Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Combinatória – Nível 3

Prof. Carlos Shine

Aula 20

Estrutura de Subconjuntos de um Conjunto

Tome um conjunto, finito ou não, e considere seus subconjuntos. Como eles se comportam?

Inclusão

Como os subconjuntos de um conjunto se comportam em relação à inclusão? Começaremos com alguns exemplos mais simples.

Exemplo 1. *Seja S um conjunto de n elementos. Chamamos de* cadeia *uma sequência de subconjuntos distintos $S_1, S_2, \ldots, S_k$ de S tais que*

$$S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \ldots \subset S_k.$$

Encontre o maior valor de k e, para esse valor, encontre a quantidade de cadeias.

Solução: A principal observação é que se A e B são conjuntos finitos tais que $A \subset B$ e $|A| = |B|$ então $A = B$. De fato, se $A \neq B$ então existe $x \in B$ tal que $x \notin A$ e teríamos $|A| < |B|$. Assim, uma cadeia não pode ter dois subconjuntos com a mesma cardinalidade, de modo que pode ter no máximo $n+1$ subconjuntos. Supondo, sem perda de generalidade, $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, um exemplo de cadeia de $n+1$ subconjuntos é

$$\emptyset \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\} \subset \ldots \subset \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

Como há n maneiras de escolher o elemento do conjunto unitário, $n-1$ maneiras de escolher o segundo elemento do conjunto de dois elementos, $n-2$ maneiras de escolher o terceiro elemento do conjunto de três elementos, e assim por diante, a quantidade de cadeias com $n+1$ subconjuntos é $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$. $\square$

Observação 1. *A afirmação de que $A \subset B$ e $|A| = |B|$ implica $A = B$ não é verdadeira para conjuntos infinitos! De fato, pode-se mostrar que $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$. Como contraexemplo, $|\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$.*

É de se esperar que se tivermos muitos subconjuntos então um vai conter o outro. Mas de quantos subconjuntos precisamos?

Exemplo 2. *Seja S um conjunto com n elementos. Prove que entre quaisquer $2^{n-1} + 1$ subconjuntos de S existem dois tais que um não contém o outro e dois tais que um contém o outro.*

Solução: Para a primeira parte, considere os 2^{n-1} pares de subconjuntos $\{A, S \setminus A\}$. Note que somos obrigados a escolher dois subconjuntos do mesmo par.

Para a segunda parte, seja $x \in S$. Considere os 2^{n-1} pares $\{A, A \cup \{x\}\}$, sendo A qualquer subconjunto de S que não contém x. Novamente, escolhemos dois subconjuntos do mesmo par. $\square$

As soluções acima nos fazem suspeitar que as quantidades de subconjuntos são muito grandes, e que deve haver quantidades melhores. Para a primeira pergunta, é mais simples: $n+2$ subconjuntos bastam. Pelo exemplo 1, dois subconjuntos têm a mesma quantidade de elementos, e aí o resultado segue; há exemplos para $n+1$ subconjuntos (as cadeias).

Para a segunda pergunta, precisamos de algo um pouco mais elaborado. Para facilitar, chamaremos de *família de Sperner* uma coleção de subconjuntos tais que cada um deles não contém nenhum dos outros.

Lema 1 (Desigualdade LYM, de Lubell-Yamamoto-Meshalkin)**.** *Seja $\mathcal{F}$ uma família de Sperner de um conjunto S com n elementos. Sendo a_k a quantidade de elementos de $\mathcal{F}$ com exatamente k elementos,*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \le 1.$$

Demonstração: A principal ideia tem muito a ver com o exemplo 1: cadeias. Você deve ter percebido que cada cadeia induz uma permutação dos elementos de S, de acordo com os elementos que entram. Por exemplo,

$$\emptyset \subset \{2\} \subset \{2,3\} \subset \{1,2,3\} \mapsto (2,3,1)$$

Com isso, considere todas as cadeias que contém um elemento A de $\mathcal{F}$. Há $|A|!(n-|A|)!$ tais cadeias: primeiro construímos A colocando os elementos e depois colocamos os outros $n-|A|$ elementos até completar S.

Agora, note que dois elementos de $\mathcal{F}$ não podem estar na mesma cadeia, pois um conteria o outro em caso contrário. Logo, somando tudo, e considerando que há $n!$ permutações,

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} |A|!(n-|A|)! \le n! \iff \sum_{k=0}^{n} a_k k!(n-k)! \le n! \iff \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \le 1.$$

$\square$

Com a ajuda do lema, fica fácil terminar.

