Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Combinatória – Nível 3

Prof. Carlos Shine

Aula 14

Teoria dos Grafos: Circuitos Eulerianos, Ciclos Hamiltonianos, Torneios

Circuitos Eulerianos

Um grafo é dito *euleriano* se existe uma sequência $v_1v_2\dots v_k$ em que os v_i's são vértices e o conjunto dos v_kv_{k+1}'s é o conjunto das arestas, sem repetições. Caso $v_1 = v_k$, a sequência caracteriza um *circuito euleriano*; caso contrário, caracteriza um *caminho euleriano.*

A definição parece complicada mas não é: essencialmente queremos saber quando podemos "desenhar um grafo sem tirar o lápis do papel". Note que essa definição vale para grafos com arestas múltiplas e grafos direcionados.

Há um critério bem simples para verificar se um grafo é euleriano ou não.

Teorema 1 (Euler)**.** *Um grafo não direcionado é euleriano se, e somente se, é conexo e ocorre um dos seguintes casos:*

(i) os graus de todos os vértices são pares. Nesse caso, o grafo admite um circuito euleriano.

(ii) os graus de exatamente dois vértices são ímpares. Nesse caso, o grafo admite um caminho euleriano.

Demonstração: Primeiro, vamos provar que uma das condições é necessária. Suponha que o grafo tenha um caminho euleriano. Então, aparte do começo e o do final do caminho, em cada vértice saímos e entramos a mesma quantidade de vezes. Assim, como cada entrada ou saída conta como uma aresta, o grau de cada vértice, exceto as duas extremidades, é par. Nas duas extremidades, como saímos ou entramos exatamente uma vez a mais do que o contrário, o grau é ímpar. O mesmo vale caso o grafo tenha um circuito euleriano.

Agora, vamos provar que cada condição é suficiente. Suponha que todos os graus sejam pares e faça por indução sobre as arestas. Tome um vértice v qualquer e caminhe até fechar um ciclo (isso é possível pois todos os graus são maiores do que um). Retire o ciclo; isso diminui o grau de cada vértice do ciclo em dois, não alterando sua paridade; aplique a hipótese de indução a cada um dos componentes conexos do grafo que sobrar. Se o ciclo corta os componentes pela primeira vez nos vértices $v_1, v_2, \dots, v_k$, construa um circuito da seguinta maneira: comece de um vértice qualquer do ciclo, caminhe pelo ciclo até v_1, percorra o circuito que passa por v_1, volte ao ciclo, caminhe até v_2, e assim por diante.

Para o caso em que há exatamente dois vértices t e u de grau ímpar, conecte t e u por uma aresta, tornando todos os graus pares. Pelo que foi discutido existe um circuito euleriano, e excluindo a aresta tu obtemos um caminho euleriano. □

Ciclos Hamiltonianos

Um *ciclo hamiltoniano* de um grafo é um ciclo que contém todos os vértices do grafo. Todo grafo que admite um ciclo hamiltoniano é dito hamiltoniano.

Ao contrário de circuitos de Euler, não existe um critério simples para definir se um grafo é hamiltoniano ou não. Mas há algumas condições suficientes.

Teorema 2 (Dirac)**.** *Seja G um grafo com n vértices, cada um com grau pelo menos $n/2$. Então G é hamiltoniano.*

Demonstração: Suponha que o maior caminho no grafo tem t vértices $v_1, v_2, \ldots, v_t$. Vamos provar que existe um ciclo com t vértices também. Todos os vizinhos de v_1 e v_t pertencem ao caminho, senão haveria um caminho maior. Cada vértice tem grau maior ou igual a $t/2$. Além disso, se $v_1 v_k$ é uma aresta então $v_{k-1} v_t$ não é aresta, senão encontramos o ciclo $v_1 v_k v_{k+1} \ldots v_t v_{k-1} v_{k-2} \ldots v_2$. Isso quer dizer que todo vizinho de v_1 "bloqueia" pelo menos um vértice diferente no ciclo que pode ser vizinho de v_t. Mas há pelo menos $t/2$ vértices vizinhos de v_1, e isso bloquearia $t/2$ vizinhos de v_t, o que não é possível. Logo existe o ciclo.

