Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Combinatória – Nível 3

Prof. Carlos Shine

Aula 17

Geometria Combinatória

Onde estão os pontos?

Na grande maioria dos problemas de Geometria, o primeiro passo é fazer uma figura que representasse bem a situação. E se isso não possível? E se não for possível nem mesmo desenhar uma figura?

Nesses casos, se não podemos dizer onde estão exatamente os pontos, nós pelo menos procuramos *suas possíveis posições*. Sendo um pouco mais específico, verificamos *em que região ou regiões está o ponto*.

Exemplo 1. *(Ibero) Seja $\mathcal{F}$ a família de todos os hexágonos convexos H que satisfazem as seguintes condições:*

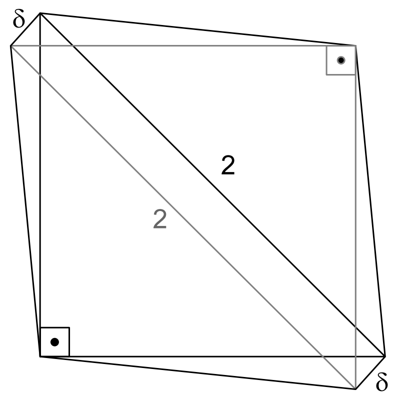
(a) os lados opostos de H são paralelos;

(b) quaisquer três vértices de H podem ser cobertos com uma faixa de largura 1.

Determine o menor número real ℓ tal que cada um dos hexágonos da família $\mathcal{F}$ pode ser coberto com uma faixa de largura ℓ.

Nota: Uma faixa de largura ℓ é a região do plano compreendida entre duas retas paralelas que estão à distância ℓ (incluindo ambas as retas paralelas).

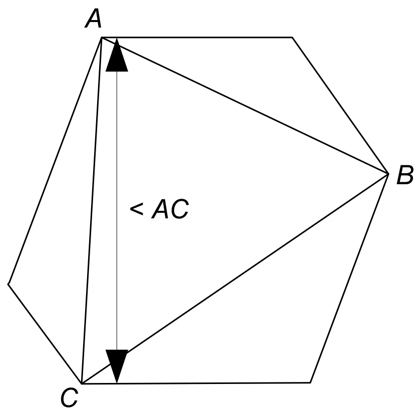
Solução: A primeira impressão é de que $\ell = 1$, mas não seria sem graça se fosse isso mesmo? A verdade é que $\ell = \sqrt{2}$. Basta tomar “quase-quadrados”:



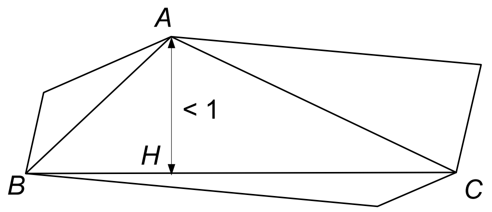
Note que se $\ell < \sqrt{2}$ então existe ϵ tal que $\ell = \sqrt{2} - \epsilon$. Basta tomar δ suficientemente pequeno para que a faixa de largura $\sqrt{2} - \epsilon$ não cubra o "quase-quadrado" correspondente.

Vamos provar que $\ell = \sqrt{2}$ é suficiente para cobrir todos os hexágonos de $\mathcal{F}$. Note que, para tanto, basta mostrar que todo hexágono de $\mathcal{F}$ tem algum par de lados opostos paralelos com distância menor ou igual a $\sqrt{2}$.

Seja H um hexágono de $\mathcal{F}$. Considere um triângulo ABC formado por vértices alternados de H. Note que se algum dos lados de ABC é menor ou igual a $\sqrt{2}$, uma faixa de $\sqrt{2}$ é suficiente para cobrir H, pois a distância entre cada par de lados opostos de H é menor ou igual a cada um dos lados de ABC.



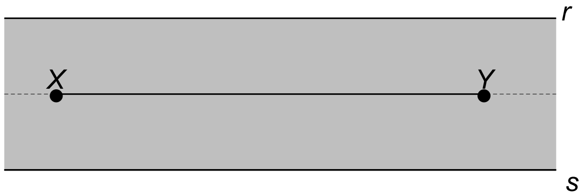
Assim, suponha que todos os lados de ABC são maiores do que $\sqrt{2}$ e que a sua menor altura seja relativa a A. Isto quer dizer que a distância de A à reta BC é menor ou igual a 1. Com isso, podemos mostrar que o ângulo $\angle BAC$ é obtuso, pois, sendo H o pé da altura relativa a A, $\cos \angle HAB = \frac{AH}{AB} < \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ \implies \angle HAB > 45^\circ$ e, analogamente, $\angle HAC > 45^\circ$.



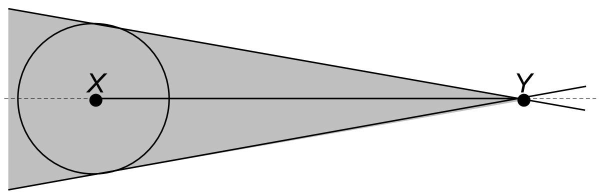
A nossa meta agora é descobrir onde pode estar o vértice A', oposto a A em H. Para isso, vamos estudar a condição (b) do enunciado. Note que ela é equivalente a dizer que todo triângulo determinado por vértices de H tem sua menor altura menor ou igual a 1.

Suponhamos, então, que sabemos a posição de dois vértices X e Y do hexágono H e queiramos saber onde poderiam estar os outros vértices de H. Seja Z um desses vértices. O interessante é que não sabemos *qual* é a menor altura, então devemos pensar nas três possibilidades (que na verdade são duas, já que duas delas são análogas):

- A menor altura é relativa a Z. Então a distância de Z a XY é menor ou igual a 1. Sendo o conjunto dos pontos a uma distância fixada de uma reta igual a um par de retas paralelas, concluímos que Z pode estar na faixa formada por duas retas r e s a uma distância 1 de XY, excetuando a própria reta XY:

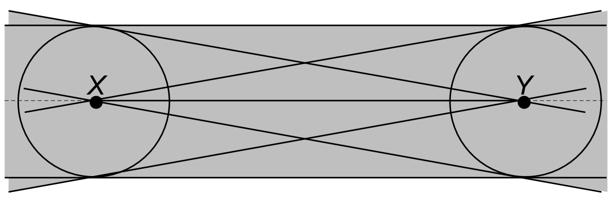


- A menor altura é relativa a X. Então a distância de X a YZ é menor ou igual a 1. Agora temos uma situação mais interessante, pois o ponto variável é Z; como medir a distância de um ponto fixado a uma reta variável? O truque aqui é considerar um círculo C de raio 1 com centro em X. Se a reta é tangente a C, então a distância de X a essa reta é 1; se for secante, é menor que 1; se for exterior, é maior que 1. Considerando ainda que as retas em questão devem passar pelo outro ponto fixo Y, temos a nossa resposta:



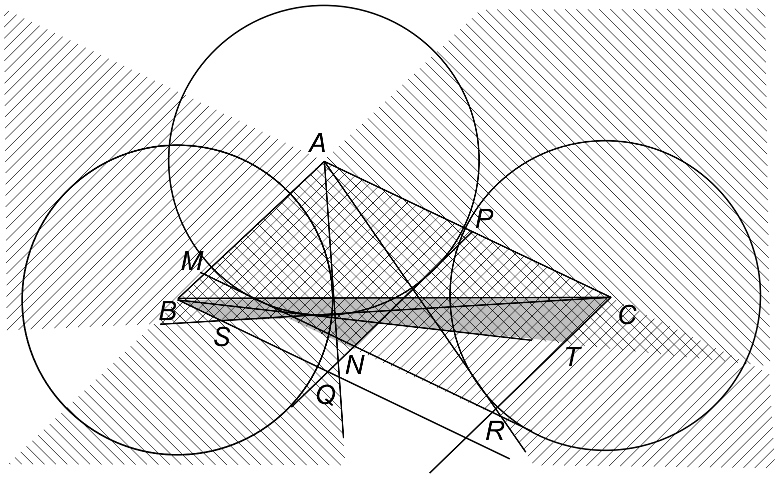
- A menor altura é relativa a Y. Esse caso é análogo ao anterior.

