Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Combinatória – Nível 3

Aula 13

Prof. Carlos Shine

Teoria dos Grafos: Emparelhamentos, Grafos Planares e Colorações

O nosso primeiro tópico é verificar como podemos fazer pares de vértices.

Emparelhamentos e coberturas

Um *emparelhamento* de um grafo é um conjunto de arestas sem vértices comuns. Um exemplo prático bacana é considerar como conjunto de vértices uma equipe de engenheiros e ligamos dois engenheiros se eles podem fazer tarefas juntos. Com isso, um problema é construir equipes de dois engenheiros. É mais vantajoso se a quantidade de equipe é máxima, ou seja, quando temos um *emparelhamento máximo*.

Uma maneira de estimar emparelhamentos máximos é a ideia de *coberturas*. Uma cobertura de um grafo G é um conjunto S de vértices tal que todas as arestas de G têm pelo menos uma ponta em S.

Teorema 1. *Seja G um grafo. Se $\alpha'(G)$ é a quantidade de arestas de um emparelhamento máximo de G e $\beta(G)$ é a quantidade de vértices de uma cobertura mínima de G então $\alpha'(G) \le \beta(G)$.*

Demonstração: Vamos provar que, na verdade, para todo emparelhamento E e cobertura C temos $|E| \le |C|$. Mas para ver isso, é só tomar cada aresta de E e escolher a ponta da aresta que está em C (toda aresta tem alguém em C). Se as duas pontas estiverem em C, escolha qualquer uma. Note que não há como ter vértices repetidos, então $|E| \le |C|$. $\square$

Infelizmente nem sempre vale a igualdade (considere um K_3, por exemplo). Mas existe uma classe de grafos em que a igualdade é válida.

Teorema dos Casamentos

Um dos teoremas mais festejados na teoria dos grafos é o *teorema dos casamentos*, também conhecido como *teorema de Hall*, que tem aplicações em diversas áreas da Matemática. É um dos vários problemas em que uma condição necessária razoavelmente imediata é também suficiente.

Teorema 2. *Dados n mulheres e $m \ge n$ homens, em que cada mulher tem uma lista de possíveis cônjuges, é possível casar as n mulheres se, e somente se, todo conjunto de k mulheres têm, em conjunto, k pretendentes.*

Em termos de grafos, o teorema dos casamentos é:

Teorema 2. *Dado um grafo bipartido com classes V_1 e V_2, para $S \subset V_1$ seja $N(S)$ o conjunto de todos os vértices vizinhos a algum elemento de S. Um* emparelhamento *de V_1 em V_2 é um conjunto de arestas disjuntas cujas extremidades estão em classes diferentes. Então existe um emparelhamento completo de V_1 em V_2 se, e somente se, $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subset V_1$.*

A condição $|N(S)| \geq |S|$, que é equivalente a todo conjunto de k mulheres terem, em conjunto, k pretendentes, é conhecida como *condição de Hall.* Note que é possível que alguns homens não casem (isso ocorre quando $m > n$).

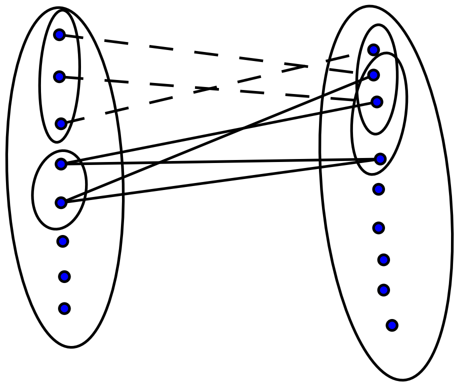
Demonstraremos o teorema dos casamentos nos termos da primeira formulação.

Demonstração: Indução sobre a quantidade n de mulheres. Defina *conjunto crítico* como um conjunto de k mulheres, $1 \leq k < n$, que têm, no total, **exatamente** k pretendentes. Note que k deve ser **menor** do que n; assim, um conjunto de n mulheres que têm, no total, **exatamente** n pretendentes não é um conjunto crítico.

A base é para $n = 1$ e é imediata (basta a única mulher escolher seu pretendente!). Suponha, então, que o resultado vale para todo número menor do que n. Como a existência de um conjunto crítico impõe restrições, dividimos o problema em dois casos.