Teorema 1 (Teorema de Sperner)**.** *Uma família de Sperner de um conjunto com n elementos tem no máximo $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ subconjuntos.*

Demonstração: Basta notar que $\binom{n}{k}$ é máximo para $k = \lfloor n/2 \rfloor$ ou $k = \lceil n/2 \rceil$ (esses números coincidem para n par). Com isso, $\binom{n}{k} \le \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ e, pela desigualdade LYM,

$$\sum_{k=0} \frac{a_k}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \le \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \le 1 \implies \sum_{k=0}^{n} a_k \le \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

A igualdade ocorre, por exemplo, tomando $\mathcal{F}$ como todos os subconjuntos com $\lfloor n/2 \rfloor$ elementos. $\square$

Ordens parciais e o teorema de Dilworth

A relação de inclusão é um exemplo de *relação de ordem*, pois ela satisfaz as seguintes propriedades:

- $A \subset A$ (reflexiva)
- $A \subset B$ e $B \subset C \implies A \subset C$ (transitiva)
- $A \subset B$ e $B \subset A \implies A = B$ (antissimétrica)

Toda relação que satisfaz essas três propriedades é uma *relação de ordem.* Representaremos uma relação de ordem genérica por $\succ$. Alguns exemplos são $\subset$, $\leq$, e a divisibilidade $|$ em $\mathbb{N}$.

Podemos provar teoremas sobre relações de ordem. Isso quer dizer que esses teoremas são válidos para $\subset$, $\leq$, $|\ldots$

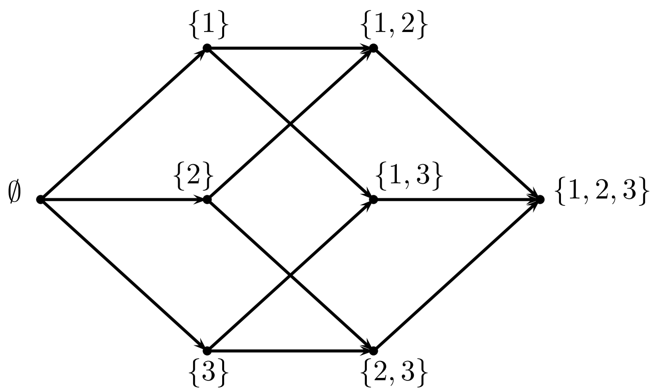
Vamos definir alguns conceitos em relações de ordem:

- Se $a \succ b$ ou $b \succ a$, dizemos que a e b são *comparáveis*;
- Uma *cadeia*, como se pode suspeitar, é uma sequência

$$a_1 \succ a_2 \succ \ldots \succ a_k;$$

- Uma *anticadeia* é um conjunto de elementos tais que quaisquer dois elementos não são comparáveis (como, por exemplo, as famílias de Sperner);
- Dizemos que a é *maximal* quando não existe $b \neq a$ tal que $b \succ a$. No caso dos subconjuntos, o único maximal é o próprio conjunto universo S.

Podemos associar relações de ordem com grafos direcionados. Por exemplo, considere os subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$:



O teorema de Sperner pode ser traduzido, em termos de relações de ordem, como *a quantidade máxima de elementos em uma anticadeia é* $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Vamos generalizar isso.

Teorema 2 (Teorema de Dilworth)**.** *Em todo conjunto parcialmente ordenado, a quantidade máxima de elementos em uma anticadeia é igual à quantidade mínima de cadeias disjuntas que cobrem o conjunto.*

No nosso exemplo dos subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$, uma anticadeia é $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ e podemos particionar os subconjuntos nas cadeias $\emptyset \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$; $\{2\} \subset \{2, 3\}$ e $\{3\} \subset \{1, 3\}$.

Demonstração: Indução sobre a quantidade de elementos do conjunto P. Se P é vazio, o teorema é trivial. Agora, para o passo, seja a um elemento maximal de P. Pela hipótese de indução, o conjunto $P' = P \setminus \{a\}$ pode ser particionado em k cadeias $C_1, C_2, \ldots, C_k$ e tem pelo menos uma anticadeia A_0 com k elementos.