Assim, dados os pontos X e Y do hexágono, os demais vértices pertencem à região destacada na figura a seguir:



Para facilitar, chamaremos tal região de XY-*região*.

Com isso, podemos continuar o problema. Queremos encontrar as possíveis posições do ponto A', oposto a A no hexágono. Ele deve pertencer à AB-região e à AC-região, ou seja, na interseção dessas duas regiões. Além disso, como o hexágono é convexo, C e o vértice C', oposto a C, estão em lados opostos em relação a AB e AC' é paralelo a $A'C$, A' também pertence à região delimitada por $CR \parallel AB$, BC e, analogamente, $BQ \parallel AC$.



Se A' está no interior do ângulo $\angle CBT$, então a distância de A ao lado $A'B$ é menor ou igual a 1 e é possível cobrir H com uma faixa de largura $1 < \sqrt{2}$, pois a distância entre $A'B$ e o lado oposto, que contém A, é menor ou igual a 1; da mesma forma, se A' está no interior do ângulo $\angle BCS$, a distância de A ao lado $A'C$ é menor ou igual a 1 e é possível cobrir H com uma faixa de largura 1. Caso contrário, $AA' < \sqrt{2}$, pois $\angle MAP > 90°$, e é possível cobrir H com uma faixa de largura $AN < \sqrt{2}$.

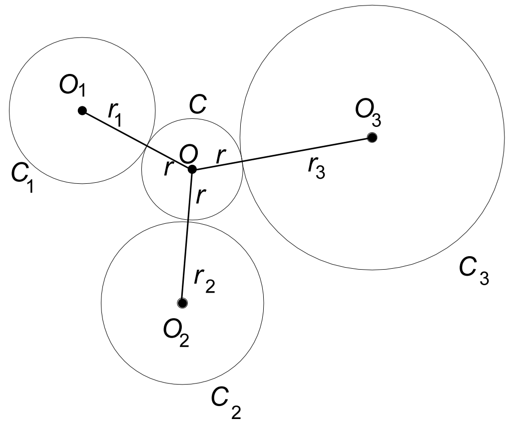
Na verdade, pode-se provar que esse último caso não pode ocorrer: basta considerar o maior entre os ângulos $\angle A'AB$ e $\angle A'AC$ e provar (por eliminação, e usando o fato de que o seno de um ângulo maior do que 45° é maior do que $\sqrt{2}/2$) que a distância de A a $A'B$ ou $A'C$ (o que participar do maior ângulo) é menor ou igual a 1, considerando o triângulo $AA'B$ (ou $AA'C$). □

Cobrindo figuras

Problemas desse tipo podem ser resolvidos com uma variedade bastante grande de técnicas. Uma mistura de casos extremos, casa dos pombos e saber construir exemplos geralmente funciona bem.

Exemplo 2. *(EUA) Um reticulado no plano cartesiano consiste em todos os pontos (m, n), onde m e n são inteiros. É possível cobrir todos os pontos do reticulado com uma família infinita de círculos cujos interiores não se sobrepõem se cada círculo da família tem raio maior ou igual a 5?*

Solução: A resposta é não (os círculos são muito grandes, não?). Para isso, suponha que existe uma cobertura desse tipo e seja C o maior círculo que não se sobrepõe com algum círculo da família. Então o seu raio r deve ser menor do que $\sqrt{2}/2$; caso contrário, C cobriria um ponto do reticulado, que não seria coberto pela família.



Além disso, C tangencia pelo menos três círculos C_1, C_2, C_3 da família. Sejam O, O_1, O_2 e O_3 os centros dos círculos C, C_1, C_2, C_3, respectivamente. Então um dos ângulos $\angle O_1OO_2$, $\angle O_2OO_3$, $\angle O_3OO_1$ é menor ou igual a $120°$. Suponha, sem perdas, que é $\angle O_1OO_2$. Então, pela lei dos co-senos,

$$O_1O_2^2 \le OO_1^2 + OO_2^2 + OO_1 \cdot OO_2$$

Sejam r_1 e r_2 os raios de C_1 e C_2, respectivamente. Então $O_1O_2 \ge r_1+r_2$, $OO_1 = r+r_1$ e $OO_2 = r + r_2$. Substituindo, obtemos

$$(r_1 + r_2)^2 \le (r + r_1)^2 + (r + r_2)^2 + (r + r_1)(r + r_2) \iff 12r^2 \ge (r_1 - 3r)(r_2 - 3r)$$

Mas $r < \sqrt{2}/2$ e r_1 e r_2 são maiores ou iguais a 5, de modo que

$$12r^2 \ge (5 - 3r)^2 \iff 2\sqrt{3}r \ge 5 - 3r \iff r \ge \frac{5}{3 + 2\sqrt{3}}$$

Um cálculo rápido mostra que $\frac{5}{3+2\sqrt{3}} > \frac{\sqrt{2}}{2}$, e o problema acabou. $\square$

Princípio do extremo

Considerar a maior (ou menor) distância ou algum triângulo de área máxima (ou mínima) ou . . . máximo (ou mínimo) pode ser bastante útil.

Exemplo 3. *(OBM) São dados n pontos no plano, os quais são os vértices de um polígono convexo. Prove que o conjunto das medidas dos lados e das diagonais do polígono tem pelo menos $\lfloor n/2 \rfloor$ elementos distintos.*

Solução: Primeiro, considere dois pontos A e B do polígono cuja distância é máxima. Tome B de modo que AB separe o polígono em dois polígonos, um deles com AB como *única* distância máxima.

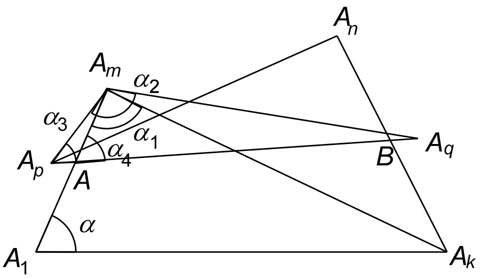
Em cada um desses dois polígono vamos aplicar o seguinte

Lema 1. *Seja $A_1A_2\ldots A_k$ um polígono convexo tal que a maior distância entre dois de seus vértices, incluindo diagonais, é A_1A_k. Então esse polígono tem $k-2$ distâncias diferentes; caso A_1A_k seja a única distância máxima, então há $k-1$ distâncias diferentes.*

Demonstração: Sejam A_p e A_q, $1 < p < q < k$ dois vértices do polígono. Vamos provar que, para quaisquer m e n com $p < m \le n < q$ um dos segmentos A_pA_n, A_qA_m é menor do que A_pA_q. Em seguida, conseguiremos uma sequência de $k-2$ distâncias diferentes.

Como conseguir distâncias menores? Ou, de modo mais geral, como comparar segmentos? Muitas vezes é melhor transferir tudo para ângulos, para que possamos fazer... isso mesmo, um arrastão!

Sejam $\alpha = \angle A_mA_1A_k$, $\alpha_1 = \angle A_1A_mA_k$, $\alpha_2 = \angle A_pA_mA_q$, $\alpha_3 = \angle A_qA_pA_m$, A a interseção de A_pA_q e A_1A_m (note que, como o polígono é convexo, A está no interior do segmento A_pA_q) e $\alpha_4 = \angle A_mAA_q$.



Suponha que $A_pA_q \le A_mA_q$. Então, no triângulo $A_mA_pA_q$, $\alpha_2 \le \alpha_3$. Além disso, pelo teorema do ângulo externo no triângulo AA_pA_m, $\alpha_3 < \alpha_4$. Ademais, $\alpha_1 < \alpha_2$ e, sendo A_1A_k a maior distância de todas (e esse é o passo decisivo da demonstração e mostra o poder do princípio do extremo), no triângulo $A_1A_mA_k$, $\alpha < \alpha_1$. Logo

$$\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 \le \alpha_3 < \alpha_4 \implies \alpha < \alpha_4$$

Definindo os β's analogamente e supondo que $A_pA_q \le A_nA_p$, obtemos $\beta < \beta_4$. Porém, observando os quadriláteros $A_1A_kA_nA_m$ e ABA_nA_m, temos que $\alpha + \beta + \angle A_1A_mA_n + \angle A_kA_nA_m = \alpha_4 + \beta_4 + \angle AA_mA_n + \angle BA_nA_m = 360^\circ \implies \alpha + \beta = \alpha_4 + \beta_4$. Mas

$$\left|\begin{array}{l}\alpha < \alpha_4\\ \beta < \beta_4\end{array}\right. \implies \alpha + \beta < \alpha_4 + \beta_4,$$

contradição.