Para terminar, basta provar que $t = n$. Suponha que $t < n$, de modo que existe um vértice w fora do ciclo/caminho. Mas o grafo é conexo, pois o menor componente conexo tem pelo menos $n/2 + 1$ vértices, então existe um caminho ligado w a algum vértice v_i do ciclo, e obtemos um caminho $w \to v_i v_{i+1} \ldots v_{i-1}$ com tamanho maior do que t, absurdo. □

Ciclos de deBruijn

Para certos grafos podemos usar a ideia de grafos eulerianos para mostrar que outro grafo é hamiltoniano. A ideia é *transformar vértices em arestas.*

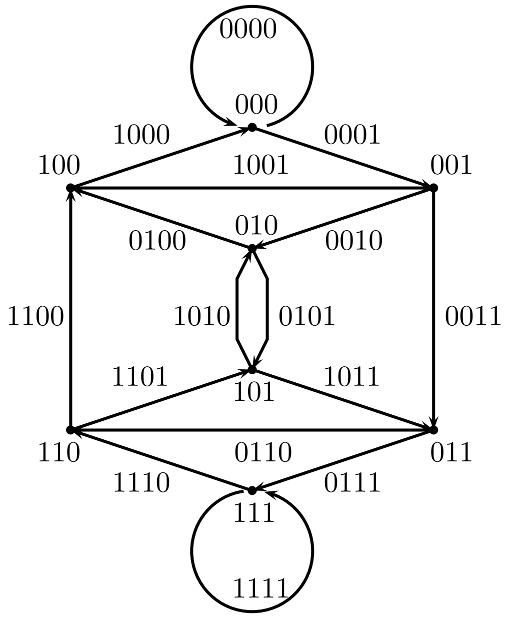
Exemplo 1. *Dado um conjunto de símbolos A e um inteiro positivo k, uma sequência de deBruijn é uma sequência cíclica s tal que toda sequência de tamanho k de símbolos de A aparece exatamente uma vez como k termos consecutivos de s. Por exemplo, uma sequência de deBruijn em $A = \{0, 1\}$ com $k = 3$ é* 00010111*, já que as sequências que aparecem são* 000*,* 001*,* 010*,* 101*,* 011*,* 111*,* 110 *e* 100 *(as duas últimas aparecem ao "girar" a sequência).*

Prove que existe uma sequência de deBruijn para todo k com $A = \{0, 1\}$ (na verdade, existe para todo A finito).

Solução: Note que queremos mostrar que o grafo G_k cujos vértices são as 2^k sequências binárias e ligamos (na ordem) duas sequências v e w quando as $k - 1$ últimos termos de v coincidem com as $k - 1$ primeiros termos de w é hamiltoniano. Por exemplo, para $k = 3$ ligamos 100 a 000 e 001.

Para $k = 1$, temos 01; para $k = 2$, temos 0011. Apesar de não ser por indução, para construir um ciclo hamiltoniano em G_k usamos o grafo G_{k-1}.

Note que o in-grau e o out-grau de cada vértice é 2 (os in-vizinhos são 0 ou 1 seguidos dos $k-2$ primeiros termos do vértice e os out-vizinhos são os $k-2$ últimos termos do vértice seguidos de 0 ou 1). Com isso, G_{k-1} tem um circuito euleriano. Associe a cada aresta vw a sequência formada pelo primeiro termo de v, os $k-2$ termos comuns de v e w e o último termo de w. Por exemplo, a aresta $0110 \to 1101$ corresponde a 01101. Note que isso induz um ciclo hamiltoniano, já que toda sequência binária de tamanho k induz unicamente duas sequências binárias de tamanho $k-1$ correspondentes.



$\square$

Torneios

Um *torneio* é um grafo direcionado em que todo par de vértices é ligado por uma aresta. Aqui estamos interessados em estudar as possíveis direções que essas arestas podem tomar.

O nome torneio vem do fato de que todo torneio de turno único de algum jogo em que não há empates pode ser modelado por esse grafo.

Vamos provar alguns fatos.