Temos $C_i \cap A_0 \neq \emptyset$, pois senão dois elementos da anticadeia pertenceria a uma mesma cadeia, o que não é possível. Para cada i, $1 \leq i \leq k$, defina x_i como o elemento maximal de C_i que pertence a alguma anticadeia de tamanho k. Afirmamos que $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ é uma anticadeia. Considere x_i e x_j. Seja A_i uma anticadeia de tamanho k que contém x_i. Temos, pelos mesmos motivos anteriores, $A_i \cap C_j \neq \emptyset$. Seja $y \in A_i \cap C_j$. Então $y \prec x_j$, pela definição de x_j; como $x_i \not\succ y$, $x_i \not\succ x_j$. Trocando i e j de lugar, $x_j \not\succ x_i$, e portanto A é uma anticadeia.

Voltemos a P. Se $a \succ x_i$ para algum i, considere a cadeia $K = \{a\} \cup \{z \in C_i : z \prec x_i\}$. Então, pela escolha de x_i, $P \setminus K$ não tem uma anticadeia de tamanho k, mas tem a anticadeia $A \setminus \{x_i\}$ com $k - 1$ elementos. Logo $P \setminus K$ pode ser coberto por $k - 1$ cadeias. Colocamos K de volta, e P pode ser coberto por k cadeias. Se $a \not\succ x_i$ para todo i, $A \cup \{a\}$ é uma anticadeia com $k + 1$ elementos, pois a é maximal. A cadeia adicional é o unitário $\{a\}$. □

Vejamos algumas aplicações.

Exemplo 3. *(Romênia) Seja n um inteiro positivo e S um conjunto de $n^2 + 1$ inteiros positivos tais que todo subconjunto com $n+1$ elementos de S contém dois números tais que um divide o outro. Prove que S contém $n + 1$ números distintos $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ tais que $a_i \mid a_{i+1}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Solução: Nossa relação de ordem é a divisibilidade $\mid$ (não se esqueça de provar as três propriedades!). A condição de que entre quaisquer $n + 1$ elementos há dois tais que um divide o outro nos diz que não há anticadeias com $n + 1$ elementos, ou seja, a anticadeia máxima tem uma quantidade menor ou igual a n elementos. Mas isso quer dizer que podemos particionar S em no máximo n cadeias, e uma delas vai ter $n + 1$ elementos. □

Interseção

E se quisermos trabalhar com interseção? Vamos ver alguns resultados.

Teorema 3 (Teorema De Erdős-Ko-Rado)**.** *Sendo $n \geq 2r$, seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de S, com $|S| = n$, tal que todo subconjunto em $\mathcal{F}$ tem r elementos e quaisquer dois elementos de $\mathcal{F}$ têm interseção não vazia. Então*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{r-1}.$$

Demonstração: A ideia brilhante aqui é permutar os números em círculos e contar os elementos de $\mathcal{F}$ somente quando seus elementos aparecem *consecutivos* no círculo.

Considere uma permutação circular dos elementos de S. Suponha que apareça um elemento A de $\mathcal{F}$ na permutação, na ordem $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$. Note que todo outro elemento B de $\mathcal{F}$ que aparece deve "cortar" A em um elemento a_i, de modo que a_i pertence a B e a_{i+1} não pertence a B, ou o contrário. De qualquer forma, cada corte $a_i|a_{i+1}$ define no máximo um outro elemento de $\mathcal{F}$. Logo, como há $r-1$ cortes, cada permutação circular tem no máximo r elementos de $\mathcal{F}$.

Agora, vamos contar a quantidade de pares (A, C), em que A é um elemento de $\mathcal{F}$ e C é uma permutação circular, com A aparecendo em C. Já vimos que essa quantidade é no máximo $r \cdot (n-1)!$, contando por permutação. Contando por A, temos $r!$ permutações dos elementos de A para colocar na permutação e $(n-r)!$ permutações dos outros elementos. Então

$$|\mathcal{F}|r!(n-r)! \le r(n-1)! \iff |\mathcal{F}| \le \binom{n-1}{r-1}.$$

□

Observações 1.