O caso em que $m = n$ fica a cargo do leitor.

Para terminar, basta fazer uma espécie de "zigue-zague". Comece com A_2A_{k-1}, que é menor do que A_1A_k (por quê?). Pelo que acabamos de provar, A_2A_{k-2} ou A_3A_{k-1} é menor do que A_2A_{k-1}. Oba, mais uma distância! Suponha, por exemplo, que A_3A_{k-1} seja menor. Então, aplicando o nosso fato de novo, A_4A_{k-1} ou A_3A_{k-2} é menor do que A_3A_{k-1}. Continuamos assim, até acabar o polígono, e assim conseguimos (conte!) $k-2$ distâncias diferentes.

No caso em que A_1A_k é a única distância máxima, fica para você provar (use o poder do arrastão novamente!) que, no quadrilátero $A_1A_2A_{k-1}A_k$, uma das diagonais é menor do que A_1A_k (bem, isso é imediato $\ddot\smile$) e maior do que A_2A_{k-1} (nisso você vai ter que trabalhar um pouquinho mais $\ddot\smile$), de modo que ganhamos mais uma distância, totalizando $k-1$. $\square$

Agora, vamos terminar o problema. Lembre que cortamos o polígono original do problema em dois por uma diagonal AB com medida máxima. Suponha que os polígonos obtidos tenham $k+1$ e $n-k+1$ lados, sendo que o de $k+1$ lados tem a distância máxima única. Nele, obtemos $(k+1)-1=k$ distâncias diferentes, e no outro, $(n-k+1)-2=n-k-1$. Então conseguimos $d=\max\{k,n-k-1\}$ distâncias. Mas $d \geq \frac{k+(n-k-1)}{2} = \frac{n-1}{2} \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. $\square$

Fecho convexo

Fecho convexo de um conjunto S de pontos (finito ou infinito) limitado no plano (poderia ser do espaço ou de figuras com mais dimensões ainda) é a menor figura convexa que contém S. No caso do plano, é figura obtida quando soltamos um elástico esticado em torno de S.

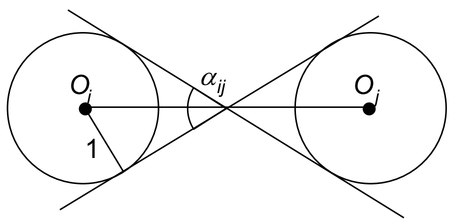
Exemplo 4. *(IMO) Sejam Γ_1, Γ_2, ..., Γ_n círculos de raio 1 no plano, onde $n \geq 3$. Seus centros são O_1, O_2, ..., O_n, respectivamente.*

Suponha que não exista reta que intercepte mais que dois dos círculos. Prove que

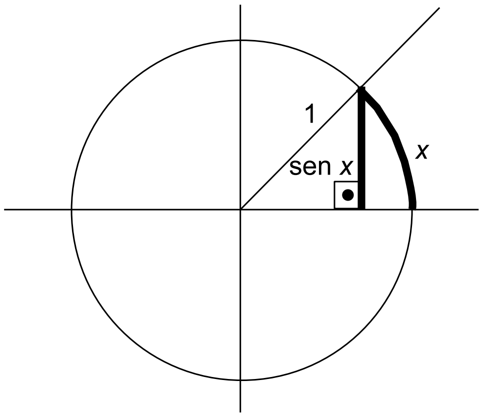
$$\sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{1}{O_iO_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}$$

Solução: O que é isso? Contas com segmentos de um lado e π do outro? O que fazer?

A primeira idéia é, na verdade, transformar tudo em ângulos. Seja α_{ij} o ângulo determinado entre as tangentes internas a Γ_i e Γ_j.



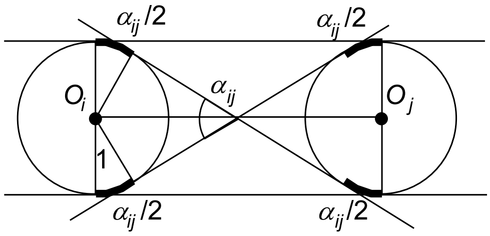
Veja que $\operatorname{sen} \frac{\alpha_{ij}}{2} = \frac{1}{O_iO_j/2} = \frac{2}{O_iO_j}$. A figura a seguir mostra que, para todo x real positivo, $\operatorname{sen} x < x$.



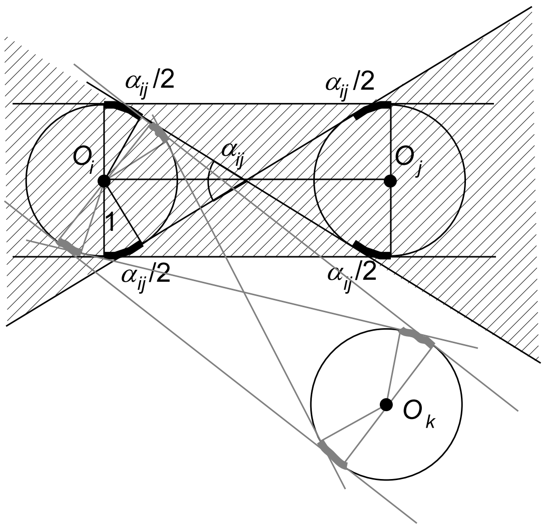
Assim, $\frac{1}{O_iO_j} = \frac{\operatorname{sen} \alpha/2}{2} < \frac{\alpha}{4}$, de modo que basta provar que

$$\sum_{1 \le i < j \le n} \frac{\alpha_{ij}}{4} \le \frac{(n-1)\pi}{4} \iff \sum_{1 \le i < j \le n} \alpha_{ij} \le (n-1)\pi$$

Voltemos para os α_{ij}'s. Eles também aparecem nos próprios círculos, como ilustramos na figura a seguir, traçando as tangentes externas (que são paralelas):

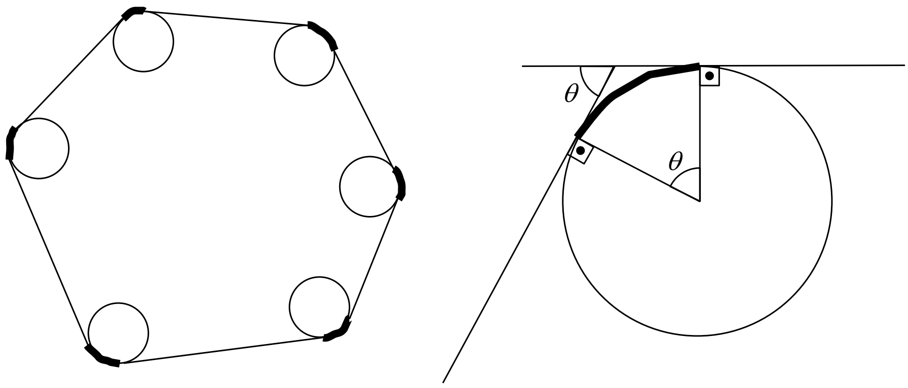


A condição de não haver retas que interceptem mais do que dois círculos se traduz em os $\alpha_{ij}/2$'s não se sobreporem nas figuras. A região hachurada indica em que regiões as circunferências diferentes de Γ_i e Γ_j não podem estar.



Assim, a soma de todos os α_{ij}'s é menor ou igual à metade da soma de todos os arcos (veja que cada $\alpha_{ij}/2$ aparece quatro vezes, totalizando $2\alpha_{ij}$), que em princípio é $n\pi$.

Faltou pouco! Mas será que não podemos melhorar essa conta? É aí que o fecho convexo entra! "soltando o elástico", vemos que alguns arcos não são contados:



A soma desses arcos é exatamente a soma dos ângulos externos de um polígono, que é 2π. Com isso, a metade da soma de todos os arcos é menor ou igual a $n\pi - \pi = (n-1)\pi$, e acabou. $\square$

Distâncias e números reais

Muitos problemas exploram distâncias, e em alguns deles queremos saber se eles satisfazem certas condições.