- **Caso 1: Não há conjuntos críticos.** Nesse caso, cada conjunto de k mulheres, $k < n$, têm no total pelo menos $k + 1$ pretendentes. Casamos um casal qualquer, sobrando $n - 1$ mulheres para $m - 1$ homens. Tome quaisquer k entre as $n - 1$ mulheres; note que, como $k \leq n - 1$ e não há conjuntos críticos, elas tinham pelo menos $k+1$ pretendentes; como um dos homens casou, há no máximo um pretendente a menos, e o conjunto de k mulheres têm pelo menos k pretendentes. Assim, como o conjunto obtido retirando os "recém-casados" satisfaz a condição de Hall, aplicamos a hipótese de indução e casamos as demais $n - 1$ mulheres.

- **Caso 2: Há pelo menos um conjunto crítico.** Suponha que há um conjunto crítico S com k mulheres. Case as k mulheres (como $k < n$, isso é possível pela hipótese de indução – e esse é o motivo por que conjuntos de n mulheres não podem ser críticos!). Com isso, sobram $n - k$ mulheres e $m - k$ homens. Verifiquemos que a condição de Hall vale para esse novo conjunto de homens e mulheres. Suponha por absurdo que não. Então existe um conjunto de t mulheres que têm em conjunto menos de t pretendentes. Junte os k casais do começo; com isso, $t+k$ mulheres teriam menos do que $t + k$ pretendentes, o que contradiz o fato de que o conjunto original satisfaz a condição de Hall.



□

Exemplo 1. *Prove que se todos os graus de elementos da mesma classe de um grafo bipartido são iguais, então é possível realizar um emparelhamento completo com os vértices da classe menor.*

Solução: Sejam V_1 e V_2 as classes do grafo bipartido, $|V_1| = a \le |V_2| = b$. Seja D o grau de cada vértice de V_1 e d o grau de cada vértice de V_2. A quantidade de arestas do grafo é $D \cdot a = d \cdot b$, de modo que $D \ge d$. Seja $S \subset V_1$. Temos que provar que $|N(S)| \ge |S|$. Como saem $|S| \cdot D$ arestas de S e cada elemento de $N(S)$ recebe no máximo d arestas, $|S| \cdot D \ge N(S) \cdot d \implies |S| \cdot d \ge N(S) \cdot d \iff |S| \ge |N(S)|$. Como o grafo satisfaz a condição de Hall, o problema está resolvido pelo teorema dos casamentos.

O próximo exemplo mostra como as ideias da demonstração do teorema dos casamentos, além do próprio teorema, podem ser aplicadas.

Exemplo 2. *Uma herança deve ser dividida entre n pessoas, cujos valores pessoais sobre diversos elementos da herança podem ser diferentes; isto é, por exemplo, é possível que uma casa valha metade da herança para uma pessoa e dois quintos para outra. É possível dividir a herança de modo que todos achem que têm pelo menos $1/n$ da herança?*

Solução: Sim, é possível:

1. um dos herdeiros divide a herança no que ele considera n partes iguais.

2. para cada parte, ele pergunta para cada herdeiro se ele quer essa parte (ou seja, se cada parte é, para ele, pelo menos $1/n$ da herança). Com isso, ele obtém uma lista.

3. se todo conjunto de k herdeiros está satisfeito com pelo menos k partes no total, pelo teorema dos casamentos é possível fazer a divisão.

4. caso contrário, seja P o maior conjunto de herdeiros tal que, em conjunto, eles estejam satisfeitos com menos do que $|P|$ partes. Considere o conjunto $\overline{P}$ de herdeiros fora de P; todo conjunto $S \subset \overline{P}$ desses herdeiros está satisfeito com pelo menos $|S|$ partes, pois caso contrário juntamos S a P, obtendo um conjunto maior, o que por hipótese não é possível (P é máximo!). Assim, pelo teorema dos casamentos é possível dar as partes da herança de $\overline{P}$.

5. Note que $|P| < n$, pois o primeiro herdeiro não está em P. Deste modo, tomamos os elementos de P e refazemos a divisão entre os elementos de P (note que o primeiro herdeiro está em $\overline{P}$ e já pegou sua parte!), repetindo os passos 1 a 4. Como a quantidade de herdeiros sempre diminui, o algoritmo acaba em algum momento.

Na verdade, mesmo que não valha a condição do teorema dos casamentos, temos cobertura mínima e emparelhamentos máximos bem comportados em grafos bipartidos.