- *Por que devemos ter $n \ge 2r$?*
- *Se $n > 2r$, só existe um tipo de exemplo: todos os conjuntos que contêm um elemento comum. Se $n = 2r$, há outro exemplo, que são os conjuntos que* não *contêm um elemento fixado.*

O caso contínuo para conjuntos convexos: o teorema de Helly

Para o caso em que temos conjuntos infinitos, temos um resultado interessante para conjuntos convexos. Um subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ é *convexo* quando, para todos $P, Q \in S$ e $t \in [0,1]$ temos $tP + (1-t)Q \in S$ (ou seja, o segmento ligando P e Q está contido em S). Uma consequência direta é que toda média com pesos positivos de uma quantidade finita de pontos de S está em S.

Teorema 4 (Teorema de Helly)**.** *Seja $\mathcal{F}$ uma família de compactos convexos em $\mathbb{R}^n$. Se quaisquer $n+1$ conjuntos de $\mathcal{F}$ têm um ponto em comum, então todos os elementos de $\mathcal{F}$ têm um ponto em comum.*

Demonstração: Começamos com um resultado bem simples de Radon. Considere $n+2$ pontos $p_1, p_2, \ldots, p_{n+2} \in \mathbb{R}^n$. Então existem reais $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$, não todos nulos, tais que

$$\sum_{i=1}^{n+2} p_i x_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n+2} x_i = 0$$

(note que na primeira equação temos o vetor nulo e na segunda, o escalar zero.)

Eles existem pois o sistema acima tem $n+1$ equações e $n+2$ variáveis. Seja I o conjunto dos x_i's positivos e J o conjunto dos x_j's negativos ou nulos. Considere o ponto $P = \sum_{x_i \in I} \frac{x_i}{S} P_i = -\sum_{x_j \in J} \frac{x_j}{S} P_j$, sendo $S = \sum_{x_i \in I} x_i = -\sum_{x_j \in J} x_j$. Note que P é uma combinação linear positiva dos P_i's com índices de I e também é combinação linear positiva dos P_j's com índices em J. Então, todo conjunto de $n+2$ de $\mathbb{R}^n$ pode ser particionado em dois conjuntos cujos fechos convexos têm interseção não vazia.

Vamos usar esse resultado para provar o teorema de Helly para conjuntos finitos (para conjuntos infinitos, use compacidade). Seja $m = |\mathcal{F}|$. Provaremos o resultado por indução sobre m. Para $m = n+2$, sejam $X_1, X_2, \ldots, X_{n+2}$ e seja P_i a interseção de todos os conjuntos tirando X_i. Agora, aplique o resultado para os pontos P_i, $1 \le i \le n+2$, ou seja, particione o conjunto dos P_i's em dois conjuntos A_1 e A_2 tais que os fechos convexos de A_1 e A_2 tenham um ponto P em comum. Afirmamos que P está em todos os $n+2$ sólidos. Considere um sólido X_j qualquer. O único ponto P_i que pode não estar em X_j é P_j. Se (sem perda de generalidade) $P_j \in A_1$, então $A_2 \subset X_j$, e sendo X_j convexo, ele contém o fecho convexo de A_2 e portanto contém P. Logo P está em todo X_j, e a base acabou.

Agora suponha que $m > n+2$ e que o resultado é verdadeiro para $m-1$ sólidos. Então a base mostra que quaisquer $d+2$ sólidos têm um ponto em comum. Troque dois deles pela interseção, e obtenha $m-1$ sólidos dos quais quaisquer $d+1$ têm um ponto em comum, e o resultado segue pela hipótese de indução aplicada aos $m-1$ sólidos. $\square$

Design de experimentos

Dado um conjunto finito X (cujos elementos chamaremos *pontos*) com v pontos, um *design de experimentos* é uma família de b subconjuntos de X, chamados *blocos*, de modo que dois pontos quaisquer determinam λ blocos com k pontos em cada bloco, e cada ponto está contido em r blocos.

Na verdade, os cinco parâmetros não são independentes.

Proposição 1. *Nas condições acima, prove que $vr = bk$ e $\lambda(v-1) = r(k-1)$. Portanto, representamos um design de experimentos com a terna ordenada (v, k, λ).*

Demonstração: Provar que certas condições são necessárias em designs de experimento geralmente usam contagens duplas.

A primeira identidade vem da contagem de (x, B), em que x pertence ao bloco B. Contando por x, temos v pontos, cada um em r blocos. Contando por B, temos b blocos, cada um com k elementos. Logo $vr = bk$.

