. Andreescu e Z. Feng, *102 Combinatorial Problems, From the training of the USA IMO team*, Birkhäuser 2003.

Respostas, Dicas e Soluções

1. A resposta é $(1+1)(1+2)(1+3)\ldots(1+10) = 11!$. Generalizando um pouco, a soma de $p(A)$ para conjuntos $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ é $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)$.

2. (a) Cada passo aumenta a coordenada x em uma unidade ou diminui a coordenada x em uma unidade. Assim, queremos o coeficiente em x^i em $(x+x^{-1})^n = \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}x^{n-k}x^{-k} = \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}x^{n-2k}$. Basta fazer $n - 2k = i \iff k = \frac{n-i}{2}$. Logo a resposta é $\frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n-i}{2}}$ se i e n têm a mesma paridade e 0 caso contrário.

   (b) A coordenada x é somada, a cada passo, em -1, 0 ou 1. Assim, devemos calcular o coeficiente em x^i no desenvolvimento de $(x+1+x^{-1})^n = \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}(x+x^{-1})^k = \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\sum_{\ell\geq 0}\binom{k}{\ell}x^{k-2\ell} = \sum_{k,\ell\geq 0}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}x^{k-2\ell}$. Basta, então, somar todas as possibilidades em que $k - 2\ell = i \iff k = 2\ell + i$: o total é $\sum_{\ell\geq 0}\binom{n}{2\ell+i}\binom{2\ell+i}{\ell}$ e a probabilidade é $\frac{1}{3^n}\sum_{\ell\geq 0}\binom{n}{2\ell+i}\binom{2\ell+i}{\ell}$.

   (c) Nesse caso, usamos funções geratrizes com pesos: queremos o coeficiente em x^i na expansão de $\left(\frac{1}{4}x^{-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x\right)^n = \left(\frac{x^{1/2}+x^{-1/2}}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{4^n}\sum_{k\geq 0}\binom{2n}{k}x^{n-k/2}x^{-k/2} = \frac{1}{4^n}\sum_{k\geq 0}\binom{2n}{k}x^{n-k}$. Fazemos $i = n - k \iff k = n - i$, e a resposta é $\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n-i}$.

3. A probabilidade de Cernaldo ter exatamente uma cara a mais que Bernaldo é igual a $\frac{1}{2^{2000}} \sum_{k \le 0} \binom{1000}{k}\binom{1000}{k+1}$, e a probabilidade de Dernaldo e Arnaldo terem a mesma quantidade de caras é $\frac{1}{2^{2000}} \sum_{k \ge 0} \binom{1001}{k}\binom{999}{k}$. Já vimos que a primeira soma é igual a $\binom{2000}{999}$, que é o coeficiente de x^{999} em $(1+x)^{1000}(1+x)^{1000} = (1+x)^{2000}$; a segunda soma é $\sum_{k \ge 0} \binom{1001}{n}\binom{999}{999-k}$, que é o coeficiente em x^{999} em $(1+x)^{1001}(1+x)^{999} = (1+x)^{2000}$, que é a mesma coisa. A probabilidade pedida é, então, $\frac{1}{2^{2000}}\binom{2000}{999}$.

4. A soma é igual a $\sum_{0 \le k \le n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}(-1)^k$, que é o coeficiente em x^n em $(1-x)^n(1+x)^n = (1-x^2)^n$, que é 0 se n é ímpar (de fato, nesse caso $(-1)^k\binom{n}{k}^2$ cancela com $(-1)^{n-k}\binom{n}{n-k}^2$) e $(-1)^{n/2}\binom{n}{n/2}$ se n é par.

5. Observando que $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2 = x^2(1+x)^2(1-x+x^2)^2(1+x+x^2)^2$, podemos obter por exemplo os dados $\{1,2,2,3,3,4\}$ e $\{1,3,4,5,6,8\}$. Esses dados são essencialmente os únicos (a menos de distribuir os fatores x).

6. Na verdade, são os números de Fibonacci de novo! Sua função geratriz é $\frac{1}{1-x^2-x^4}$ e a resposta é $F_{m/2+1}$ se m é par e 0 caso contrário.

7. A função geratriz é $f(x) = (1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2000})$ (note que, ao contrário do exemplo correspondente, não importa a quantidade de elementos do subconjunto) e faça uma multissecção. A resposta é $\frac{2^{2000}+4\cdot 2^{400}}{5}$.