Exemplo 5. *(Ibero) Tem-se n pontos distintos A_1, A_2, ..., A_n no plano e a cada ponto A_i se associa um número real λ_i diferente de zero, de maneira que $A_iA_j^2 = \lambda_i + \lambda_j$, para todos i, j com $i \neq j$. Demonstre que*

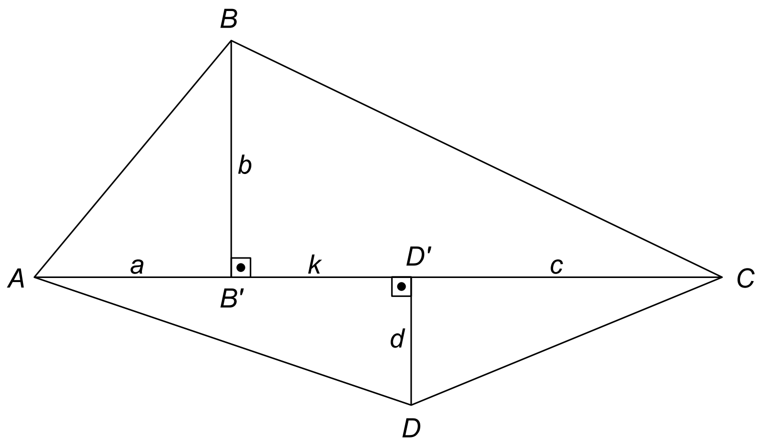
(a) $n \leq 4$

(b) Se $n = 4$, *então* $\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_4} = 0$.

Solução: Distâncias ao quadrado! Que teorema envolve distâncias ao quadrado? Uma dica: o nome do teorema começa com "Pit" e termina com "ágoras". Com o seu auxílio, provamos o seguinte

Lema 2. *Se A, B, C e D são pontos no plano então $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ se, e somente se, AC e BD são perpendiculares.*

Demonstração: Seja B' e D' as projeções de B e D sobre a reta AC, respectivamente. Suponha que B' está mais à esquerda de D'. Seja $B'D' = k$.



Aplicando o teorema de Pitágoras quatro vezes, obtemos

$$AB^2 = a^2 + b^2 \qquad AD^2 = (a+k)^2 + d^2$$
$$CD^2 = c^2 + d^2 \qquad BC^2 = (c+k)^2 + b^2$$

Assim,

$$\begin{aligned} AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 &\iff a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a+k)^2 + b^2 + (c+k)^2 + d^2 \\ &\iff 2k(a+c+k) = 0 \iff 2k \cdot AC = 0 \iff k = 0, \end{aligned}$$

de modo que as projeções de B e D sobre AC devem coincidir, provando que a igualdade ocorre se, e somente se, BD é perpendicular a AC. $\square$

Com isso, o problema fica simples. Suponha que $n \geq 4$, de modo que existam A_1, A_2 e A_3. Note que, sendo $i > 3$, $A_1A_i^2 + A_2A_3^2 = \lambda_1 + \lambda_i + \lambda_2 + \lambda_3 = A_1A_2^2 + A_3A_i^2$, e pelo lema, A_2A_i é perpendicular a A_1A_3, isto é, A_i pertence à altura por A_2 de $A_1A_2A_3$. É claro que A_2 não é mais especial do que A_1 e A_3, assim, analogamente A_i também pertence à altura por A_1 de $A_1A_2A_3$. Deste modo, A_i está na interseção das duas alturas, ou seja, seu ortocentro. Isso vale para *todo* ponto A_i diferente de A_1, A_2 e A_3. Mas como só existe um ortocentro, só pode haver um ponto a mais, ou seja, $n \leq 4$. Isso resolve o item a.

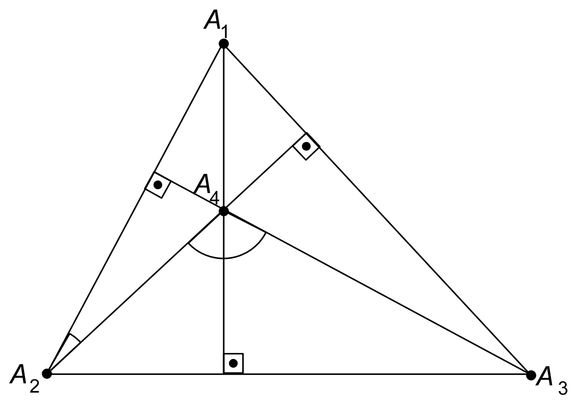
Vamos para o item b. Primeiro, considere três pontos A_i, A_j e A_k. Então

$$\left| \begin{aligned} A_iA_j^2 &= \lambda_i + \lambda_j \\ A_iA_k^2 &= \lambda_i + \lambda_k \\ A_jA_k^2 &= \lambda_j + \lambda_k \end{aligned} \right. \iff \left| \begin{aligned} \lambda_i &= \frac{A_iA_j^2 + A_iA_k^2 - A_jA_k^2}{2} \\ \lambda_j &= \frac{A_iA_j^2 + A_jA_k^2 - A_iA_k^2}{2} \\ \lambda_k &= \frac{A_iA_k^2 + A_jA_k^2 - A_iA_j^2}{2} \end{aligned} \right.$$

Mas, pela lei dos co-senos, $\frac{A_iA_j^2 + A_iA_k^2 - A_jA_k^2}{2} = A_iA_j \cdot A_iA_k \cdot \cos\angle A_jA_iA_k$. Assim,

$$\left| \begin{aligned} \lambda_i &= A_iA_j \cdot A_iA_k \cdot \cos\angle A_jA_iA_k \\ \lambda_j &= A_iA_j \cdot A_jA_k \cdot \cos\angle A_iA_jA_k \\ \lambda_k &= A_iA_k \cdot A_jA_k \cdot \cos\angle A_iA_kA_j \end{aligned} \right.$$

Vamos supor que A_4 é ortocentro do triângulo acutângulo $A_1A_2A_3$ (na verdade, cada ponto é ortocentro do triângulo determinado pelos três outros pontos). Note que o triângulo não pode ser retângulo, o que prova que nenhum dos λ's pode ser zero.



Note que $\angle A_2A_4A_3 = \angle A_4A_2A_1 + 90°$, de modo que $\cos\angle A_4A_2A_1 = -\operatorname{sen}\angle A_2A_4A_3$. Deste modo, isolando os co-senos na relação acima e substituindo na relação fundamental $\cos^2\angle A_2A_4A_3 + \operatorname{sen}^2\angle A_2A_4A_3 = 1$, obtemos

$$\left(\frac{\lambda_4}{A_2A_4\cdot A_3A_4}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2}{A_2A_4\cdot A_1A_2}\right)^2 = 1$$

Como $A_iA_j^2 = \lambda_i + \lambda_j$, tirando o mínimo e substituindo obtemos

$$\lambda_4^2(\lambda_1+\lambda_2) + \lambda_2^2(\lambda_3+\lambda_4) = (\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_3+\lambda_4)(\lambda_2+\lambda_4)$$

Dividindo tudo por $\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3\lambda_4^2$,

$$\frac{1}{\lambda_2\lambda_3}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right) + \frac{1}{\lambda_1\lambda_4}\left(\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_4}\right) = \left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_4}\right)\left(\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_4}\right)$$

Separando o segundo membro:

$$\frac{1}{\lambda_2\lambda_3}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right) + \frac{1}{\lambda_1\lambda_4}\left(\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_4}\right) = \frac{1}{\lambda_2}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_4}\right) + \frac{1}{\lambda_4}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_4}\right)$$

Para que isso? Ora, para fatorar! Colocando $\frac{1}{\lambda_2}(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2})$ e $\frac{1}{\lambda_4}(\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_4})$ em evidência no segundo membro, obtemos

$$\frac{1}{\lambda_2}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_4}-\frac{1}{\lambda_3}\right) + \frac{1}{\lambda_4}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1}\right)\left(\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_4}\right) = 0$$

$$\iff \frac{1}{\lambda_2\lambda_4}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right) + \frac{1}{\lambda_2\lambda_4}\left(\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_4}\right) = 0$$

$$\iff \frac{1}{\lambda_2\lambda_4}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_4}\right) = 0$$

$$\iff \frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_4} = 0$$

□

Esse problema é de geometria??