A segunda identidade vem dos pares. Contamos $(\{x, y\}, B)$, em que $x \neq y$ são pontos do bloco B. Contando por B temos $b\binom{k}{2}$ pares ordenados; por $\{x, y\}$ há $\binom{v}{2}\lambda$ pares. Assim, $b\binom{k}{2} = \lambda\binom{v}{2} \iff bk(k-1) = \lambda v(v-1)$. Mas $bk = vr$, portanto $vr(k-1) = \lambda v(v-1) \iff r(k-1) = \lambda(v-1)$. $\square$

Dados v, k e λ, é possível sempre construir um design de experimentos? Na verdade, não se sabe a resposta completa para esse problema: construir designs de experimentos dá trabalho. Vejamos um exemplo.

Triplas de Steiner

Um caso particular: $k = 3$ e $\lambda = 1$. Quais são os possíveis valores de v? Ou seja, para que valores de v podemos montar triplas não ordenadas de modo que cada par de pontos aparece exatamente uma vez? Chamamos esses designs de *sistemas de Steiner*. As condições nos dizem que $vr = 3b$ e $r(3-1) = 1(v-1) \iff v = 2r+1$. Isso implica que v é ímpar. Além disso, substituindo $r = \frac{v-1}{2}$ na primeira equação nos dá $b = \frac{v(v-1)}{6}$, de modo que $v \equiv 0 \pmod 3$ ou $v \equiv 1 \pmod 3$. Juntando tudo, temos que $v \equiv 1 \pmod 6$ ou $v \equiv 3 \pmod 6$.

O mais impressionante é que as condições acima também são suficientes! Mas as construções são mais interessantes. Há várias delas; mostraremos uma particularmente elegante de Thomas Kirkman. A ideia é construir tudo recursivamente: fazemos $n \to 2n+1$ e $n \to 2n-5$. Se $n = 6t+1$, obtemos $2(6t+1)+1 = 12t+3$ e $2(6t+1)-5 = 12t-3$, cobrindo todos os $v \equiv 3 \pmod 6$; se $n = 6t+3$, temos $2(6t+3)+1 = 12t+7$ e $2(6t+3)-5 = 12t+1$, cobrindo todos os $v \equiv 1 \pmod 6$. Para isso, partimos de $v = 1$ (não há muito o que se fazer nesse caso, mas fazemos a partição $\{x\}$) e $v = 3$, que é trivial.

A grande ideia de Kirkman foi, como se faz em muitas induções, *fortalecer a hipótese*. Kirkman provou que dá para montar triplas de Steiner com uma propriedade a mais: dados $x, y \in X$, existe um único z tal que $\{x, y, z\}$ é um bloco. Seja $Y = X \setminus \{x, y, z\}$. Dizemos que um sistema de Steiner é *pastoral em relação a x e y* quando existe uma permutação $\pi\colon \mathbb{Z}_{v-3} \to Y$ tal que

$$\{\{x, \pi(2i), \pi(2i+1)\}, \{y, \pi(2i+1), \pi(2i+2)\} : 0 \le i < (v-3)/2\} \subset B$$

(as contas são todas módulo $v-3$.) A permutação $(\pi(0), \pi(1), \ldots, \pi(v-4))$ é uma *permutação pastoral*.

Só falta mais um ingrediente antes de mostrarmos a nossa construção. Dado um conjunto de $2n$ elementos, um *sistema de rodadas* é uma partição dos pares não ordenados de elementos do conjunto em $2n-1$ classes, sendo que cada elemento do conjunto aparece em cada classe exatamente uma vez (sim, pode imaginar as rodadas de um campeonato de pontos corridos de um turno). Há uma maneira simples de construir as rodadas (se os cartolas conseguem, nós conseguimos!): sendo $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{2n-2}, y\}$, a rodada j, $0 \le j < 2n-1$, consiste nos pares $\{x_{i+j}, x_{2n-1-i+j}\}$, $1 \le i < n$, e o par $\{x_j, y\}$ (contas todas módulo $2n-1$). Note que a soma dos índices é sempre $2n-1+2j$, de modo que a soma dos índices determina a rodada, e que todos os times aparecem exatamente uma vez (é só listar tudo!). Enfim, permute as rodadas de modo que a nova rodada j seja a antiga rodada $(j+1)n$, tudo módulo $2n-1$. Rotule a nova rodada i com H_i. O que importa é que:

- $\{x_0, x_1\}$ esteja em H_0;
- $\{x_0, x_{i+1}\}$ e $\{x_1, x_i\}$ estejam em H_i;
- $\{x_0, x_2\}$ e $\{x_1, y\}$ estejam em H_1;
- $\{x_0, y\}$ e $\{x_1, x_{2n-1}\}$ esteja na última rodada H_{2n-2}.