Teorema 3 (König). *Em todo grafo bipartido, a quantidade de arestas no emparelhamento máximo é maior ou igual à quantidade de vértices na cobertura mínima. Ou seja, para todo grafo bipartido G, $\alpha'(G) \ge \beta(G)$. Note que isso prova que $\alpha'(G) = \beta(G)$ para grafos bipartidos.*

Demonstração: Sejam U e W as classes do grafo bipartido e seja C uma cobertura minima. Basta provar que existe um emparelhamento com $|C|$ arestas. Considere o seguinte subgrafo bipartido H: uma classe tem $U_1 = U \cap C$ e a outra classe, $W_1 = W \setminus C$. Note que, como coberturas mínimas costumam ter poucas arestas com ambas as pontas nelas, a tendência é haver várias arestas ligando U_1 a W_1.

De fato, o grafo H satisfaz as condições do teorema dos casamentos: seja X um subconjunto de U_1. O conjunto $C \setminus X$ junto com os vizinhos $N_H(X)$ de X em H é uma cobertura de G, pois todas as arestas cobertas por X têm uma ponta em X e a outra em V. Sendo a quantidade de vértices dessa cobertura igual a $|C| - |X| + |N_H(X)| \ge |C|$, devemos ter $|N_H(X)| \ge |X|$. Assim, conseguimos um emparelhamento com $|U_1| = |U \cap C|$ arestas.

Podemos fazer o mesmo com o subgrafo I com classes $U_2 = U \setminus C$ e $W_2 = W \cap C$, e obtemos um emparelhamento com $|W_2| = |W \cap C|$ arestas. Esses emparelhamentos são disjuntos, e podemos juntá-los, obtendo um emparelhamento com $|U \cap C| + |W \cap C| = |C|$ arestas, completando a demonstração. $\square$

Colorações

Dado um grafo $G = (V, A)$, uma coloração de vértices de G é uma função $f\colon V \to \mathbb{N}$, em que cada cor é representada por um número, que satisfaz a condição $\{v, w\} \in A \implies f(v) \neq f(w)$, ou seja, vértices de mesma cor não podem estar ligadas por uma aresta.

A menor quantidade de cores necessárias para pintar os vértices de um grafo G é o *número cromático* de G, denotado por $\chi(G)$.

Há alguns limitantes bem simples.

Proposição 1. *Seja $\omega(G)$ o maior clique contido no grafo. Então $\chi(G) \ge \omega(G)$.*

Demonstração: Basta notar que um grafo completo com k vértices precisa de k cores para ser pintado, já que todo par de vértices está conectado. $\square$

Grafos com poucas arestas devem ter número cromático pequeno, é claro. Isso é confirmado pela

Proposição 2. $\chi(G) \le \frac{1}{2} + \sqrt{2A + \frac{1}{4}}$.

Demonstração: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_k$ os conjuntos de vértices de cada cor, com k mínimo. Então deve existir pelo menos uma aresta saindo de cada X_i para cada X_j (senão, juntamos X_i e X_j e obtemos menos cores!). Logo há pelo menos $\binom{k}{2}$ arestas, ou seja,

$$A \ge \binom{k}{2} \iff A \ge \frac{k(k-1)}{2} \iff k \le \frac{1}{2} + \sqrt{2A + \frac{1}{4}}$$

e o resultado segue pois $\chi(G) \le k$. $\square$

Mas dá para melhorar um pouco mais. Se o grau máximo Δ do grafo é menor, precisamos de menos cores.

Teorema 4. *Para todo grafo G temos $\chi(G) \le \Delta + 1$.*

Demonstração: Indução sobre o número de vértices. O problema é imediato para grafos com um vértice. Se o grafo tem mais de um vértice, considere um vértice v qualquer e retire-o do grafo. Se $G \setminus v$ pode ser pintado com Δ ou menos cores, temos uma cor sobrando e o problema acaba. Se $G \setminus v$ é pintado com $\Delta + 1$ cores (por hipótese de indução, é o máximo de cores necessário), o vértice v tem no máximo Δ vizinhos, e pode ser pintado com a cor que sobrou (entendeu por que $\Delta + 1$?). $\square$

Infelizmente esse limitante não é tão bom, já que há vários exemplos em que $\chi(G)$ é muito menor do que Δ (tome, por exemplo, $K_{1,n}$).

