Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Combinatória – Nível 3

Prof. Carlos Shine

Aula 15

Continuidade discreta e algoritmos

"Entre esses dois valores aparece o que quero": Continuidade

Considere a seguinte situação: você está de um lado de um rio e o pote de ouro do duende está do outro lado do rio. Para chegar até o pote, você necessariamente teria que atravessar o rio, certo? Expressando de outro modo: *existe* um ponto no rio por onde você vai passar.

Um outro exemplo: um termômetro de farmácia marca 35° e você vai medir sua temperatura: ela é de 37°. Em algum momento o termômetro vai marcar $36{,}2342545^\circ$, certo?

Mais um exemplo: se o Tabajara Futebol Clube começou 2008 com 49939 derrotas e começou 2009 com 50103 derrotas então em algum momento de 2008 eles estavam com exatamente 50000 derrotas.

Por que sabemos desses fatos? A resposta é simples: as variáveis que estudamos (distância; temperatura; número de derrotas) têm uma variação "suave", e para essas variáveis podemos aplicar argumentos de *continuidade*.

Cuidado, porém! Nem todas as variáveis funcionam assim (por exemplo, a quantidade de pontos de lançamentos consecutivos de um dado), e na verdade nos problemas devemos *provar* que isso ocorre.

Exemplo 1. *Prove que existem* 100 *números consecutivos entre os quais há exatamente* 15 *números primos.*

Solução: Entre 1 e 100 há 25 primos (verifique!) e entre os números $101! + 2$, $101! + 3$, $\ldots$, $101! + 101$, em que $101! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 101$, não há primos (o primeiro é múltiplo de 2; o segundo é múltiplo de 3; $\ldots$; o último é múltiplo de 101).

"Avançando" uma unidade, a quantidade de primos em intervalos de 100 números consecutivos vai aumentando ou diminuindo de no máximo 1 unidade a cada passo. Assim, como era 25 inicialmente, pode ser igual a 0 e aumenta ou diminui de 1 em 1, em algum momento é igual a 15. $\square$

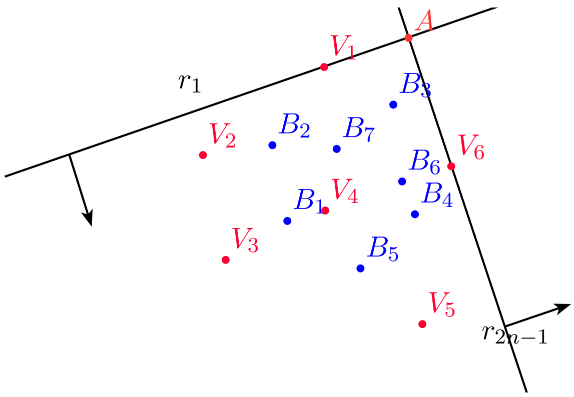
Exemplo 2. *(EUA) Seja n um inteiro maior do que* 1*. São dados $2n$ pontos no plano de modo que entre eles não haja três colineares. Dos $2n$ pontos, n são coloridos de azul e os demais n são coloridos de vermelho. Uma reta do plano é dita* balanceada *quando passa por um ponto azul e um ponto vermelho e, em cada lado da reta, a quantidade de pontos azuis e vermelhos são iguais.*

Prove que existem pelo menos duas retas balanceadas.

Solução: Primeiro, consideramos o *fecho convexo* dos $2n$ pontos, que é o menor polígono que contém os $2n$ pontos. A melhor maneira de visualizar um fecho convexo é imaginar os $2n$ pontos como pregos e um elástico muito pequeno, mas que se estende infinitamente. Estenda o elástico até que ele contenha todos os $2n$ pontos e solte o elástico; a figura formada pelo elástico é o fecho convexo.

Se o fecho convexo contém pontos das duas cores, o problema acaba: de fato, considere um conjunto de vértices consecutivos do fecho convexo, todos azuis (pode até ser um ponto só). Então os vizinhos dos dois extremos são vermelhos, de modo que há pelo menos dois pares de vértices consecutivos de cores diferentes. Esses pares de vértices consecutivos determinam retas balanceadas: em um lado há 0 ponto de cada cor e do outro, $n-1$ pontos de cada cor.