Agora sim, vamos às duas construções.

Lema 2 ($t \to 2t+1$)**.** *Se existe um sistema de Steiner com $2n-1$ elementos, existe um sistema de Steiner pastoral com $4n-1$ elementos.*

Demonstração: Seja $H_0, H_1, \dots, H_{2n-2}$ um sistema de rodadas de $2n$ times. Considere um sistema de Steiner com $2n-1$ elementos $v_0, v_1, \dots, v_{2n-2}$. Defina as triplas

$$\{v_i, a, b\}, \{a, b\} \in H_i, 0 \le i \le 2n-2$$

Temos um sistema de Steiner com $4n-1$ elementos $v_0, v_1, \dots, v_{2n-2}, x_1, x_2, \dots, x_{2n-2}, y$. Note que temos $\frac{(2n-1)(2n-2)}{6} + n(2n-1) = \frac{(4n-2)(4n-1)}{6}$ triplas; basta verificar se todo par aparece. Mas todo par que aparece no sistema de rodadas obviamente aparece, todo par de v_i's obviamente aparece e pares da forma $\{v_i, x_j\}$ também aparece.

Enfim, o sistema é pastoral em relação a x_0 e x_1, que está em H_0; note que a tripla com x_0 e x_1 é $\{x_0, x_1, v_0\}$. A permutação pastoral é $(v_1, x_2, v_2, x_3, v_3, x_4, \dots, x_{2n-2}, v_{2n-2}, y)$. $\square$

Lema 3 ($t \to 2t-5$)**.** *Se existe um sistema de Steiner pastoral com $2n+1$ elementos, existe um sistema de Steiner pastoral com $4n-3$ elementos.*

Demonstração: Seja $H_0, H_1, \dots, H_{2n-2}$ um sistema de rodadas de $2n$ times. Considere um sistema de Steiner com $2n+1$ elementos $t, u, v, v_0, v_1, \dots, v_{2n-3}$ que é pastoral em relação a t e u com permutação pastoral usual $(v_0, v_1, \dots, v_{2n-3})$. Defina as triplas

$$\begin{aligned}
&\{a, b, c\} \text{ do sistema de Steiner, } \{a, b, c\} \cap \{t, u\} = \emptyset \\
&\{v_i, a, b\}, \{a, b\} \in H_{i+1}, \{a, b\} \cap \{x_0, x_1\} = \emptyset, 0 \le i \le 2n-3 \\
&\{v, a, b\}, \{a, b\} \in H_0, \{a, b\} \ne \{x_0, x_1\} \\
&\{v_i, v_{i+1}, x_{i+2}\}, 0 \le i < 2n-3 \text{ e } \{y, v_0, v_{2n-3}\}
\end{aligned}$$

Os elementos das triplas são $v_0, v_1, \dots, v_{2n-3}, v, x_2, x_3, \dots, x_{2n-2}, y$, ou seja, tiramos t, u, x_0 e x_1. Com isso, o total de elementos é $2n+1+2n-4 = 4n-3$. O total de triplas definidas é $\left(\frac{(2n+1)2n}{6} - 2n + 1\right) + (2n-2)(n-2) + (n-1) + (2n-2) = \frac{(4n-3)(4n-4)}{6}$.

Vamos mostrar que cada par aparece alguma vez: para isso, note que como o sistema original é pastoral, as ternas com t e u são $\{t, u, v\}$, $\{t, v_0, v_1\}$, $\{t, v_2, v_3\}$, $\dots$, $\{t, v_{2n-4}, v_{2n-3}\}$, $\{u, v_1, v_2\}$, $\{u, v_3, v_4\}$, $\dots$, $\{u, v_{2n-5}, v_{2n-4}\}$, $\{u, v_{2n-3}, v_0\}$. Ou seja, essas triplas foram excluídas, e precisamos repor os pares $\{v_i, v_{i+1}\}$ do sistema original. Mas eles aparecem na última linha. Assim, todos os pares $\{v_i, v_j\}$ aparecem, ou na primeira ou na última linha.

Os pares das rodadas aparecem na segunda e terceira linhas (aqui, excluímos duplas com x_0 ou x_1 participando, então não há perigo de excluirmos pares); $\{v, x_i\}$ aparece na terceira linha, assim como $\{v, y\}$.