Colorações de Arestas

Também podemos colorir arestas (de fato, fizemos isso quando estudamos a teoria de Ramsey). A regra agora é que arestas que têm um vértice em comum devem ter cores diferentes. Denotamos o número cromático de arestas de um grafo G por $\chi'(G)$.

Teorema 5 (Vizing)**.** *Dado um grafo G, seja Δ o maior grau de um vértice. Então G tem número cromático de aresta Δ ou $\Delta + 1$, ou seja,*

$$\chi'(G) = \Delta \quad \text{ou} \quad \chi'(G) = \Delta + 1.$$

Demonstração: O limitante inferior é óbvio, já que um vértice de grau d exige d cores diferentes. O limitante superior é mais interessante. Provemos, por indução sobre as arestas, que podemos pintar as arestas de um grafo com $\Delta + 1$ cores. Se não temos arestas o resultado é imediato. Se há arestas, retire de G uma aresta vw e pinte o resto do grafo. Por hipótese, precisamos de no máximo $\Delta + 1$ cores. Vamos supor que usamos $\Delta + 1$ cores, pois caso contrário basta usar uma das cores que sobrou.

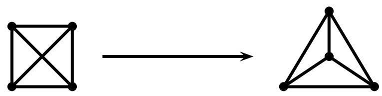
Primeiro, liste as cores usadas nas arestas incidentes em cada vértice. Como há $\Delta + 1$ cores disponíveis, cada vértice tem pelo menos uma cor livre. Se existe uma cor livre comum para v e w, o problema acabou: basta pintar a aresta vw dessa cor. Suponhamos que as cores livres de v e w não coincidem, e para facilitar sejam 0 a cor livre de v e 1 a cor livre de $w_1 = w$. Agora considere o grafo $G(0,1)$ cujos vértices são os vértices de G e cujas arestas são as arestas de cor 0 e 1. Cada componente desse grafo é um caminho ou um ciclo par, sempre alternado arestas de cada cor. Se w_1 e v estão em componentes diferentes, é só trocar as cores do componente de w_1, e 0 se torna uma cor livre para w_1; pinte vw_1 da cor 0. Se w_1 e v estão na mesma componente, ela é um caminho (pois v não pode usar ambas as cores). Seja w_2 o vizinho de v nessa componente; note que vw_2 tem cor 1. Pinte vw_1 de 1 e tire a cor 1 de vw_2; agora devemos pintar essa aresta. Note que a cor livre de v continua sendo 0.

Para isso, fazemos o mesmo! Sendo 2 a cor livre de w_2, considere o grafo $G(0,2)$; se v e w_2 estão em componente diferentes, o problema acaba; suponha então que estão no mesmo componente, que novamente é um caminho, e seja w_3 o vizinho de v. Transferimos a cor 2 de vw_3 para vw_2 e passamos o problema para a aresta vw_3.

Parece que estamos "empurrando o problema com a barriga", mas esse processo ou termina o problema ou vai até que uma cor se repete. Seja w_{j+1} o vértice em que isso acontece, ou seja, a cor livre de w_{j+1} é $i < j+1$. Na verdade temos $i < j$, porque acabamos de "roubar" a cor de vw_{j+1} para pintar vw_j. Vamos examinar o grafo $G(0,i)$. Primeiro note que existe um caminho $vw_i \dots w_{i+1}$; como $j+1 > i+1$, $w_{j+1} \neq w_{i+1}$; além disso, como não saem arestas da cor i de w_{j+1}, w_{j+1} não pode ser um vértice intermediário desse caminho; ou seja, w_{j+1} está em um componente de $G(0,i)$ diferente de $vw_i \dots w_{i+1}$. Se w_{j+1} tiver a cor 0 livre, é só pintar vw_{j+1} de 0 e o problema acaba; se não, é só trocar as cores do componente de w_{j+1} em $G(0,i)$, e pintar vw_{j+1} de 0. □

Grafos planares

Grafos planares são aqueles que podem ser desenhados no plano de modo que arestas não adjacentes não se cruzem. Por exemplo, o grafo completo K_4 é planar.



Enquanto demonstrar que um grafo é planar é simples (basta procurar uma representação no plano), mostrar que um grafo não é planar dá um certo trabalho.

O Teorema de Euler

Um teorema bastante importante em grafos planares é o teorema de Euler. Quando desenhamos o grafo no plano, obtemos F regiões, cada uma chamada *face* do grafo.