Teorema 3. *Seja $N^+(v)$ os vértices que recebem flechas de v e $N^{++}(v)$ os vértices que recebem flechas de algum vértice de $N^+(v)$, mas não diretamente de v. Todo torneio tem um vértice v tal que todo outro vértice pertence a $N^+(v)$ ou a $N^{++}(v)$. Ou seja, existe um time tal que todos ou perderam desse time ou perderam de alguém que perdeu desse time.*

Demonstração: Considere o time v que ganhou mais jogos. Suponha por absurdo que exista um vértice w fora de $N^+(v)$ e de $N^{++}(v)$. Então esse time ganhou de v (pois está fora de $N^{(}v))$ e de todos os elementos de $N^+(v)$ (pois está fora de $N^{++}(v)$). Mas isso quer dizer que w ganhou mais jogos do que v, absurdo. $\square$

Uma técnica bastante útil para resolver problemas é a *ordem mediana*, que consiste em ordenar os vértices de um torneio em uma sequência $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de modo que a quantidade de arestas (v_i, v_j) com $i < j$ é máxima (ou seja, a quantidade de arestas viradas "para a direita" é máxima). Ela tem as seguintes propriedades:

Lema 1. *Seja $v_1, v_2, \ldots, v_n$ uma ordem mediana de um torneio. Então*

- *A aresta ligando v_i a v_{i+1} está virada para a direita;*
- *Sendo $i < j$, o vértice v_i ganha de pelo menos a metade dos vértices $v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_j$ e v_j perde de pelo menos metade dos vértices $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}$.*

Demonstração: Na verdade, o segundo item prova o primeiro (basta fazer $j = i + 1$). Para provar o segundo item, basta trocar de lugar os vértices v_i e v_j. Se houver mais arestas (v_k, v_i), $i < k \leq j$, do que (v_i, v_k), $i < k \leq j$, a troca aumentaria a quantidade de arestas para a direita, absurdo. O mesmo argumento funciona para v_j. $\square$

Agora, vamos provar alguns teoremas.

Exemplo 2. *Prove que todo torneio tem um caminho hamiltoniano.*

Solução: Considere uma ordem mediana. Pelo primeiro item do lema anterior, a aresta $v_i v_{i+1}$ está virada para a direita. Então $v_1 v_2 \ldots v_n$ é um caminho hamiltoniano. $\square$

Exemplo 3 (Conjectura de Seymour da segunda vizinhança para torneios)**.** *Prove que em todo torneio existe um vértice v com $|N^{++}(v)| \geq |N^{+}(v)|$.*

Solução: Considere uma ordem mediana, sendo v o último vértice. Provaremos por indução algo um pouco mais forte: chamaremos um vértice de $N^{-}(v)$ *bom* se existir t antecedendo u na ordem mediana tal que $v \to t$ e $t \to u$. Mostraremos que $|N^{+}(v)|$ é no máximo a quantidade de vértices bons (note que todo vértice bom pertence a $N^{++}(v)$).

Seja r o primeiro vértice ruim na ordem mediana (se não houver vértice ruim, a segunda propriedade de ordem mediana resove o problema, ou seja, $|N^{++}(v)| \geq |N^{-}(v)| \geq |N^{+}(v)|$). Então $r \to v$. Pela hipótese de indução, a quantidade de vértices entre r e v em $N^{+}(v)$ é no máximo a quantidade de vértices bons, de modo que basta provar o mesmo para os vértices antes de r. Agora considere os vértices de $N^{+}(v)$ antes de r, ou seja, $v \to u$, u antes de r. Como r é ruim, não pode ocorrer $u \to r$, ou seja, deve ocorrer $r \to u$, isto é, $u \in N^{+}(r)$. Mas a segunda propriedade diz que no máximo metade dos vértices antes de r estão em $N^{+}(r)$, ou seja, a quantidade de vértices de $N^{(}v)$ antes de r é no máximo metade deles. Mas como r é o *primeiro* vértice ruim, todos os outros, que são mais da metade, são bons, e o problema acabou.

Observação 1. *A conjectura de Seymour diz que o resultado acima vale para todo grafo orientado.*

Problemas

1. Quando um grafo direcionado tem um circuito euleriano?

2. Um cubo deve ser montado com pedaços de arame; cada pedaço de arame pode ser dobrado em torno de um vértice. No mínimo quantos pedaços são necessários para montar o cubo?

3. Considere um grafo cujos vértices têm todos grau $2k$. Prove que é possível orientar as arestas do grafo de modo que o in-grau de cada vértice seja k.