A primeira rodada é constituída pelos pares de índices com soma 1 módulo $2n-1$: $\{x_0, x_1\}$, $\{x_2, x_{2n-2}\}$, $\{x_3, x_{2n-3}\}$, em geral $\{x_i, x_{2n-i}\}$, $1 \le i < n$ e $\{x_n, y\}$. Além disso, x_0 faz par com x_{i+2} e x_1 com x_{i+1} na rodada $i+1$. Assim, $\{v_i, x_j\}$ aparece na segunda linha para $j \ne i+1$ e $j \ne i+2$; $\{v_i, x_{i+1}\}$ e $\{v_i, x_{i+2}\}$ aparecem na última linha. Enfim, $\{v, x_i\}$ aparece na terceira linha.

Para terminar, a permutação pastoral em relação a x_2, x_3 é, considerando ainda que $\{x_2, x_3, v_3\}$ é uma das triplas, $(v_0, v_1, v_2, y, v_4, x_4, v_5, x_5, \dots, v_{2n-3}, x_{2n-3}, v, x_{2n-2})$. De fato, as triplas com x_2 são $\{x_2, x_i, v_i\}$, $3 \le i \le 2n-3$, $\{x_2, y, v_2\}$, $\{x_2, x_{2n-2}, v\}$ e $\{v_0, v_1, x_2\}$ e as triplas com x_3 são $\{x_2, x_3, v_3\}$, $\{x_3, x_{i-1}, v_i\}$, $5 \le i \le 2n-3$, $\{x_3, x_{2n-2}, v_0\}$, $\{x_3, y, v_4\}$, $\{x_3, x_{2n-3}, v\}$ e $\{v_1, v_2, x_3\}$. $\square$

Com isso, garantimos a existência de triplas de Steiner para qualquer v, $v \equiv 1, 3 \pmod 6$. $\square$

Problemas

1. (Vingança Olímpica) Seja n um número inteiro positivo. Uma família $\mathcal{P}$ de intervalos $[i, j]$ com $0 \le i < j \le n$ e i, j inteiros é dita *unida* se, para quaisquer $I_1 = [i_1, j_1] \in \mathcal{P}$ e $I_2 = [i_2, j_2] \in \mathcal{P}$ tais que $I_1 \subset I_2$, então $i_1 = i_2$ **ou** $j_1 = j_2$.

   Determine o maior número possivel de elementos de uma família unida.

2. Prove a versão dual do teorema de Dilworth: seja P um conjunto com ordem parcial. Então a menor quantidade de anticadeias que cobre P é igual à quantidade de elementos na maior cadeia.

3. Sejam a e b inteiros positivos. Prove que, em uma sequência com $ab+1$ números reais distintos, existe uma subsequência crescente com $a+1$ números ou uma subsequência descrescente com $b+1$ números.

4. (Eslováquia) Dados 1001 retângulos com ambas as dimensões pertencentes ao conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$, prove que podemos escolher três deles distintos, A, B, C, tais que A cabe em B e B cabe em C.

5. (Romênia) Sejam m e n inteiros positivos e S um subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, 2^m n\}$ com $(2^m - 1)n + 1$ elementos. Demonstre que S contém $m + 1$ números distintos $a_0, a_1, \ldots, a_m$ tais que $a_{k-1} \mid a_k$ para $k = 1, 2, \ldots, m$.

6. Seja $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ uma família de subconjuntos distintos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ com no máximo $n/2$ elementos. Suponha que $A_i \not\subset A_j$ e $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ para i, j distintos. Prove que
$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n-1}{|A_i|-1}} \le 1.$$

7. Dados n pontos no plano tais que quaisquer três deles está contido em um círculo de raio 1, prove que todos os n pontos estão contidos em um círculo de raio 1.

8. Seja M um conjunto finito de pontos tal que a distância entre quaisquer dois deles não excede 1. Prove que M está contido em um círculo de raio $1/\sqrt{3}$.

9. Seja X um conjunto com $2k$ elementos. Considere uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X, cada um com k elementos, tais que todo subconjunto de $k-1$ elementos de X está contido em exatamente um elemento de $\mathcal{F}$. Prove que $k+1$ é primo.