Muitas vezes idéias geométricas são úteis em problemas que aparentemente não são de Geometria. Como em Combinatória, por exemplo.

Exemplo 6. *(Cone Sul) O prefeito de uma cidade deseja estabelecer um sistema de transportes com pelo menos uma linha de ônibus, no qual:*

(i) cada linha passe exatamente por três paradas;

(ii) cada duas linhas distintas tenham exatamente uma parada em comum;

(iii) para cada duas paradas de ônibus distintas exista exatamente uma linha que passe por ambas.

Determine o número de paradas de ônibus da cidade.

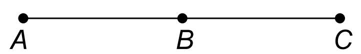
Solução: Vamos representar linhas de ônibus por uma reta e paradas por pontos. Uma linha passa por uma parada se, e somente se, a reta correspondente passa pelo ponto correspondente. Reescrevendo as três condições do enunciado em termos de retas e pontos, temos:

(i) cada reta passa exatamente por três pontos;

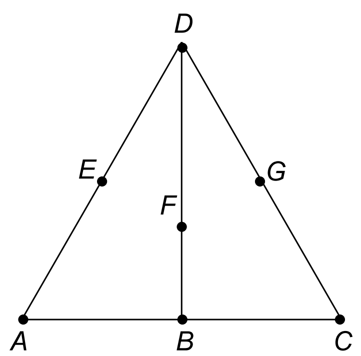
(ii) cada duas retas distintas têm exatamente um ponto em comum;

(iii) por dois pontos passa exatamente uma reta.

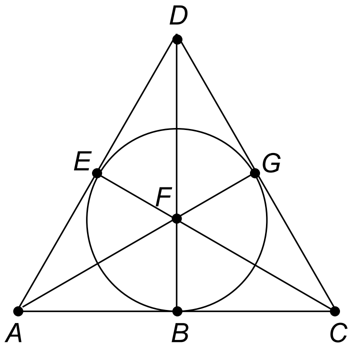
Assim, podemos desenhar (isso mesmo!) as possibilidades. Uma é ter exatamente uma linha (cidade pequena essa, não?), totalizando três pontos A, B e C:



Agora, pode haver mais pontos. Considere um ponto D fora da reta. Por A e D passa uma reta, e essa reta não pode ser ABC, pois ela não teria três pontos; essa nova reta não pode passar por B ou por C, pois duas retas têm exatamente um ponto em comum. Assim, a reta AD precisa conter um novo ponto E. Analogamente, obtemos as retas BDF e CDG.



Será que pode haver mais um ponto H? Vejamos a reta DH. Ela deve cortar a reta ABC em um de seus pontos, mas nenhum deles serve, já que já temos as retas AD, BD e CD e se um dos pontos A, B ou C pertencesse a DH então essa reta e AD, BD ou CD têm dois pontos de interseção (D e um dos pontos A, B, C). Então não podemos mais ter pontos. Completando as linhas, podemos obter o seguinte exemplo, com 7 paradas (uma das linhas é circular):



Com um pouquinho mais de esforço você pode provar que o único exemplo para 7 paradas é esse.

Deste modo, a cidade tem 3 ou 7 paradas.

Problemas

1. (Hungria) Seja P um polígono convexo com lados de medidas inteiras e perímetro ímpar. Prove que a área de P é maior ou igual a $\sqrt{3}/4$.

2. (Cone Sul) Achar todos os números inteiros $n \geq 3$ tais que exista um conjunto S_n formado por n pontos do plano que satisfaçam as duas condições seguintes:

   (a) Três pontos quaisquer não são colineares.

   (b) Nenhum ponto se encontra no interior do círculo cujo diâmetro tem por extremos dois pontos quaisquer de S_n.

   NOTA: Os pontos da circunferência não são considerados interiores ao círculo.

3. (OBM) Dizemos que um quadrado está contido em um cubo quando todos os seus pontos estão nas faces ou no interior do cubo. Determine o maior $\ell > 0$ tal que existe um quadrado de lado ℓ contido num cubo de aresta 1.

4. É dado um conjunto de N discos de raios unitários. Esses círculos podem se intersectar (mas não coincidir). Mostre que existe um arco de comprimento maior ou igual a $2\pi/N$ pertencendo à circunferência de um desses discos que não é coberto por nenhum outro disco.

5. Três círculos de raio r cobrem um círculo de raio 1. Encontre o menor valor de r.

6. (OBM) Temos um número finito de quadrados, de área total 4. Prove que é possível arranjá-los de modo a cobrir um quadrado de lado 1.

   Obs: É permitido sobrepor quadrados e parte deles pode ultrapassar os limites do quadrado a ser coberto.

7. (Cone Sul) Pablo tem uma certa quantidade de retângulos cujas áreas somam 3 e cujos lados são todos menores ou iguais a 1. Demonstre que com esses retângulos é possível cobrir um quadrado de lado 1 de modo que os lados dos retângulos sejam paralelos aos lados do quadrado.

   Nota: Os retângulos podem estar sobrepostos e podem sair parcialmente do quadrado.

8. Seja S um conjunto finito de pontos. Prove que se A, B, C, D são pontos distintos de S tais que AB e CD são ambos segmentos de distância máxima, então esses segmentos se cortam em seus respectivos interiores.

9. (Cone Sul) Três triângulos acutângulos estão inscritos em uma mesma circunferência, de modo que seus vértices são nove pontos distintos. Demonstre que se pode escolher um vértice de cada triângulo de maneira que os três pontos escolhidos determinem um triângulo cujos ângulos sejam menores que ou iguais a $90°$.

10. (Ibero) Prove que para qualquer polígono convexo de área 1, existe um paralelogramo de área dois que o contém.

11. (Cone Sul) Um polígono de área S está contido no interior de um quadrado de lado a. Demonstre que há pelo menos dois pontos do polígono que estão separados por uma distância maior que ou igual a S/a.

12. (OBM) Seja S um conjunto de n pontos no plano de modo que não haja três pontos de S colineares. Para que valores de n é possível colorir todos os pontos de S de modo que todos os ângulos determinados por três pontos de S, todos de mesma cor ou de três cores diferentes, não sejam obtusos? A quantidade disponível de cores é ilimitada.

13. (OBM) Existe um conjunto finito de $n > 2$ pontos no plano tais que não há três pontos colineares e o circuncírculo de quaisquer três pontos pertence ao conjunto?

14. Dados n pontos no plano, prove que três deles determinam um ângulo menor ou igual a $180°/n$.

15. (Ibero) Seja $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_{1997}\}$ um conjunto de 1997 pontos no interior de um círculo de raio 1, sendo P_1 o centro do círculo. Para cada $k = 1, \ldots, 1997$ seja x_k a distância de P_k ao ponto de P mais próximo a P_k e distinto de P_k. Demonstrar que

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{1997}^2 \leq 9$$

16. (Ibero) Encontrar o maior valor possível n para que existam pontos distintos P_1, P_2, P_3, ..., P_n no plano, e números reais r_1, r_2, ..., r_n de modo que a distância entre quaisquer dois pontos diferentes P_i e P_j seja $r_i + r_j$.

17. (IMO) Determine todos os inteiros $n > 3$ tais que existem n pontos A_1, A_2, ..., A_n no plano sem que haja três deles colineares e números reais r_1, r_2, ..., r_n tais que, para todos i, j, k distintos, a área do triângulo $A_iA_jA_k$ é $r_i + r_j + r_k$.

18. (OBM) Arnaldo e Beatriz se comunicam durante um acampamento usando sinais de fumaça, às vezes usando uma nuvem grande, às vezes uma pequena.

    No tempo disponível antes do café da manhã, Arnaldo consegue enviar uma sequência de 24 nuvens. Como Beatriz nem sempre consegue distinguir uma nuvem pequena de uma grande, ela e Arnaldo fizeram um dicionário antes de ir para o acampamento. No dicionário aparecem N sequências de 24 tamanhos de nuvem (como por exemplo a sequência $PGPGPGPGPGPGGPGPGPGPGPGP$, onde G significa nuvem grande e P significa nuvem pequena). Para cada uma das N sequências, o dicionário indica seu significado. Para evitar interpretações erradas, Arnaldo e Beatriz evitaram incluir no dicionário sequências parecidas. Mais precisamente, duas sequências no dicionário sempre diferem em pelo menos 8 das 24 posições.