4. Um 2-*fator* é um grafo em que todo vértice tem grau 2. Prove que todo grafo cujos vértices têm todos grau $2k$ ($2k$-regular) pode ser particionado em k 2-fatores.

5. Prove que se um retângulo R pode ser particionado em retângulos que possuem um dos lados com medida igual a um número inteiro, R possuirá um lado de medida inteira.

6. Pinte as arestas de um dodecaedro com três cores de modo que arestas de mesma cor não tenham um vértice em comum.

7. Considere um cavalo sobre um tabuleiro $4 \times n$. É possível, em $4n$ movimentos consecutivos, ele visitar cada uma das casas do tabuleiro e retornar à casa original?

8. (Banco IMO) Seja n um inteiro positivo par. Mostre que existe uma permutação $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $(1, 2, \ldots, n)$ tal que para cada i, $1 \le i \le n$, tal que x_{i+1} é igual a $2x_i$, $2x_i - 1$, $2x_i - n$ ou $2x_i - n - 1$. Aqui, $x_{n+1} = x_1$.

9. Há n cidades em um certo país, quaisquer duas ligadas por uma estrada de mão única. Prove que se $n \ne 2$ e $n \ne 4$ então a direção do movimento através das estradas pode ser escolhida de forma que se possa ir de uma cidade a qualquer outra sem passar por mais de uma cidade. Prove também que para o caso $n = 2$ ou $n = 4$ tal organização de tráfico é impossível.

10. (OBM) Em um torneio de tênis de mesa (no qual nenhum jogo termina empatado), cada um dos n participantes jogou uma única vez contra cada um dos outros. Sabe-se que, para todo $k > 2$, não existem k jogadores $J_1, J_2, \ldots, J_k$ tais que J_1 ganhou de J_2, J_2 ganhou de J_3, J_3 ganhou de J_4, $\ldots$, J_{k-1} ganhou de J_k, J_k ganhou de J_1.

    Prove que existe um jogador que ganhou de todos os outros e existe um jogador que perdeu de todos os outros.

11. (Conjectura de Sumner para arborescências) Uma *arborescência* é uma árvore direcionada com a seguinte propriedade: um vértice (raiz) tem in-grau 0 e os demais, in-grau 1. Prove que todo torneio com $2n-2$ vértices contém qualquer arborescência em n vértices.

    Observação 2. *A conjectura de Sumner diz que toda árvore direcionada em n vértices está contida em qualquer torneio com $2n - 2$ vértices. Ela continua em aberto, mas já foi provada (em 2011!) para todo n suficientemente grande.*

12. Um torneio é *transitivo* se satisfaz a seguinte propriedade: se a ganhou de b e b ganhou de c então a ganhou de c. Sendo T um torneio, prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

    (i) T é transitivo;

    (ii) T não tem ciclos;

    (iii) T não tem ciclos de tamanho 3;

    (iv) O conjunto dos out-graus de T é $\{0, 1, \ldots, n-1\}$;

    (v) T tem exatamente um caminho hamiltoniano.

Bibliografia

1. B. Bollobás, *Graph Theory: An Introductory Course.*

2. R. Diestel, *Graph Theory.* Springer, 2003.

3. M. Aigner, G. M. Ziegler, *Proofs from The Book.* Segunda edição, 2000.

4. T. Andreescu e Z. Feng, *102 Combinatorial Problems, From the training of the USA IMO team*, Birkhäuser 2003.

5. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph Theory.* Springer, 2007.

6. Po-Shen Loh, *Combinatorial Gems*, disponível em
`http://www.math.cmu.edu/~ploh/docs/math/mop2009/combin-gems.pdf`

Respostas, Dicas e Soluções

1. Em cada vértice, o in-grau é igual ao out-grau.

2. 4. Há inicialmente oito vértices de grau ímpar, originando pelo menos 4 caminhos. Para fazer um exemplo com 4 arames, basta considerar quatro pedaços em forma de U.

3. Considere um circuito euleriano e oriente em um dos sentidos do circuito.

4. Considere uma orientação em torno de um circuito euleriano. Em seguida, separe cada vértice v em dois vértices v_+ e v_- e quando houver aresta (v, w) ligue v_- para w_+. Isso origina um grafo bipartido k-regular, que pode ser particionado em k emparelhamentos. Junte de volta os vértices v_+ e v_-, e isso gera k 2-fatores.