Então ficamos somente com o caso em que há somente, digamos, pontos vermelhos no fecho convexo. Seja A um dos vértices e gire um reta em torno de A, no sentido anti-horário, obtendo $2n-1$ retas $r_1, r_2, \ldots, r_{2n-1}$ que passam por A e um dos outros $2n-1$ pontos. A cada reta, a diferença entre a quantidade de pontos azuis e vermelhos do lado "direito" da reta aumenta ou diminui em 1. Porém, inicialmente a diferença é 2 (já que a última reta passa por dois vermelhos, sobram dois azuis a mais) e no final a diferença é 0 (não há pontos à direita). Então, em algum momento é igual a 0 (nesse caso o último; mas será que existem mais?).



Considere a *primeira* reta AB_i cuja diferença é zero. Então a diferença da reta anterior é 1 (pois se fosse negativo, lembrando que inicialmente era 2 então teria chegado a zero antes), de modo que na reta tinha um ponto azul a mais: esse ponto é B_i. Logo B_i é azul, e o problema acabou, pois achamos uma reta para cada vértice do fecho convexo, que tem pelo menos três vértices. □

"OK, consigo achar, mas vai dar um trabalhinho": Algoritmos

Muitas vezes não conseguimos exibir explicitamente algo mas conseguimos descrever como obtê-lo. Essas descrições, feitas de maneira precisa, são chamadas de *algoritmos*. Os algoritmos devem satisfazer duas condições:

1. Funcionar (aposto que essa condição você conhecia!);

2. Terminar.

O item 2 parece bobo, mas não é. Só para ilustrar: um motivo por que 1 não é primo é fazer com o algoritmo que fatora números em primos descrito por "dividir pelo menor primo positivo que é divisor até dar 1" termine.

Exemplo 3. *(OBM) Isabel tem dois baralhos, cada um com 50 cartas. Em cada um dos baralhos estão escritos os números de 1 a 100 (em cada carta estão escritos dois números, um em cada face da carta). Por um defeito de fabricação, a distribuição dos números nas cartas não é a mesma nos dois baralhos (por exemplo, em um dos baralhos o 1 aparece na mesma carta do 2; no outro, o 1 aparece com o 76).*

Mostre como Isabel deve fazer para que, ao colocar as 100 cartas sobre uma mesa, as faces voltadas para cima mostrem todos os números de 1 a 100.

Solução: Podemos fazer isso tomando qualquer carta de qualquer baralho, colocando sobre a mesa e vendo seu verso. Depois disso procuramos a carta de mesmo número do verso (procurando no outro baralho, já que já foi usada no primeiro baralho). Fazemos com esta carta o mesmo que foi feito com a primeira carta. Continua-se a fazer isso até fechar um ciclo (um mesmo número que já saiu em um baralho sair no outro).

Quando um ciclo for fechado pega-se outra carta e começa um novo ciclo. Fazendo isso até o final das cartas as faces voltadas para cima mostrarão todos os números de 1 a 100.

Note que o processo termina, pois a quantidade de cartas que sobram após fechar cada ciclo diminui. □

Exemplo 4. *(OBM) Considere todos os círculos cujas circunferências passam por três vértices consecutivos de um polígono convexo. Prove que um desses círculos contém todo o polígono.*

Solução: Sejam A e B vértices consecutivos do polígono. Tome um círculo que contém todo o polígono e tenha AB como corda. Diminuindo o círculo, mas mantendo AB como corda fazemos com que sua borda passe por um outro vértice P. Se A, B e P são vértices consecutivos, acabou. Caso contrário, suponha que A e P não seja consecutivos. Aumentamos o círculo, mantendo AP como corda, até que sua borda passe por um vértice Q entre A e P (nesse caso, o círculo ainda contém o polígono; você consegue ver por quê?). Se A, Q e P são consecutivos, acabou. Se não, tome dois vértices não consecutivos e continue.

Note que a quantidade de vértices entre as extremidades dos arcos sempre diminui; então o procedimento vai acabar, e nesse momento teremos três vértices consecutivos. □

Problemas

1. (OBM) Vamos chamar de *garboso* o número que possui um múltiplo cujas quatro primeiras casas de sua representação decimal são 2008. Por exemplo, 7 é garboso pois 200858 é múltiplo de 7 e começa com 2008. Observe que $200858 = 28694 \times 7$.

   (a) Mostre que 17 é garboso.