    Demonstre que $N \leq 4096$.

    Dica: pense em círculos! Defina distância entre duas sequências como a quantidade de posições com nuvens de tamanhos diferentes nas duas sequências. Por incrível que pareça, essa distância satisfaz a desigualdade triangular e podemos definir círculos de raio r e centro em uma sequência s como as sequências com distância menor ou igual a r de s. A idéia é, então, pensar no fato de que círculos com centros distantes não podem se intersectar.

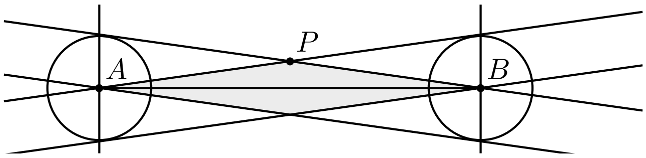
Bibliografia

1. D. Máximo, S. Feitosa, *Problemas sobre Pontos.* Eureka! 25.

Respostas, Dicas e Soluções

1. Primeiro, considere os dois vértices do polígono mais distantes A e B; seja $AB = \ell$. A reta AB divide o polígono em duas partes. Como o perímetro do polígono é ímpar, uma parte tem perímetro pelo menos uma unidade maior; se a menor tem perímetro d, a outra tem pelo menos perímetro $d+1$; pela desigualdade triangular, $\ell \leq d$, então a parte maior tem perímetro pelo menos $d+1$.

   Agora utilize a técnica do "onde estão os pontos". Se a área de algum triângulo é maior ou igual a $\sqrt{3}/4$, o problema acaba. Como cada lado do polígono é pelo menos 1, a distância de cada vértice a cada lado é menor do que $\sqrt{3}/2$. A seguir exibimos a região de onde os vértices do polígono podem estar. Usamos também o fato de que o polígono é convexo.



Sendo $\theta = \angle ABP$, temos $\cos\theta = \frac{AB}{2BP}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}2}{AB}$. Mas $AB = d$ e, pela desigualdade triangular, $2BP > d + 1$. Logo

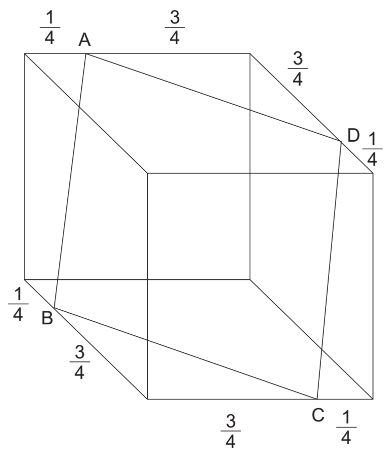
$$\left(\frac{AB}{2BP}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}2}{AB}\right)^2 = 1 \implies \frac{d^2}{(d+1)^2} + \frac{3}{4d^2} > 1$$
$$\iff (d-1)(-8d^2 - 9d - 3) > 0 \iff d < 1,$$

absurdo. Logo a área do polígono é pelo menos $\sqrt{3}/4$.

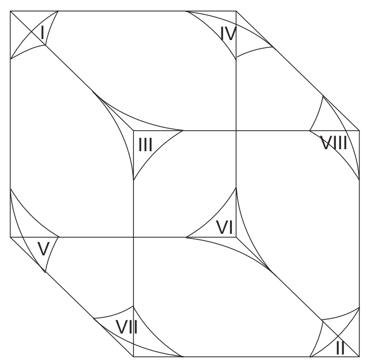
2. A segunda condição diz que todo ângulo definido por três pontos de S_n é agudo ou reto. Como $(m-2)180°/m \le 90° \iff m \le 4$, o fecho convexo de S_n deve ser um triângulo ou um retângulo. Mas se existir ponto interior a S_n deve-se ter $360°/m \le 90° \iff m \ge 4$. Se $m = 4$, as desigualdade são igualdade e aparecem três pontos colineares, então não pode ter ponto interior no fecho convexo. Logo $n = 3$ ou $n = 4$, e é fácil encontrar os exemplos.

3. Primeiro, mostremos que podemos supor, sem perda de generalidade, que os centros do cubo, que doravante chamaremos $\mathcal{C}$ e do quadrado coincidem. Suponha que os centros não coincidam. Considere os três planos distintos, cada um deles paralelo a duas faces do cubo, que passam pelo centro do quadrado. Os três planos determinam no cubo oito paralelepípedos; considere o de menores dimensões (ou seja, algum que tem todas as dimensões menores ou iguais a $1/2$). Seja a a maior dimensão desse cubo. Então construa um cubo $\mathcal{C}_0$ de lado $2a$ com centro no centro do quadrado e faces paralelas às faces do cubo do problema. Não é difícil ver que o quadrado está contido nesse cubo, dado que cada plano ou contém o quadrado ou o corta em dois polígonos congruentes e simétricos em relação ao centro do quadrado. Translade o cubo $\mathcal{C}$, incluindo o quadrado, que está em seu interior, de modo que o centro de $\mathcal{C}_0$ coincida com o centro do cubo. Agora os centros do quadrado e de $\mathcal{C}$ coincidem, e dado que $2a \le 1$, $\mathcal{C}_0$ está contido em $\mathcal{C}$, o quadrado ainda está contido no cubo $\mathcal{C}$.

   A figura a seguir mostra que $\ell \ge \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Note que $AB = CD = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $AD = BC = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2}$ e $AC = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{2}$.

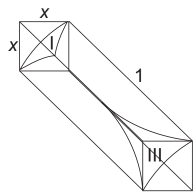


Vamos provar que, na verdade, $\ell = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Suponha que exista um quadrado de lado $\ell > \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Podemos supor que o centro do quadrado coincide com o centro do cubo. Seja $\mathcal{S}$ uma esfera com centro no centro O de $\mathcal{C}$ e que passa pelo quatro vértices do quadrado, ou seja, de raio $\ell\sqrt{2}/2 > 3/4$. A figura a seguir mostra as secções de $\mathcal{S}$ no cubo $\mathcal{C}$. Numeramos as oito regiões contidas na superfície da esfera e no interior do cubo com números romanos.

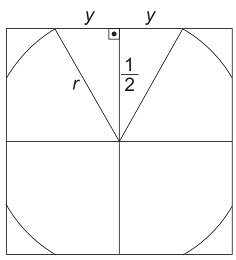


Agora, vamos tentar localizar o quadrado de lado $\ell > \frac{3\sqrt{2}}{4}$ em $\mathcal{S}$. Note que cada um dos quatro vértices deve pertencer a uma das regiões de I a VIII. Suponhamos, sem perda de generalidade, que dois vértices opostos do quadrado estão contidos nas regiões I e, conseqüentemente, II, já que vértices opostos do quadrado são diametralmente opostos em $\mathcal{S}$.

Considere o paralelepípedo de menores dimensões que contém as regiões I e, digamos, III. Sejam x, x e 1 as suas dimensões. Vamos provar que dois pontos no interior desse paralelepípedo está a uma distância menor que $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.



Primeiro, considere uma face do cubo e sua interseção com a esfera. A partir da figura a seguir, o raio da esfera é $\sqrt{y^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{y^2 + \frac{1}{2}}$. Como o raio da esfera é maior que $\frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{4}$, $y^2 + \frac{1}{2} > \left(\frac{3}{4}\right)^2 \iff y > \frac{1}{4}$. Conseqüentemente, $x = \frac{1}{2} - y < \frac{1}{4}$.



A diagonal do paralelepípedo mede $\sqrt{x^2 + x^2 + 1^2} < \sqrt{2 \cdot \frac{1}{16} + 1} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ e portanto, dois vértices do quadrado não podem estar contidos em I e III. Como um dos vértices pertence a I, não pode existir vértice do quadrado em III e, analogamente, em II e V. Da mesma forma, lembrando que um dos vértices do quadrado está em II, não pode haver vértices do quadrado em VI, VII e VIII. Mas então não sobraram regiões para os outros dois vértices do quadrado, absurdo.