Teorema 6 (Fórmula de Euler)**.** *Sendo V, A e F as quantidades de vértices, arestas e faces de um grafo planar conexo,*

$$V - A + F = 2.$$

Demonstração: Indução sobre a quantidade de ciclos. Se não há ciclos, o grafo é uma árvore, e $A = V - 1$, $F = 1$, e verifica-se que o resultado é válido. Se há ciclos, tiramos uma de suas arestas, diminuindo a quantidade de faces em 1 e a quantidade de arestas em 1 também, mantendo $V - A + F$ invariante. □

Exemplo 3. *Um* poliedro de Platão *é um poliedro convexo com as seguintes características:*

- *cada face tem a mesma quantidade de arestas;*
- *de cada vértice sai a mesma quantidade de arestas.*

Prove que os únicos poliedros de Platão são o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.

Solução: Queremos encontrar todos os grafos planares sem vértices de grau 1 e tais que toda face tem a mesma quantidade de arestas.

A tática aqui é contar a quantidade de arestas de várias formas. Primeiro: seja d o grau de todos os vértices. Então $2A = V \cdot d \iff V = \frac{2A}{d}$. Depois, as faces: se cada face tem n arestas, como cada aresta participa de duas faces, $2A = F \cdot n \iff F = \frac{2A}{n}$. Substituindo na relação de Euler, temos

$$\frac{2A}{d} - A + \frac{2A}{n} = 2 \iff \frac{1}{d} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} + \frac{1}{2}$$

Note que devemos ter $d \ge 3$ (senão não é possível montar um sólido) e $n \ge 3$ (cada face deve ter pelo menos três arestas). Agora, note que não podemos ter ambos d, n maiores ou iguais a 4, pois caso contrário teríamos $\frac{1}{d} + \frac{1}{n} \le \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Logo $d = 3$ ou $n = 3$.

Se $d = 3$, temos

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{A} + \frac{1}{6} \implies n < 6$$

e obtemos as soluções $(d, n, A) = (3, 3, 6), (3, 4, 12), (3, 5, 30)$.

Se $n = 3$, obtemos a mesma equação com d no lugar de n, e temos portanto as soluções adicionais $(d, n, A) = (4, 3, 12), (5, 3, 30)$. Note que já listamos $(3, 3, 6)$.

Com isso, temos os seguintes poliedros de Platão:

d	n	V	A	F	Poliedro
3	3	4	6	4	Tetraedro
3	4	8	12	6	Hexaedro
3	5	20	30	12	Dodecaedro
4	3	6	12	8	Octaedro
5	3	12	30	20	Icosaedro

Uma das aplicações do teorema de Euler é limitar a quantidade de arestas. Grafos planares não podem ter muitas arestas.

Lema 1. *Sendo G um grafo planar, $A \le 3V - 6$. Generalizando, sendo g o tamanho do menor ciclo de G,*

$$A \le \frac{g}{g-2}(V-2).$$

Demonstração: Basta contar a quantidade de arestas. Primeiro, como toda face tem pelo menos g arestas e cada aresta participa de duas faces, temos $2A \ge g \cdot F$. Pela fórmula de Euler, $F = A - V + 2$, então

$$2A \ge g(A - V + 2) \iff A \le \frac{g}{g-2}(V-2)$$

O primeiro resultado é obtido fazendo $g = 3$. □

Exemplo 4. *Prove que o grafo completo K_5 não é planar.*

Solução: Basta ver que $A = \binom{5}{2} = 10$ e $V = 5$, e que $10 > 3 \cdot 5 - 6$.

Um dos exercícios pede também para provar que $K_{3,3}$, o grafo bipartido completo com três vértices de cada lado, não é planar. De fato, de certo modo os únicos grafos não planares são esses dois. Um grafo H é *minor* de outro grafo G quando pode ser obtido contraindo arestas de um subgrafo de G. Com isso, conseguimos uma caracterização satisfatória de grafos planares.

Teorema 7 (Kuratowski)**.** *Todo grafo é planar se, e somente se, não tem K_5 ou $K_{3,3}$ como minor.*

A demonstração do teorema é razoavelmente longa e não será colocada aqui.