8. $G(x)$ é a convolução de $a_n = n$ e o próprio g_n. De fato,

$$\sum_{n \ge 1} g_n x^n = \sum_{n \ge 1}\left(\sum_{0 \le k \le n} k g_{n-k}\right)x^n \iff G(x) = G(x)\cdot\frac{x}{(1-x)^2} + 1$$

(o 1 no final aparece porque começamos a somar de $n = 1$). Com isso, $G(x) = \frac{(1-x)^2}{1-3x+x^2} = 1 + \frac{x}{1-3x+x^2}$ e $g_n = F_{2n}$ exceto para $n = 0$.

9. Fazemos a convolução de $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ com $G(x) = \sum_{k \ge 0}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n$. Em princípio parece intimidador (ou parece que a conta vai voltar a um somatório), mas a ideal esperta é observar que $F(x) = \frac{x}{1-(x+x^2)} = \sum_{k \ge 0} x(x+x^2)^k = \sum_{k \ge 0} x^{k+1}(1+x)^k$, e queremos o termo em x^n em

$$(1+x)^n F(x) = \sum_{k \ge 0} x^{k+1}(1+x)^{n+k} = x^{-n}\sum_{k \ge 0} x^{n+k+1}(1+x)^{n+k},$$

que é x^{-n} vezes F deslocada em n unidades. Ou seja, é F_{2n}.

10. A primeira função geratriz é $A(x) = \prod_{k \ge 1}(1+x^{2k})\prod_{k \ge 1}\frac{1}{1-x^{2k-1}}$ e a segunda é

$B(x) = \prod_{k\geq 1}(1 + x^k + x^{2k} + x^{3k})$. Mas

$$\begin{aligned} A(x) &= \prod_{k\geq 1}(1 + x^{2k}) \prod_{k\geq 1} \frac{1}{1 - x^{2k-1}} = \prod_{k\geq 1} \frac{1 - x^{4k}}{1 - x^{2k}} \prod_{k\geq 1} \frac{1}{1 - x^{2k-1}} \\ &= \prod_{k\geq 1} \frac{1 - x^{4k}}{1 - x^k} = \prod_{k\geq 1}(1 + x^k + x^{2k} + x^{3k}) = B(x) \end{aligned}$$

e o problema acaba.

11. Para contar a quantidade de 1's, basta colocar um marcador a mais, de modo que a quantidade de partições de n com k uns é o coeficiente em $x^n y^k$ de

$$A(x, y) = (1 + xy + x^2y^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots) \ldots = \frac{1}{1 - xy} \prod_{n\geq 2} \frac{1}{1 - x^n}$$

Em compensação, a quantidade de elementos da partição pode ser marcada usando a função geratriz

$$B(x, y) = (1 + xy + x^2y + \cdots)(1 + x^2y + x^4y + \cdots) \ldots = \prod_{n\geq 1} \left(1 + \frac{x^n y}{1 - x^n}\right)$$

Um termo típico em x^n em $A(x, y)$ ($B(x, y)$) é um polinômio $P(y) = a_k y^k + a_{k-1} y^{k-1} + \cdots + a_0$ em y, sendo a_k a quantidade de partições de n com k 1's (elementos). Assim, queremos, em ambos os casos, calcular $ka_k + (k-1)a_{k-1} + \cdots + a_1$. Ou seja, a *derivada* de $P(y)$ em 1, $P'(1)$. Mas podemos derivar tudo de uma vez em função de y.

A derivada de A em relação a y é

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{x}{(1 - xy)^2} \prod_{n\geq 2} \frac{1}{1 - x^n}$$

A derivada de B em relação a y é um pouco mais complicada. É mais fácil notar que a derivada de $\ln B$ é $\frac{B'}{B}$ e depois multiplicar por B. Sendo $\ln B = \sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{x^n y}{1 - x^n}\right)$,

$$\frac{\partial B}{\partial y} = B(x, y) \sum_{n\geq 1} \frac{\frac{x^n}{1 - x^n}}{1 + \frac{x^n y}{1 - x^n}} = B(x, y) \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{1 - x^n(1 - y)}$$

Parece horrível, mas substituindo $y = 1$ fica tudo bacana:

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x, 1) = \frac{x}{(1 - x)^2} \prod_{n\geq 2} \frac{1}{1 - x^n} = \frac{x}{1 - x} \prod_{n\geq 1} \frac{1}{1 - x^n}$$

$$\frac{\partial B}{\partial y}(x, 1) = B(x, 1) \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{1 - x^n(1 - 1)} = \prod_{n\geq 1} \left(1 + \frac{x^n}{1 - x^n}\right) \sum_{n\geq 1} x^n = \frac{x}{1 - x} \prod_{n\geq 1} \frac{1}{1 - x^n}$$

e vemos que $\frac{\partial A}{\partial y}(x, 1) = \frac{\partial B}{\partial y}(x, 1)$, como queríamos.