Deste modo, o maior lado de um quadrado contido no cubo unitário é $\ell = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

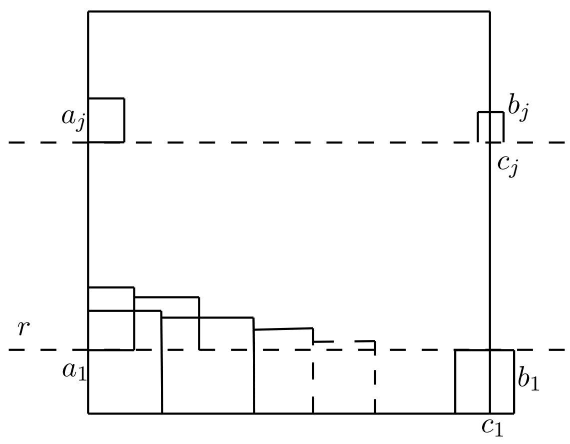
4. Consideremos o fecho convexo H desse conjunto de discos. Um arco que esteja na borda do fecho convexo não pode ser coberto por outro disco. A junção de todos os arcos no bordo de H é um círculo de raio unitário. Como este círculo tem perímetro 2π e no máximo juntamos N arcos, pelo menos um dos arcos da junção é maior ou igual a $2\pi/N$.

5. $\sqrt{3}/2$. Considere o triângulo equilátero inscrito no círculo. Ele tem lado $\sqrt{3}$ (verifique!) e como quaisquer dois pontos estão à distância $\sqrt{3}$, $2r \geq \sqrt{3} \iff r \geq \sqrt{3}/2$. Usando esse triângulo equilátero, não é difícil obter um exemplo com $r = \sqrt{3}/2$: basta tomar os pontos médios dos lados do triângulo equilátero como centros.

6. É claro que o resultado do próximo problema implica este problema, mas vamos para uma outra solução. Divida os quadrados em conjuntos de acordo com o lado. Mais especificamente, seja S_n o conjunto dos quadrados com lados no intervalo $\left[2^{-n}, 2^{-(n-1)}\right[$. Podemos supor sem perda de generalidade que $|S_n| \leq 3$; caso contrário, tomamos quatro quadrados de S_n e os trocamos por um quadrado de lado igual ao dobro do

menor quadrado, e o colocamos em S_{n-1}. Se $S_k \neq \emptyset$ para algum $k \geq 0$, o problema acaba. Então suponha que $S_k = \emptyset$ para $k \geq 0$. Então a área total é menor do que $3\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\right) = \frac{3}{1-\frac{1}{4}} = 4$, absurdo.

7. Colocamos os retângulos de modo que seus lados verticais sejam maiores do que os horizontais, e os ordenados em ordem não crescente de lados verticais. O primeiro retângulo tem lado vertical a_1 e é colocado no canto inferior esquerdo do quadrado. Colocamos o segundo retângulo logo à direita do primeiro, e assim por diante. Este processo continua até que um retângulo de dimensões $b_1 \times c_1$, $b_1 \geq c_1$ com b_1 vertical corte o lado vertical direito do quadrado. Traçamos então uma reta horizontal r que contém o lado superior do retângulo $b_1 \times c_1$. Em seguida, fazemos o mesmo, usando a reta r como base, começando com um retângulo de lado vertical a_2 e terminando com um retângulo de lado vertical b_2 e lado horizontal c_2.



Repetimos o procedimento até acabarem os retângulos, e obtemos assim k faixas $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Primeiro note que $k > 1$, pois senão todos os retângulos estariam contidos no quadrado sem se sobrepor, o que é impossível. A faixa S_j começa com um retângulo de altura vertical a_j e e termina com um retângulo $b_j \times c_j$, $b_j \geq c_j$, que corta o lado direito do quadrado. Se a última tira está incompleta, fazemos $b_k = 0$. Sendo $[P]$ a área do polígono P, temos $[S_1] + [S_2] + \cdots + [S_k] = 3$.

A altura coberta do quadrado é $B = b_1 + b_2 + \cdots + b_k$. Temos, então, que provar que $B \geq 1$. Seja ℓ_i o tamanho da base da faixa S_i. Pelo procedimento, temos $[S_j] \leq a_j \ell_j$ e $1 \leq \ell_i < 1 + c_j \leq 1 + b_j$, e portanto $[S_j] < (1 + b_j)a_j$. Assim,

$$\begin{aligned}[S_1] + [S_2] + \cdots + [S_k] &< (1 + b_1)a_1 + (1 + b_2)a_2 + \cdots + (1 + b_k)a_k \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_k b_k\end{aligned}$$

Novamente, pelo procedimento, $a_j \leq b_{j-1}$, e a_1 é o máximo dos a_i's. Logo

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_k \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_{k-1} \leq B$$
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_k b_k \leq a_1(b_1 + b_2 + \cdots + b_k) = a_1 B$$

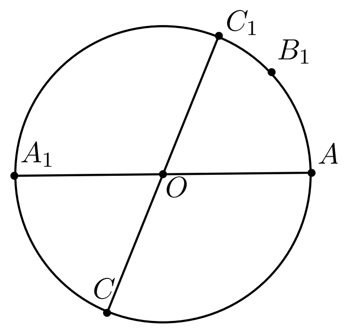
Enfim, sendo $a_1 \leq 1$, temos

$$3 = [S_1] + [S_2] + \cdots + [S_k] < a_1 + B + a_1 B \leq 1 + 2B \implies B > 1$$

e o problema acabou.

8. Use a desigualdade triangular. Se $ABCD$ é um quadrilátero convexo então $AC + BD > AB + CD$: sendo P a interseção de AC e BD, temos $AP + PB > AB$ e $CP + PD > CD$, e $AC + BD = AP + PB + CP + DP > AB + CD$. Se o fecho convexo de A, B, C e D é um triângulo então, supondo que D está dentro do fecho convexo temos $AC > CD$ ou $BC > CD$, pois prolongando CD até encontrar o segmento AB em Q temos $\angle CQA \geq 90°$ ou $\angle CQB \geq 90°$, de modo que um dos triângulos AQC ou BQC é obtusângulo ou retângulo, sendo o ângulo obtuso ou reto em Q.

9. Sejam $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ e $C_1C_2C_3$ os triângulos. Tome o ponto A_1 e trace o diâmetro AA_1 que passa por A_1. Podemos supor, sem perda de generalidade, que, dentre os pontos B_1, B_2, B_3, C_1, C_2 e C_3, o mais próximo de A é B_1 e que, dentre os pontos C_1, C_2 e C_3, o mais próximo de A, contido no arco AA_1 que contém B_1, é C_1.



O diâmetro C_1C que passa por C_1 divide a circunferência em dois arcos. Se C_1, C_2 e C_3 estivessem no arco que contém A_1, teríamos que o maior ângulo do triângulo $C_1C_2C_3$ seria maior ou igual a $180°/2 = 90°$, o que não é possível. Logo existe um ponto C_i no arco que contém B_1. Sendo C_1 o mais próximo de A, e como AC_1 contém B_1, C_i pertence ao arco CA.

Temos então que o triângulo $A_1B_1C_i$ satisfaz as condições do enunciado. Verifique que os ângulos desse triângulo não são obtusos.

10. Deixamos o caso do triângulo para o leitor. Se o polígono tem pelo menos quatro vértices, considere o quadrilátero $ABCD$ máximo com vértices em quatro desses vértices. Trace paralelas à diagonal AC por B e D, e paralelas à diagonal BD por A e C, formando um paralelogramo cuja área é o dobro da área de $ABCD$. Esse paralelogramo é o que queremos: ele tem área menor ou igual ao dobro da área do polígono, ou seja, menor ou igual a 2, e todos os vértices estão contidos nele. Caso contrário, um vértice V estaria, sem perda de generalidade, mais longe de BD do que A, e a área de $VBCD$ seria maior do que a área de $ABCD$, absurdo.

11. Suponha, por absurdo, que quaisquer dois pontos do polígono estejam separados por uma distância menor que S/a. Consideramos o ponto mais à esquerda e mais à direita X e Y do nosso polígono. Se b é a diferença de suas abscissas, o polígono está contido num retângulo de lados b e a. Temos $S \leq ab$, donde $b \geq S/a$. Como $XY \geq b$, temos um absurdo e o resultado está provado.