   (b) Mostre que todos os inteiros positivos são garbosos.

2. (OBM) Sobre uma reta há um conjunto S de $6n$ pontos. Destes, $4n$ são escolhidos ao acaso e pintados de azul; os $2n$ demais são pintados de verde. Prove que existe um segmento que contém exatamente $3n$ pontos de S, sendo $2n$ pintados de azul e n pintados de verde.

3. Seja A um conjunto de $2n$ pontos no plano, não havendo três colineares. Prove que para cada par de pontos $X, Y \in A$ existe uma reta que particiona A em dois conjuntos de n pontos, sendo que X e Y pertencem a conjuntos diferentes.

4. (OBM) O planeta *Zork* é esférico e tem várias cidades. Dada qualquer cidade existe uma cidade antípoda (i.e., simétrica em relação ao centro do planeta).

   Existem em Zork estradas ligando pares de cidades. Se existe uma estrada ligando as cidades P e Q então também existe uma estrada ligando as cidades P' e Q', onde P' é a antípoda de P e Q' é a antípoda de Q. Além disso, estradas não se cruzam e dadas duas cidades P e Q sempre é possível viajar de P a Q usando alguma sequência de estradas.

   O preço da *Kriptonita* em *Urghs* (a moeda planetária) em duas cidades ligadas por uma estrada difere por no máximo 100 Urghs. Prove que existem duas cidades antípodas onde o preço da Kriptonita difere por no máximo 100 Urghs.

5. (IMO) Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais que verificam as seguintes condições:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1$$

   e

$$|x_i| \leq \frac{n+1}{2} \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

   Demonstre que existe uma reordenação (permutação) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tal que

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}.$$

6. (IMO) Sejam n, p, q inteiros positivos com $n > p + q$. Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$ inteiros satisfazendo as seguintes condições:

   (a) $x_0 = x_n = 0$;

   (b) para cada inteiro i com $1 \leq i \leq n$,

$$x_i - x_{i-1} = p \text{ ou } x_i - x_{i-1} = -q.$$

   Mostre que existe um par (i, j) de índices com $i < j$ e $(i, j) \neq (0, n)$ tal que $x_i = x_j$.

7. (Banco IMO) Seja $A_0 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ uma sequência de números reais. Para cada $k \geq 0$, a partir da sequência $A_k = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ construimos uma nova sequência A_{k+1} como se segue:

(a) Escolhemos uma partição $I \cup J = \{1, 2, \dots, n\}$ tal que a expressão

$$\left| \sum_{i \in I} x_i - \sum_{j \in J} x_j \right|$$

é mínima. Os conjuntos I e J podem ser vazios; nesse caso, a soma é zero. Em caso de haver mais de uma partição, escolhe-se uma ao acaso.

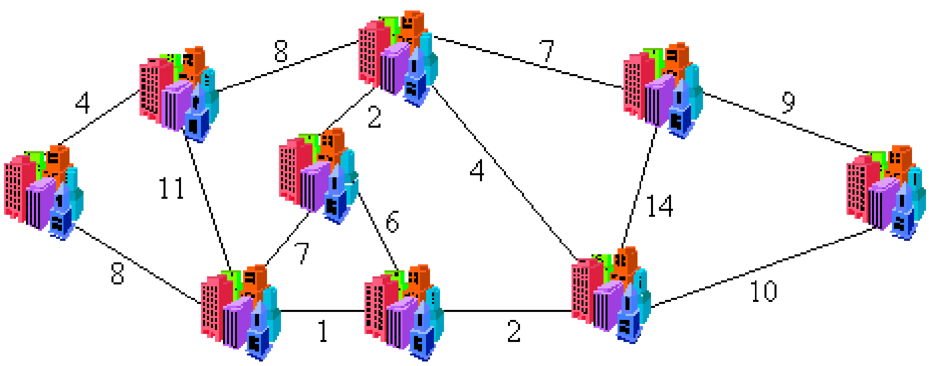
(b) Então $A_{k+1} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, em que $y_i = x_i + 1$ se $i \in I$ e $y_i = x_i - 1$ se $i \in J$.

Prove que, para algum inteiro positivo k a sequência A_k contém um elemento x tal que $|x| \geq \frac{n}{2}$.