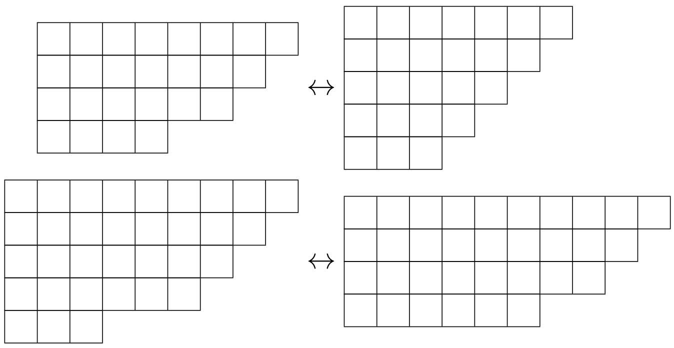
12. Cada progressão aritmética é gerada (com números nos expoentes) por $A_i(x) = \sum_{n\geq 0} x^{a_i n + b_i} = \frac{x^{b_i}}{1-x^{a_i}}$. Assim, a soma dos $A_i(x)$'s deve ser $1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$. Ou seja,
$$\frac{x^{b_1}}{1-x^{a_1}} + \frac{x^{b_2}}{1-x^{a_2}} + \cdots + \frac{x^{b_m}}{1-x^{a_m}} = \frac{1}{1-x}$$
Agora, suponha que $a_m > a_i$ para todo i, $1 \leq i < m$. Então, fazendo x arbitrariamente próximo de $e^{2\pi i/a_m}$, temos x^{a_i} próximo de $e^{2\pi i a_i/a_m} \neq 1$ para $1 \leq i < m$ e x^m próximo de 1. Logo $\frac{x^{b_i}}{1-x^{a_i}}$ não tende a infinito para $1 \leq i < m$ e $\frac{x^{b_m}}{1-x^{a_m}}$ tende a infinito. Logo o primeiro membro da equação acima vai para infinito e o segundo membro não vai (de fato, vai para $\frac{1}{1-e^{2\pi i/a_m}}$), absurdo. Logo $a_m = a_{m-1}$.

   Observe o exemplo para entender o que acontece se $a_m = a_{m-1}$: o $1 - x^{a_m}$ se cancela!
$$\frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^4} + \frac{x^3}{1-x^4} = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x+x^3}{1-x^4} = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)}$$
$$= \frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2} = \frac{1+x}{1-x^2} = \frac{1}{1-x}$$

13. A ideia é somar vários termos da forma $a_k \cdot 2^k$, $a_k \in \{0,1,2,3\}$:
$$A(x) = (1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^4+x^8+x^{12})\ldots = \prod_{k\geq 0}(1+x^{2^k}+x^{2\cdot 2^k}+x^{3\cdot 2^k})$$
   Mas $1 + t + t^2 + t^3 = \frac{1-t^4}{1-t}$, logo
$$A(x) = \prod_{k\geq 0} \frac{1-x^{4\cdot 2^k}}{1-x^{2^k}} = \prod_{k\geq 0} \frac{1-x^{2^{k+2}}}{1-x^{2^k}} = \frac{1-x^4}{1-x}\frac{1-x^8}{1-x^2}\frac{1-x^{16}}{1-x^4}\cdots = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$$
   Vamos escrever em frações parciais
$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{(1-x)^2} + \frac{c}{1+x}$$
   Expandindo, temos
$$1 = a(1-x)(1+x) + b(1+x) + c(1-x)^2$$
   Substituindo x por 1 e -1, obtemos $b = \frac{1}{2}$ e $c = \frac{1}{4}$. Substituindo por 0, obtemos $1 = a + b + c \iff a = \frac{1}{4}$. Logo
$$A(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{(1-x)^2} + \frac{1}{1+x}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{4}(1 + 2(n+1) + (-1)^n)x^n,$$
   ou seja, há $\frac{2n+3+(-1)^n}{4}$ polinômios.