5. Considere o grafo em que os vértices são os vértices dos retângulos e ligamos, para cada retângulo, os dois pares de vértices cuja distância é inteira (se todos os lados do retângulo são inteiros, escolha dois lados paralelos quaisquer). Com exceção dos vértices de R, que têm grau 1, todos os vértices têm grau par. Assim, os componentes conexos do grafo têm um circuito ou um caminho euleriano. Em particular, o componente conexo que contém um dos vértices de R tem um caminho euleriano que leva até outro vértice de R. Andando por esse caminho conseguimos uma dimensão inteira para R.

6. Considere um ciclo hamiltoniano, pinte-o de cores alternadas e pinte as outras arestas da terceira cor.

7. Não é possível. Suponha por absurdo que exista um ciclo hamiltoniano. Das quatro linhas, pinte a primeira e a última de preto e a segunda e a terceira de branco. Como todo movimento partindo de uma casa preta deve ir para uma casa branca e a quantidade de casas pretas é igual à quantidade de casas brancas, as cores das casas em que o cavalo anda devem se alternar; ou seja, todo movimento é de preto para branco ou de branco para preto, ou seja, alterna-se movimentos do meio para a borda e vice-versa. Mas, se pintarmos como tabuleiro de xadrez (digamos, de azul e vermelho), temos que metade da borda fica de uma só cor, e novamente os movimentos alternam-se de cor; mas como cada dois movimentos pousam em casas da borda, todas as casas da borda deveriam ter a mesma cor, absurdo.

8. A ideia é copiar um ciclo de deBruijn, ou seja, vamos construir um grafo direcionado com $n/2 = k$ vértices, cada um correspondendo a um número de 1 a k, e n arestas, cada uma correspondendo a um número de 1 a n. Para facilitar, vejamos tudo módulo n, de modo que $x_{i+1} \equiv 2x_i - 1 \pmod{n}$ ou $x_{i+1} \equiv 2x_i \pmod{n}$. As arestas agora são claras: as arestas que saem de i vão para e são rotuladas $2i$ e $2i-1$ (isso feito módulo k para vértices); isso já define o grafo, mas note que as arestas que entram em i são rotuladas i e $i+k$. Isso pode criar loops, mas não há problemas nisso. Agora, cada vértice tem in-grau e out-grau iguais a 2, então tem um circuito *euleriano*. A sequência é essa: se x_i entra em um vértice j e sai x_{i+1}, temos $x_i \equiv j \pmod{k} \iff 2x_i \equiv 2j \pmod{n}$, e $x_{i+1} = 2j$ ou $x_{i+1} = 2j-1$, e portanto $x_{i+1} \equiv 2x_i \pmod{n}$ ou $x_{i+1} \equiv 2x_i - 1 \pmod{n}$, como queríamos.

9. Considere a seguinte construção: sejam $1, 2, \ldots, n$ os vértices. Se $i-j$ é ímpar, $i<j$, faça $i \to j$; se $i-j$ é par, $i<j$, faça $j \to i$. Essa construção resolve para todo n ímpar: se i e j, $i<j$, tem paridades diferentes (ou seja, $i-j$ é ímpar), há um caminho direto $i \to j$, e o caminho $j \to j+1 \to i$ (se $j=n$, i é par e faça $n \to 1 \to i$); se i e j tem paridades iguais, já um caminho direto $j \to i$ e o caminho $i \to i+1 \to j$.

   Para n par, vejamos os caminhos de n para i, $n-i$ ímpar (ou seja, i ímpar), já que os outros caminhos já estão definidos. Para $i>1$, basta fazer $n \to 2 \to i$; falta s'o ajeitar n para 1. Para consertar esse problema, mudamos a aresta entre 3 e n para $n \to 3$. Isso torna o caminho $n \to 3 \to 1$ viável; o caminho $3 \to n$ pode ser trocado por $3 \to 1 \to n$ e o caminho $2 \to 3 \to n$ pode ser trocado por $2 \to 5 \to n$ para $n > 4$.