8. (IMO) Seja $\mathcal{S}$ um conjunto finito de dois ou mais pontos do plano. Em $\mathcal{S}$ não há três pontos colineares. Um *moinho de vento* é um processo que começa com uma reta ℓ que passa por um único ponto $P \in \mathcal{S}$. Roda-se ℓ no sentido dos ponteiros do relógio ao redor do pivot P até que a reta encontre pela primeira vez um outro ponto de $\mathcal{S}$, que denotaremos por Q. Com Q como novo pivot, a reta continua a rodar no sentido dos ponteiros do relógio até encontrar outro ponto de $\mathcal{S}$. Este processo continua sem parar, sendo sempre o pivot algum ponto de $\mathcal{S}$.

   Demonstre que se pode escolher um ponto $P \in \mathcal{S}$ e uma reta ℓ que passa por P tais que o moinho de vento resultante usa cada ponto de $\mathcal{S}$ como pivot infinitas vezes.

9. (OPM) No reino da Kruskalândia, há estradas ligando as cidades, como mostra o mapa a seguir. Todas as estradas são de terra e por uma estrada pode-se transitar em ambos os sentidos. O comprimento de cada estrada, em quilômetros, está indicado, fora de escala, no mapa a seguir.



   O rei da Kruskalândia resolveu pavimentar algumas estradas do reino de modo que, a partir de qualquer cidade, fosse possível atingir qualquer outra viajando somente por estradas pavimentadas. Como os cofres do reino andavam meio vazios, resolveu economizar o máximo possível. Chamou, então, o matemático da corte, que prontamente resolveu o problema. Agora é a sua vez.

(a) Qual é o menor número de estradas que o rei precisa pavimentar?

(b) Qual é o menor número de quilômetros de estrada que ele precisa pavimentar? Indique, na folha de respostas, uma possível escolha de estradas para isto.

10. (OBM) Um conjunto de casamentos é *instável* se duas pessoas que não estão casadas preferem-se mutuamente a seus cônjuges. Por exemplo, se Alessandra e Daniel estão casados e se Júlia e Robinson estão casados, mas Daniel prefere Júlia a Alessandra e Júlia prefere Daniel a Robinson, então o conjunto de casamentos Alessandra-Daniel e Júlia-Robinson é instável. Se um conjunto de casamentos não é instável, ele é dito *estável*.

    Considere agora um grupo de pessoas formado por n rapazes e n moças. Cada rapaz faz uma lista ordenando as n moças de acordo com sua preferência e, da mesma forma, cada moça lista os n rapazes na ordem de sua preferência. Mostre que é sempre possível casar os n rapazes e as n moças de modo a obter um conjunto estável de casamentos.

11. (Vingança Olímpica) Seja $A_1A_2B_1B_2$ um quadrilátero convexo. Nos vértices A_1 e A_2, adjacentes, há duas cidades argentinas. Nos vértices B_1 e B_2, também adjacentes, há duas cidades brasileiras. No interior do quadrilátero, existem a cidades argentinas e b cidades brasileiras, sem haver três cidades colineares. Determine se é possível, independentemente da posição das cidades, construir estradas retas, cada uma das quais conecta duas cidades argentinas ou duas cidades brasileiras, de modo que:

    - Não existam duas estradas que se intersectem em um ponto que não seja uma cidade;
    - De qualquer cidade argentina, seja possível chegar a qualquer outra cidade argentina; e
    - De qualquer cidade brasileira, seja possível chegar a qualquer outra cidade brasileira.

    Se for sempre possível, monte um algoritmo que construa uma possível configuração.

12. (IMO) Numa competição de matemática alguns participantes são amigos. A amizade é sempre recíproca. Dizemos que um grupo de participantes é um *clique* se dois quaisquer deles são amigos (em particular, qualquer grupo com menos de dois participantes é um clique). O *tamanho* de um clique é o número de seus elementos. Sabe-se que nesta competição o tamanho máximo dos cliques é par.

    Prove que os participantes podem ser distribuídos em duas salas, de modo que o tamanho máximo dos cliques contidos numa sala é igual ao tamanho máximo dos cliques contidos na outra sala.

Bibliografia

1. Arquivo do Treinamento da Cone Sul 2007, localizado em

   `http://conesul2006.tripod.com/Material/materialteorico2.pdf`.