14. Primeiro, note que o termo em $x^n y^k$ em $P(x,y) = \prod_{n\geq 1}(1+yx^n)$ é o número de partições de n em k parcelas distintas. Ao fazermos $y = -1$ (gerando a função que queremos), atribuímos -1 às partições com quantidades ímpares de parcelas e 1 às partições com quantidades pares de parcelas. Então o termo em x^n em $f(x) = P(x,-1) = \prod_{n\geq 1}(1-x^n)$ é a quantidade de partições com quantidades pares de parcelas menos a quantidade de partições com quantidades ímpares de parcelas.

    Vamos provar que tais quantidade são iguais exceto quando $n = \frac{3k^2 \pm k}{2}$. Para isso fazemos uma bijeção! Sendo $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, $a_1 > a_2 > \ldots > a_k$, conte a quantidade m de termos, a partir de a_1, que são consecutivos, e compare com a_k. Se $m < a_k$, crie uma nova parcela a_{k+1} e subtraia 1 de a_1 a a_m; se $m \geq a_k$, tire a parcela a_k e some 1 a a_1 a a_m. Por exemplo, $8+7+6+4 \leftrightarrow 7+6+5+4+3$ e $9+8+7+6+3 \leftrightarrow 10+9+8+6$. Isso fica mais fácil de visualizar através de *diagramas de Young*:

    Só dois tipos de partição não têm correspondente: as do tipo $n = (2k-1)+(2k-2)+\cdots+k \iff n = \frac{3k^2-k}{2}$ e $n = 2k+(2k-1)+\cdots+(k+1) = \frac{3k^2+k}{2}$ (você consegue ver por quê?). Mas esses são os casos em que aparece o termo $(-1)^k x^n$, $n = \frac{3k^2 \pm k}{2}$.

15. Seja $P(x) = \sum_{a\in X} x^a$. Temos $P(x)P(x^2) = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$. Deste modo, $P(x^2)P(x^4) = \frac{1}{1-x^2}$, $P(x^4)P(x^8) = \frac{1}{1-x^4}$, e assim vai, de modo que

    $$\begin{aligned} P(x) &= \frac{P(x)P(x^2)}{P(x^2)P(x^4)} \frac{P(x^4)P(x^8)}{P(x^8)P(x^{16})} \frac{P(x^{16})P(x^{32})}{P(x^{32})P(x^{64})} \cdots \\ &= \frac{1-x^2}{1-x} \frac{1-x^8}{1-x^4} \cdots \frac{1-x^{32}}{1-x^{16}} \cdots = (1+x)(1+x^4)(1+x^{16}) \ldots \end{aligned}$$

    e X é o conjunto dos números que são somas de potências distintas de 4:

    $$X = \{0, 1, 4, 5, 16, 17, 20, 21, \ldots\}$$

    De fato, essa é a única possibilidade, já que $P(x)$ é único.

16. Seja n o número de vértices do primeiro polígono regular, e numere os vértices de 0 a $n-1$. Primeiro note que as quantidades de vértices dos polígonos regulares menores

devem ser divisores de n. Seja, então $d_1, d_2, \ldots, d_k$ as quantidades de vértices desses polígonos regulares. Associe a cada vértice i do polígono maior o monômio x^i. Um polígono de d_i lados toma os vértices $a_i, a_i + \frac{n}{d_i}, a_i + \frac{2n}{d_i}, \ldots, a_i + \frac{(d_i-1)n}{d_i}$. Assim, ele contribui na soma $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$ com

$$x^{a_i} + x^{a_i + \frac{n}{d_i}} + x^{a_i + \frac{2n}{d_i}} + \cdots + x^{a_i + \frac{(d_i-1)n}{d_i}} = x^{a_i} \frac{(x^{\frac{n}{d_i}})^{d_i} - 1}{x^{\frac{n}{d_i}} - 1} = \frac{x^{a_i}(x^n - 1)}{x^{\frac{n}{d_i}} - 1}$$

Logo

$$\begin{aligned} & \frac{x^{a_1}(x^n-1)}{x^{\frac{n}{d_1}}-1} + \frac{x^{a_2}(x^n-1)}{x^{\frac{n}{d_2}}-1} + \cdots + \frac{x^{a_k}(x^n-1)}{x^{\frac{n}{d_k}}-1} = \frac{x^n-1}{x-1} \\ \iff & \frac{x^{a_1}}{x^{\frac{n}{d_1}}-1} + \frac{x^{a_2}}{x^{\frac{n}{d_2}}-1} + \cdots + \frac{x^{a_k}}{x^{\frac{n}{d_k}}-1} = \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

e o problema fica análogo ao problema 12 (mas nesse caso, prova-se que dois dos polígonos regulares congruentes são os que têm menos lados).