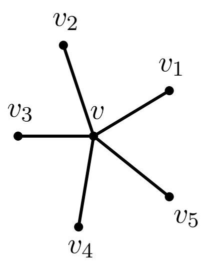
Grafos planares têm número cromático baixo. O conhecido problema em que é possível pintar um mapa com quatro cores é um problema de grafos! Se considerarmos os países como vértices e ligamos dois vértices se os países correpondentes são vizinhos, o problema se reduz a encontrar o número cromático de um grafo planar.

Teorema 8 (Teorema das Cinco Cores)**.** *Todo grafo planar pode ser pintado com cinco cores, ou seja, sendo G um grafo planar,*

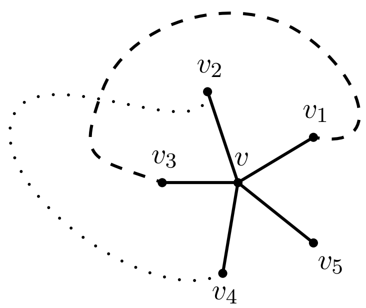
$$\chi(G) \leq 5.$$

Demonstração: A primeira observação é que existe um vértice de grau no máximo 5: caso contrário, a soma dos graus é pelo menos $6V$ e a quantidade de arestas é pelo menos $6V/2 = 3V$, contradizendo o lema anterior.

Procedemos, então, por indução sobre os vértices. O teorema é verdadeiro para grafos com um vértice. Se há mais de um vértice, considere, então, um vértice v de grau no máximo 5. Retire esse vértice e pinte o grafo resultante com cinco cores, o que é possível pela hipótese de indução. Se o grau de v é menor do que 5 então v está adjacente a no máximo quatro vértices, e é só pintar v com uma das cores que sobrou. Falta então o caso em que v tem grau 5. Desenhe o grafo no plano e numere as cores dos vizinhos de v de 1 a 5 no sentido anti-horário:



Considere as cores 1 e 3. Se o vértice v_1 não tem vizinho da cor 3, basta mudar a cor de v_1 para 3 e pintar v de 1. Então considere o grafo cujas arestas são as que ligam vértices de cores 1 e 3. Uma ideia é trocar as cores de uma componente conexa desse grafo. Isso dá certo, exceto quando v_1 e v_3 estão na mesma componente; ou seja, existe um caminho de vértices de cores 1 e 3 alternadas ligando v_1 e v_3. Nesse caso, consideramos v_2 e v_4 e fazemos o mesmo; se eles estiverem em componentes conexas diferentes do grafo cujas arestas são as que ligam vértices de cores 2 e 4, o problema acaba (basta trocar as cores 2 e 4 da componente que tem v_2 e pintar v de 2). Se existir um caminho entre v_2 e v_4 só com vértices de cores 2 e 4, ele vai cruzar com o caminho que liga v_1 e v_3, o que não é possível, já que as cores envolvidas nos dois caminhos são disjuntas. Absurdo, e o teorema está provado.



□

De fato, vale:

Teorema 9 (Teorema das Quatro Cores)**.** *Todo grafo planar pode ser pintado com quatro cores, ou seja, sendo G um grafo planar,*

$$\chi(G) \leq 4.$$

Esse teorema não será demonstrado aqui. De fato, a demonstração desse teorema, até o momento, requer o estudo de 633 casos, que foram verificados por um computador! (a demonstração original, de Appel e Haken, estudou – também com o auxílio de computadores – 1936 casos!)

Problemas

1. Um grafo é *k-regular* se todos os seus graus são iguais a k. Prove que todo grafo bipartido k-regular pode ser particionado em k emparelhamentos perfeitos.

2. Um *quadrado latino* $n \times n$ é um tabuleiro $n \times n$ em que cada casa do tabuleiro tem um número inteiro de 1 a n, e não há números iguais na mesma linha nem na mesma coluna. Um *retângulo latino* é um tabuleiro $r \times n$ nas mesmas condições.

   Prove que todo retângulo latino $r \times n$ com $r < n$ pode ser completado, formando um quadrado latino (em outras palavras, todo retângulo latino está contido em um quadrado latino).

3. Seja A uma matriz $m \times n$ que satisfaz as seguintes condições:

   (1) $m \leq n$;

(2) cada elemento de A é 0 ou 1;

(3) se f é uma função injetora de $\{1, \ldots, m\}$ em $\{1, \ldots, n\}$, então o elemento $(i, f(i))$ é 0 para algum i $(1 \leq i \leq m)$.