2. T. Andreescu e Z. Feng, *102 Combinatorial Problems, From the training of the USA IMO team*, Birkhäuser 2003.

Respostas, Dicas e Soluções

1. Resolvamos ambos os itens. Tome $N = 2008 \cdot 10^t + k$, com $10^t \ge n$. Há 10^t números N dessa forma que começam com 2008, e entre um deles há um múltiplo de n. Então todo n inteiro positivo é garboso.

2. Comece com os $3n$ primeiros pontos. Seja k a quantidade de pontos verdes. Se $k = n$ acabou. Se não, suponha, sem perda de generalidade, $k < n$. Os $3n$ últimos pontos têm $2n - k > n$ pontos verdes. Como mover um ponto para a direita muda a quantidade pontos verdes em no máximo 1, em algum momento há exatamente n pontos verdes.

3. Considere uma reta r que passa pelo ponto médio M de XY e escolha um dos semiplanos determinados pela reta. Gire r em torno de M; note que a diferença $a - b$ de pontos de um lado e pontos do outro lado do semiplano muda de 1 em 1, começando de k e terminando em $-k$ (após girar 180°). Em algum momento atinge zero.

4. Primeiro considere um caminho $PP_1P_2\dots P_nP'$ ligando uma cidade à sua antípoda. Então existe um caminho $P'P'_n\dots P'_2P'_1P$. Considere as diferenças entre preços de P e P', P_1 e P'_1, ..., P_n e P'_n, P' e P. Essa diferença passa de k a $-k$ e muda de no máximo 200 a cada passo (aumenta em 100 ao ir de P_i para P_{i+1} e diminui de 100 de P'_i para P'_{i+1}). O intervalo aceitável de diferença entre cidades antípodas é $[-100, 100]$, de tamanho 200. Como vamos de k para $-k$ e a diferença muda em no máximo 200, necessariamente é necessário passar pelo intervalo $[-100, 100]$.

5. Considere as somas do tipo $\pm(y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n)$ e ordene-as. Note que se a soma S aparece então $-S$ também aparece. Além disso, se trocamos y_i com y_{i+1} trocamos S por $S - iy_i - (i+1)y_{i+1} + iy_{i+1} + (i+1)y_i = S + (y_i - y_{i+1})$, cuja diferença é $|y_i - y_{i+1}| \le 2 \cdot \frac{n+1}{2} = n + 1$. Assim, a diferença entre duas somas consecutivas não ultrapassa $n + 1$. Como a menor soma é negativa e a maior é positiva e o intervalo $\left[-\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right]$ tem tamnho $n+1$, é obrigatório passar por ele, e obtemos uma soma no intervalo desejado.

6. Primeiro, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\operatorname{mdc}(p, q) = 1$. Caso contrário, dividimos todos os termos por $\operatorname{mdc}(p, q)$, e eles continuam inteiros. Agora, sendo k a quantidade de índices i tais que $x_i - x_{i-1} = p$, temos $kp - (n-k)q = 0 \implies q \mid k \implies k = tq$ e $n - k = tp$, de modo que $n = (p+q)t$, $t > 1$.

   Agora construa uma linha poligonal começando em $(0, 0)$ e que se move uma unidade para cima quando $x_i - x_{i-1} = p$ e uma unidade para a direita quando $x_i - x_{i-1} = -q$. Note que esse reticulado termina em (tp, tq). Para que $x_i = x_j$ basta que existam na linha poligonal dois pontos de coordenadas inteiras (a, b) e (c, d) com $c - a = mp$ e $d - b = mq$, $0 < m < t$. Mas é só considerar o pedaço A da poligonal dentro do retângulo de vértices $(0, 0)$, $(0, q)$, $(p, 0)$ e (p, q). Suponha que a poligonal saia do retângulo em um ponto (x, q) e considere os retângulos de vértices (mp, mq), $(mp,(m+1)q)$, $((m+1)p, mq)$ e $((m+1)p,(m+1)q)$; dentro de cada retângulo faça uma cópia de A. A linha poligonal deve passar de (x, q) a (tp, tq); então ele atravessa algum ponto de alguma cópia. Isso termina o problema, pois isso prova a existência de dois pontos "congruentes módulo retângulo", com a mesma diferença de retângulos tanto na vertical como na horizontal.