   Falta verificar que $n=2$ e $n=4$ não são possíveis. $n=2$ é imediato. Para $n=4$, note que para isso ser possível todo vértice v deve ter out-grau 2 e in-grau 1 ou vice-versa. Suponha sem perda de generalidade, $1 \to 2$, $1 \to 3$ e $4 \to 1$. O caminho de 1 para 4 deve então passar por 2 ou 3; podemos supor sem perda que é por 2, ou seja $2 \to 4$. O caminho de 3 para 1 deve passar por 4 (pois não há aresta de 2 para 1), logo $3 \to 4$. O caminho de 2 para 3 nos força $2 \to 3$, mas aí não tem caminho de 3 para 2.

   Observação 3. *Há várias outras construções. Encontre a sua!*

10. Considere um caminho hamiltoniano $v_1v_2\dots v_n$. Se existir aresta $v_k \to v_1$, então forma-se o ciclo $v_1v_2\dots v_kv_1$. Então v_1 venceu todos; analogamente, v_n perdeu de todos.

11. $v_1, v_2, \dots, v_{2n-2}$ uma ordem mediana do torneio. Indução em n, com a hipótese adicional de que cada árvore contém pelo menos metade de qualquer conjunto de vértices $v_1, v_2, \dots, v_i$ para cada i. A base $n = 2$ é imediata; vamos para o passo. Seja T uma arborescência com n vértices. Considere uma folha v de T e os vértices $v_1, v_2, \dots, v_{2n-4}$. Pela hipótese de indução a arborescência $T' = T \setminus \{v\}$ está contida no torneio de vértices $v_1, v_2, \dots, v_{2n-4}$. Seja w o vértice ao qual v está ligado e v_i o vértice correspondente a w no torneio. Pela segunda propriedade da ordem mediana, v_i ganha de pelo menos metade dos vértices $v_{i+1}, \dots, v_{2n-2}$, num total de pelo menos $\frac{(2n-2)-i}{2} = n - 1 - i/2$ candidatos para correspondente de v. Mas há pelo menos $(i-1)/2$ vértices entre $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$ em T', de modo que entre $v_{i+1}, \dots, v_{2n-2}$ há no máximo $n-1-(i+1)/2$. Isso faz sobrar um candidato para v, e é só designar esse candidato. Não é difícil verificar que a propriedade adicional é satisfeita também.

12. Basta provar que (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (v) $\Longrightarrow$ (i).

    - (i) $\Longrightarrow$ (ii). Suponha que um torneio transitivo tenha um ciclo $v_1v_2\dots v_kv_1$. $v_1 \to v_i$ e $v_i \to v_{i+1}$ implica $v_1 \to v_{i+1}$, ou seja, indutivamente $v_i \to v_k$. Mas no ciclo $v_k \to v_1$, absurdo.
    - (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Imediato.
    - (iii) $\Longrightarrow$ (iv). Primeiro provamos que não há ciclos (o que seria (iii) $\Longrightarrow$ (ii)). Suponha que exista um ciclo e seja $v_1v_2\dots v_kv_1$ o menor deles, $k > 3$. Note que não pode ocorrer $v_3 \to v_1$, senão fecha um ciclo de tamanho 3. Logo $v_1 \to v_3$. Mas isso gera o ciclo $v_1v_3\dots v_kv_1$, que é menor, absurdo. Agora, para terminar, basta usar o problema 10 e proceder por indução, retirando o vencedor do grafo.
    - (iv) $\Longrightarrow$ (v). O primeiro vértice de um caminho hamiltoniano só pode ser o vértice de grau $n-1$; o segundo só pode ser o de grau $n-2$, e assim por diante. Assim só pode haver um caminho hamiltoniano.
    - (v) $\Longrightarrow$ (i). Considere uma ordem mediana $v_1, v_2, \dots, v_n$, de modo que $v_1v_2\dots v_n$ é o único caminho hamiltoniano. Suponha que exista uma aresta $v_j \to v_i$ com $i < j$, j mínimo. Então existe outro caminho $v_1v_2\dots v_{i-1}v_{i+1}\dots v_jv_iv_{j+1}\dots v_n$ hamiltoniano, absurdo (utilizamos aqui o fato de j ser mínimo). Logo todas as arestas são da forma $v_i \to v_j$, $i < j$, e o torneio é transitivo.

    Note que isso prova que há exatamente $n!$ torneios transitivos: basta permutar os vértices em ordem dos graus.