Prove que existem conjuntos $S \subseteq \{1, \ldots, m\}$ e $T \subseteq \{1, \ldots, n\}$ que satisfazem

(i) o elemento (i, j) é 0 para qualquer $i \in S$ e $j \in T$;

(ii) $|S| + |T| > n$.

4. (Canadá) Uma tabela com m linhas e n colunas tem um número não negativo em cada entrada. Além disso, se uma linha e uma coluna se intersectam em uma casa com entrada positiva então as somas dos elementos na linha e na coluna são iguais. Prove que $m = n$.

5. (Banco IMO) Um *triângulo esburacado* é um triângulo equilátero virado para cima de lado n, dividido em n^2 triângulos equiláteros unitários, com n triângulos equiláteros unitários virados para cima cortados. Um *diamante* é um losango com lado unitário e ângulos internos $60°$ e $120°$. Prove que um triângulo equilátero esburacado T pode ser coberto por diamantes (sem sobreposições) se, e somente se, todo triângulo equilátero de lado k virado para cima e contido em T tem no máximo k buracos, $1 \leq k \leq n$.

6. Qual é o número cromático de

   (a) um grafo completo K_n?

   (b) um grafo bipartido completo?

   (c) um grafo r-partido completo?

7. Prove que $K_{3,3}$ não é planar.

8. Por que o grafo $K_{4,4}$ não é planar?

9. (OBM) Determine todos os valores de n tais que é possível dividir um triângulo em n triângulos de modo que não haja três vértices alinhados e em cada vértice incida o mesmo número de segmentos.

10. Prove que todo poliedro convexo sem faces quadrangulares nem faces pentagonais tem pelo menos 4 faces triangulares.

11. (São Petersburgo) Um poliedro tem somente faces triangulares. De cada vértice saem pelo menos 5 arestas e não há dois vértices de grau 5 conectadas por uma aresta. Prove que esse poliedro tem uma face cujos vértices têm graus 5, 6 e 6.

Bibliografia

1. B. Bollobás, *Graph Theory: An Introductory Course.*

2. R. Diestel, *Graph Theory.* Springer 2003.

3. M. Aigner, G. M. Ziegler, *Proofs from The Book.* Segunda edição, 2000.

4. P. Feofiloff, Y. Kohayakawa, Y. Wakabayashi. *Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos.* Disponível em

   `http://www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos`

5. Po-Shen Loh, *Matching and Planarity*, disponível em

   `http://www.math.cmu.edu/~ploh/docs/math/mop2010/graph-theory-2-soln.pdf`

6. Marijke van Gans, *proof of Vizing's theorem (for graphs)* (version 3). PlanetMath.org. Disponível em

   `http://planetmath.org/ProofOfVizingsTheoremForGraphs.html`

7. T. Andreescu e Z. Feng, *102 Combinatorial Problems, From the training of the USA IMO team*, Birkhäuser 2003.

Respostas, Dicas e Soluções

1. Use o exemplo 1 para encontrar um emparelhamento perfeito. Depois, proceda por indução.

2. Considere o grafo bipartido em que os vértices são as n colunas em um lado e os números de 1 a n no outro, e ligamos a coluna i ao número j quando podemos colocar o número j na coluna i (ou seja, o número j ainda não apareceu na coluna i). O grafo obtido é $(n-r)$-regular e bipartido, e é só usar o problema anterior.

3. Considere o grafo bipartido em que os vértices são as linhas e as colunas e ligamos a linha i e a coluna j quando $a_{ij} = 1$. A condição 3 diz que o grafo não tem um emparelhamento de tamanho m, ou seja, o emparelhamento máximo tem no máximo $m-1$ arestas. Pelo teorema de König, o tamanho de uma cobertura mínima C é no máximo $m-1$. Considere essa cobertura e tome como conjuntos S e T os vértices que *não* estão em C. Não há arestas ligando esses vértices (estão todos com algum vértice na cobertura!), ou seja, $a_{ij} = 0$ para $i \in S$ e $j \in T$ e, sendo o total de vértices $m+n$, $|S|+|T| = m+n-|C| > m+n-m = n$.

4. Considere o grafo bipartido com linhas e colunas nas classes e ligue linha e coluna se a entrada correspondente é positiva. Provaremos que há um casamento das linhas para as colunas, o que prova que $m \le n$; mas um argumento análogo prova que existe um casamento das colunas para as linhas, e $n \le m$, terminando o problema.