7. Primeiro, provaremos que se todos os termos da sequência $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ estão no intervalo $]-a, a[$ então existe uma partição I, J com $\left|\sum_{i\in I} x_i - \sum_{j\in J} x_j\right| < a$. Para isso, é só escolher sinais de $+$ ou $-$ para cada termo. Comece colocando $+$ em x_1; a cada passo, se a soma parcial é $S \le 0$ coloque $+$ no próximo termo e se a soma parcial é $S > 0$ então coloque $-$ no próximo termo. A cada passo sempre obtemos uma soma parcial em $]-a, a[$.

   Suponha que todas as sequências obtidas só têm números no intervalo $]-n/2, n/2[$. Assim, como cada sequência é obtida somando 1 ou -1 a cada termo, existe uma quantidade finita de sequências, e como podemos criar infinitas sequências, existem duas iguais, $A_p = A_q$. Enfim, considere a soma dos quadrados de cada termo. Temos $S_n - S_{n-1} = \sum_{i\in I}((x_i+1)^2 - x_i^2) + \sum_{j\in J}((x_j-1)^2 - x_j^2) = 2(\sum_{i\in I} x_i - \sum_{j\in J} x_j) + n > 0$, e se $p > q$ temos $S_p > S_q$, o que é impossível. Logo em algum momento temos $|x_i| \ge n/2$ para algum i.

8. Considere uma reta orientada ℓ que passa por um ponto $P \in \mathcal{S}$ de modo que as quantidades de pontos à sua esquerda e direita tenham diferença no máximo 1. Essa diferença vai continuar constante à medida que o moinho de vento girar. Além disso, a cada momento ℓ fica paralela a uma única reta r_Q que passa por um ponto Q de $\mathcal{S}$ e divide os pontos à esquerda/direita com a mesma diferença, e portanto quando o moiho fica paralelo a uma reta r_Q ela deve coincidir com r_Q. Isso termina o problema, pois cada ângulo corresponde a um ponto e todos os pontos são cobertos.

9. São necessárias 8 estradas (uma árvore resolve o problema). A ideia é tomar as estradas mais curtas, sem formar ciclos. Com isso, obtemos um total de $1 + 2 + 2 + 4 + 4 + 7 + 8 + 9 = 37$. Vamos mostrar que esse algoritmo funciona por indução; mais efetivamente, provemos que a cada passo as arestas escolhidas estão contidas em alguma árvore mínima. Quando não há arestas, o resultado é imediato; agora, suponha que executamos um passo, escolhendo a aresta mínima e que não forma ciclo. Se antes tínhamos um conjunto S de arestas, pela hipótese de indução existe uma árvore mínima A que contém S. Se A contém e, acabou; se não, $A + e$ forma um ciclo; isso quer dizer que ele contém uma aresta f que não foi escolhida; só que f tem valor maior ou igual do que e, então $A + e - f$ é uma árvore mínima que contém $S \cup \{e\}$.

10. Vamos descrever um algoritmo que constrói um conjunto de casamentos estáveis. No início, escolhemos um rapaz arbitrário que pede a primeira moça de sua lista em noivado. Num passo genérico, um rapaz que não está comprometido pede em noivado a primeira moça de sua lista a qual ele ainda não cortejou. Se ela o preferir ao seu atual

noivo, desmancha-se o noivado e forma-se o novo casal; o ex-noivo passa a integrar a lista dos "descomprometidos". Este processo continua até que todos os rapazes estejam noivos, o que ocorre num número finito de passos, já que cada rapaz pede sempre uma moça diferente em noivado e cada moça, uma vez comprometida, permanecerá comprometida até o final (não necessariamente com o mesmo rapaz). Perceba que todas as moças receberão propostas de noivado, já que todas elas aparecem na lista de cada rapaz. Terminado o processo, realizam-se os casamentos.

Os casamentos assim obtidos são estáveis, pois a moças que um determinado rapaz prefere à sua esposa o preteriram e, portanto, estão casadas com rapazes melhores colocados em suas listas.

11. É sempre possível construir as estradas, com o seguinte algoritmo:

    (a) Divida o quadrilátero $A_1A_2B_1B_2$ em dois triângulos, traçando uma de suas diagonais;

    (b) Se não há triângulos sem estradas construídas, o procedimento terminou; caso contrário, vá para o passo 3;

    (c) Tome um dos triângulos XYZ com mais cidades em seu interior e construa as estradas que ligam vértices de mesmo país;

    (d) Escolha uma dessas estradas, digamos XY, e tome a cidade P no interior de XYZ mais próxima dessa estrada;

    (e) Divida o triângulo XYZ nos triângulos PXY, PXZ e PYZ;

    (f) Volte para o passo b.