12. Considere o seguinte

    Lema 3. *Todo conjunto com 5 ou mais pontos, sem três pontos colineares, tem três pontos que determinam um ângulo obtuso. Além disso, em um conjunto de quatro pontos sem três que determinam um ângulo obtuso a posição de três dos pontos determina a posição do outro ponto.*

    Primeiro, note que os pontos devem determinar um polígono convexo, pois caso contrário, um dos pontos, digamos P, está no interior de um triângulo determinado por outros três pontos, digamos A, B e C, e sendo $\angle APB + \angle BPC + \angle CPA = 360°$, um dos três ângulos $\angle APB$, $\angle BPC$, $\angle CPA$ é maior do que $90°$. Por fim, como a soma dos ângulos internos de um n-ágono convexo é $(n-2)\cdot 180°$, um dos ângulos internos tem medida maior ou igual a $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = \left(1 - \frac{2}{n}\right) 180° > 90°$ para $n > 4$. Isso prova a primeira parte do lema.

    Para a segunda parte, basta notar que se temos quatro pontos então todos os ângulos internos do quadrilátero cujos vértices são os quatro pontos devem ser iguais a $90°$. Ou seja, o quadrilátero é um retângulo. Como quaisquer três dos vértices do retângulo o determinam, a segunda parte do lema está provada.

    A partir do lema, prova-se que não há mais do que quatro pontos da mesma cor ou de cores distintas em S. Provemos então que S não pode ter mais de 12 pontos. Caso tenha, então como há no máximo quatro cores e mais do que $3 \cdot 4 = 12$ pontos há quatro pontos da mesma cor. Além disso, como há no máximo quatro pontos de mesma cor, há também quatro pontos de cores diferentes.

    Provaremos agora que não é possível que S tenha quatro pontos da mesma cor e quatro pontos de cores distintas simultaneamente. Suponha que seja possível. Seja então $\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$ um subconjunto de pontos de S com a mesma cor e E, F e G pontos de S com cores distintas entre si e diferentes dos pontos de $\mathcal{P}$. Então $\{A, E, F, G\}$ e $\{B, E, F, G\}$ são conjuntos de pontos de quatro cores distintas. Mas, pelo lema, E, F e G determinam a posição tanto de A como de B, o que implica $A = B$, absurdo.

    Logo S tem no máximo 12 pontos. Além disso, existem exemplos com 12 pontos: tome os vértices de três quadrados de lado unitário cujos centros são vértices de um triângulo equilátero de lado grande. Pinte os vértices de cada quadrado de uma cor, tendo três cores distintas, uma para cada quadrado. Os ângulos determinados por três pontos de mesma cor são todos retos, e os ângulos determinados por três pontos de cores distintas podem ser arbitrariamente próximos de $60°$ (basta tomar um triângulo equilátero de lado suficientemente grande).

É possível obter conjuntos com menos de 12 pontos excluindo-se pontos do conjunto S definido acima. Assim, a resposta é $n \le 12$.

13. Não. Supondo que exista um conjunto A satisfazendo as condições do problema, seja CD um segmento com extremos em A tal que sua medida seja mínima. Como existe pelo menos um ponto E no conjunto A que não pertence à reta CD, existe pelo menos um ponto de A na mediatriz r de CD (o centro da circunferência passando por C, D e E). Seja, então, $P \in r \cap A$ tal que a distância de P a CD é mínima.

    Como, por definição, $PC = PD \ge CD$, o triângulo CDP é acutângulo, logo, sendo O o seu circuncentro, $O \in r \cap A$ e $d(O,r) < d(P,r)$, contradição.

    Podemos observar que na resolução dada supõe-se apenas que os pontos de A não estão todos sobre uma mesma reta.

14. Seja m a quantidade de pontos no fecho convexo. Então existe um ângulo interno $\angle ABC$ menor ou igual a $\frac{(m-2)180^\circ}{m}$. Ligando B a todos os $n-3$ outros pontos, dividimos $\angle ABC$ em $n-2$ ângulos; um deles é, então, menor ou igual a $\frac{(m-2)180^\circ}{m(n-2)} \le \frac{180^\circ}{n}$.

15. Considere círculos de centro P_i e raio $x_i/2$. Esses círculos têm no máximo um ponto em comum, pois $P_iP_j \ge x_i$ e $P_iP_j \ge x_j$ implicam $P_iP_j \ge x_i/2 + x_j/2$. Como $x_i \le 1$, todos os círculo estão contidos em um círculo com centro em P_1 e raio $1 + 1/2 = 3/2$, e

$$\pi\left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{x_2}{2}\right)^2 + \cdots + \pi\left(\frac{x_{1997}}{2}\right)^2 \le \pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 \iff x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{1997}^2 \le 9.$$

16. Primeiro note que, pela desigualdade triangular, $P_iP_j + P_jP_k \ge P_iP_k \iff r_i + r_j + r_j + r_k \ge r_i + r_k \iff r_j \ge 0$. Agora, interprete o problema geometricamente da seguinte forma: trace circunferências C_i com centro em P_i e raio r_i (raios nulos são permitidos). A condição $P_iP_j = r_i + r_j$ significa que quaisquer dois círculos são tangentes externamente, e o problema se traduz agora em encontrar a maior quantidade de círculos que se tangenciam externamente duas a duas.

    Considere um círculo qualquer. Todos os outros círculos devem ser tangentes externamente a ele. Se houver mais de três círculos, vão existir dois que não se tocam externamente, então o número máximo é 4.

17. A única resposta é $n = 4$. Primeiro, considere quatro pontos. De fato, há repsotas com quatro pontos: um quadrado com todos os números iguais dá certo.

    No caso geral, se $A_1A_2A_3A_4$ é um quadrilátero convexo então $[A_1A_2A_3] + [A_1A_3A_4] = [A_1A_2A_4] + [A_2A_3A_4] \iff r_1 + r_3 = r_2 + r_4$; se A_4 está no interior do triângulo $A_1A_2A_3$ então $[A_1A_2A_3] = [A_1A_2A_4] + [A_1A_3A_4] + [A_2A_3A_4] \iff r_4 = -\frac{r_1+r_2+r_3}{3}$.

    Agora note que se $n \ge 5$ não pode haver dois números r_i iguais. Se $r_i = r_j$, supondo sem perdas $i, j > 3$ temos $[A_1A_2A_i] = [A_1A_2A_j] \implies A_iA_j \parallel A_1A_2$ e, analogamente, $A_iA_j \parallel A_1A_3$, o que quer dizer que A_1, A_2, A_3 são colineares.

Agora, separe o problema em casos, de acordo com o fecho convexo dos n pontos. Se for um pentágono, os quadriláteros $A_1A_2A_3A_4$ e $A_1A_2A_3A_5$ são convexos, e $r_1+r_3 = r_2+r_4 = r_2+r_5 \implies r_4 = r_5$, abusrdo. Se for um quadrilátero, suponha que A_5 está no interior de $A_1A_2A_3A_4$, e suponha sem perdas que A_5 está no interior de $A_1A_3A_4$. Então $A_1A_2A_3A_5$ também é convexo e novamente $r_4 = r_5$, outro absurdo. Se for um triângulo $A_1A_2A_3$ então $r_4 = r_5 = -\frac{r_1+r_2+r_3}{3}$, novo absurdo.

18. Para cada sequência a no dicionário, seja $S(a)$ o conjunto das sequências de 24 nuvens que diferem de a em no máximo 4 posições. Se a e b são duas sequências distintas no dicionário, como a e b diferem em pelo menos 8 posições $S(a)$ e $S(b)$ têm em comum somente as sequências que diferem de ambas em quatro posições. Vejamos a quantos conjuntos $S(a)$ cada sequência pode pertencer: se uma sequência x difere en quatro posições de a e em quatro posições de b, estas oito posições não podem ter repetições, pois caso contrário a e b não teriam 8 posições diferentes. Portanto, x pertence a no máximo $24/4 = 6$ conjuntos $S(a)$ distintos.

    Logo, considerando que cada sequência pode pertencer a seis conjuntos $S(a)$ e a união dos conjuntos $S(a)$ cobrem no máximo todas as 2^{24} sequências,

$$N \cdot \left(\binom{24}{0} + \binom{24}{1} + \binom{24}{2} + \binom{24}{3} + \frac{1}{6}\binom{24}{4} \right) \le 2^{24} \iff N \le 4096.$$