   Suponha que existam k linhas com menos que k colunas vizinhas. Isso que dizer que os elementos não nulos das linhas estão cobertos por essas colunas, mas as linhas não necessariamente cobrem essas colunas. A soma total das linhas é, então, menor ou igual à soma total das colunas, mas as somas das colunas formam um subconjunto das somas das linhas; como há menos colunas do que linhas, temos um absurdo, pois todas as somas são positivas. Com isso, todo conjunto de k linhas tem pelo menos k colunas vizinhas e, pelo teorema dos casamentos podemos casar as linhas com as colunas.

5. Considere um grafo em que os vértices são os triângulos unitários (fora dos buracos) e ligamos dois vértices se os triângulos correspondentes têm um lado em comum. Esse grafo é bipartido (as classes são os triângulos para cima e os triângulos para baixo). Uma contagem simples de triângulos de cada tipo mostra que a condição do enunciado é necessária. Agora provemos que é suficiente. Para isso, basta provar que ela satisfaz a condição de Hall. Suponha, por absurdo, que existem m triângulos virados para baixo com menos de m triângulos virados para cima como vizinhos. Podemos supor sem perda de generalidade que esse subgrafo é conexo. Para terminar, mostre que a quantidade de vizinhos de um conjunto qualquer de m triângulos para baixo, incluindo buracos, é pelo menos $m+k$, sendo k o tamanho do menor triângulo equilátero para cima que contém todos os m triângulos para baixo. Para tanto, proceda por indução: tire um triângulo do bordo do grafo (considere o fecho convexo desse conjunto de triângulos), o que estiver mais para baixo e, entre esses, o que estiver mais à direita. Ao retirar ele, necessariamente retiramos o vizinho para cima imediatamente à direita dele. Assim, a quantidade de vizinhos diminui em um, e acabou.

6. (a) n; (b) 2; (c) r.

7. Basta aplicar o lema com $g=4$, $V=6$ e $A=3\cdot 3=9$. A quantidade de arestas é no máximo $\frac{4}{4-2}(6-2)=8$, mas isso não acontece.

8. Ele contém o grafo $K_{3,3}$.

9. Seja d o grau de cada vértice. Temos $F=n+1$ (não se esqueça da face externa!), $2A=3F$ e $2A=V\cdot d$. Pelo teorema de Euler,

$$\frac{2A}{d}-A+\frac{2A}{3}=2 \iff \frac{1}{d}=\frac{1}{A}+\frac{1}{6}$$

Já resolvemos essa diofantina!

10. Seja t a quantidade de faces triangulares. Então todas as outras $F-t$ faces têm pelo menos 6 arestas. Com isso, temos $2A \ge 3t+6(F-t)=6F-3t$. Sendo $F=A-V+2$, $2A\ge 6A-6V+12-3t \iff 4A\le 6V-12+3t$. Finalmente também temos $2A\ge 3V$, já que cada vértice deve ter grau pelo menos 3. Logo $6V\le 4A\le 6V-12+3t \implies t\ge 4$.

11. Já provamos que um dos vértices tem grau 5. Vamos contar a quantidade de arestas ligando um vértice de grau 5 a um vértice de grau pelo menos 7. Suponha que não há triângulos com vértices de graus 5, 6 e 6. Então cada vértice de grau 5 tem no máximo dois vizinhos de grau 6 e portanto pelo menos 3 vizinhos de grau pelo menos 7; por outro lado, qualquer vértice de grau d tem no máximo $\lfloor d/2\rfloor$ vizinhos de grau 5. Sendo x_i a quantidade de vértices de grau i, essa contagem nos dá

$$3x_5 \le \sum_{d\ge 7} x_d \left\lfloor \frac{d}{2}\right\rfloor \iff x_5 \le \sum_{d\ge 7} x_d\cdot\frac{1}{3}\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor$$

Parece feio, mas $\frac{1}{3}\lfloor\frac{d}{2}\lfloor \le d-6$ para $d \ge 7$. Assim,

$$x_5 \le \sum_{d\ge 7}(d-6)x_d \iff 6x_5 + 6x_6 + \sum_{d\ge 7} 6x_d \le 5x_5 + 6x_6 + \sum_{d\ge 7} d\cdot x_d$$

Mas o lado esquerdo é $6V$ e o lado direito, $2A$, e obtemos $6V \le 2A \iff A \ge 3V$, contradizendo planaridade. Absurdo, e portanto existe o triângulo.