    Primeiro, como a quantidade de triângulos sempre aumenta até o passo b decretar o fim do procedimento, o algoritmo sempre termina. Vamos provar que funciona por indução sobre a quantidade de triângulos construídos até o término do algoritmo.

    Antes de começar a indução, vamos provar que durante o algoritmo nunca aparece um triângulo com os três vértices do mesmo país com alguma cidade em seu interior. Note que os dois triângulos iniciais não têm os três vértices do mesmo país. Considere, por absurdo, o primeiro triângulo XYZ de três vértices de mesmo país gerado pelo algoritmo com alguma cidade em seu interior e considere o passo que gerou esse triângulo. Então um desses vértices, digamos X, estava no interior de um triângulo YZK. Como YZ é a única estrada de YZK construída, então X é o cidade no interior de YZK mais próxima de YZ, de modo que não é possível que haja cidades no interior de XYZ, um absurdo.

    Vamos à indução. A base é o caso em que temos 2 triângulos e é imediato.

    Agora, suponha que o algoritmo divida o quadrilátero em uma certa quantidade de triângulos e que funcione para uma configuração com menos triângulos. Seja Q o último ponto escolhido no passo d do algoritmo. Note que Q é a última cidade a ser interligada com as demais. Aplique a hipótese de indução para o conjunto das cidades exceto Q. Então Q estava no interior de um triângulo XYZ com dois vértices

X e Y de um país e um vértice Z de outro. Suponha, sem perdas, que X e Y são brasileiras. Se Z é brasileira, ela se conecta a X e Y; se é argentina, se conecta a Z. Note que não cruzamos estradas e que Z está conectada, assim como todas as outras (pela hipótese de indução). A demonstração está completa.

12. Sejam $c(A)$ e $c(B)$ as quantidades de pessoas nos cliques máximos nas salas A e B. O problema é resolvido pelo seguinte algoritmo:

    (a) Coloque um maior clique M na sala A e os demais na sala B. Temos $c(A) = 2m \geq c(B)$.

    (b) Enquanto $c(A) > c(B)$, transfira uma pessoa da sala A para a sala B. Depois desse passo, temos $c(A) \leq c(B) \leq c(A) + 1$, pois a cada execução desse passo $c(A)$ diminui em 1 e $c(B)$ aumenta em no máximo 1. Também temos $c(A) \geq m$.

    (c) Seja $c(A) = k$. Se $c(B) = k$ pare. Caso contrário, $c(B) = k + 1$. Note que $k = |A| = |A \cap M| \geq m$ e $|B \cap M| \leq m$.

    (d) Se existe uma pessoa $x \in B \cap M$ e um clique $C \subset B$ tal que $|C| = k+1$ e $x \notin C$, transfira x para A e pare. Temos $c(A) = k + 1$ (alguém de M voltou para A) e como $x \notin C$ temos $c(B) = |C| = k + 1$ e temos o que queremos.

    (e) Agora todos os cliques máximos de B contêm $B \cap M$. Enquanto $c(B) = k + 1$, escolha um clique $C \subset B$ com $|C| = k + 1$ e transfira um elemento de $C \setminus M$ de B para A. Como $|C| = k + 1 > m \geq |B \cap M|$, sempre existe esse elemento. No final desse passo, temos $c(B) = k$. O que acontece com $c(A)$? Primeiro, como $A \cap M \subset A$ temos $c(A) \geq k$. Na verdade não é possível que haja um clique maior. Sendo Q um clique qualquer de A, ele contém alguns elementos de M, e outros elementos que foram movidos de cliques de B. Como todos esses cliques contêm $B \cap M$, todos os elementos de Q são amigos de todos os elementos e $B \cap M$, de modo que $Q \cup (B \cap M)$ também é um clique. Mas $|Q \cup (B \cap M)| \leq |M| \iff |Q| + |B \cap M| \leq |M| \iff |Q| + |M| - |M \cap A| \leq M \iff |Q| \leq |A \cap M| = k$. Logo, após esse passo temos $c(A) = c(B)$, e todos os casos estão cobertos.