10. (IMO) Prove que o conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 1989\}$ pode ser particionado em subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_{117}$ tais que $|A_i| = 17$ para $i = 1, 2, \ldots, 117$ e a soma dos elementos de cada A_i é igual.

11. (OBM) A cada dia, os 289 alunos de uma escola são divididos em 17 grupos com 17 alunos. Nenhum par de estudantes caiu no mesmo grupo mais de uma vez. Por quantos dias, no máximo, é possível fazer essas divisões?

12. Construa explicitamente um exemplo de triplas de Steiner se o conjunto em questão tem $6k+3$ pontos.

13. (Banco da IMO) Para cada inteiro $n \geq 2$, seja $N(n)$ o número máximo de triplas de números (a_i, b_i, c_i), $i = 1, \ldots, N(n)$, consistindo de inteiros não negativos a_i, b_i e c_i, tais que as duas seguintes condições são satisfeitas:

    (1) $a_i + b_i + c_i = n$, para todo $i = 1, \ldots, N(n)$;

    (2) Se $i \neq j$, então $a_i \neq a_j$, $b_i \neq b_j$ e $c_i \neq c_j$.

    Determine $N(n)$, para cada $n \geq 2$.

14. (OIMU) A soma (ou diferença simétrica) dos conjuntos A e B é definida como:

    $$A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

    Inicialmente os 1024 subconjuntos de um conjunto de 10 elementos estão escritos ciclicamente numa circunferência. Simultaneamente entre cada dois subconjuntos vizinhos escreve-se sua soma. Depois todos os conjuntos anteriores são apagados. Quais conjuntos estarão escritos na circunferência depois de repetir esta operação 2001 vezes?

15. (China Girls) Seja n um inteiro maior do que 2 e sejam $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ subconjuntos distintos de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Determine o valor máximo de

    $$\sum_{i=1}^{2n} \frac{|A_i \cap A_{i+1}|}{|A_i| \cdot |A_{i+1}|}$$

    em que $A_{2n+1} = A_1$ e $|X|$ denota a cardinalidade de X.

16. (China) Seja $n \geq 2$ inteiro. Considere n conjuntos finitos não vazios $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tais que

    $$|A_i \,\Delta\, A_j| = |i - j|, \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

    Encontre o valor mínimo de $\sum_{i=1}^{n} |A_i|$.

Bibliografia

1. R. Diestel, *Graph Theory.* Springer 2003.

2. C. J. Colbourn, A. Rosa, *Triple Systems.* Oxford University Press 1999.

3. P. Cameron, *Combinatorics – Topics, Techniques and Algorithms.* Cambridge University Press 1994.

Respostas, Dicas e Soluções

1. Considere as $2n-1$ cadeias

$$
\begin{aligned}
&[i,i+1] \subset [i-1,i+2] \subset [i-2,i+3] \subset \ldots \subset [i-k,i+k+1] \ldots, \quad 0 \le i \le n-1 \\
&[i-1,i+1] \subset [i-2,i+2] \subset [i-3,i+3] \subset \ldots \subset [i-k,i+k] \ldots, \quad 1 \le i \le n-1
\end{aligned}
$$

   Note que uma família unida não pode ter dois elementos da mesma cadeia, de modo que a quantidade de elementos de uma família unida é no máximo $2n-1$. Um exemplo com $2n-1$ intervalos é considerar os intervalos $[0,i]$ e $[i,n]$, $1 \le i \le n-1$ e $[0,n]$.

2. Para cada x do conjunto, seja n_x o tamanho da maior cadeia que tem x como termo maximal. Se $x, y \in A_i$ são tais que $x \succ y$, então $n_x \ge n_y + 1$ (tomamos a maior cadeia com y e colocamos x depois). Então os conjuntos $A_i = \{x : n_x = i\}$ são anticadeias, e ao variamos i entre 1 e o tamanho da maior cadeia no conjunto, obtemos anticadeias que cobrem o conjunto todo.

   Para terminar, note que não é possível ter menos anticadeias, já que elementos de uma mesma cadeia devem ir para anticadeias diferentes.

3. Considere a relação de ordem usual (o $\le$), mas só comparando termos na ordem da sequência. Se houver uma cadeia de tamanho $a+1$, o problema acaba imediatamente. Então toda cadeia tem no máximo a termos, de modo que pelo menos $b+1$ cadeias são necessárias para cobrir a sequência. Isso quer dizer que existe uma anticadeia de tamanho $b+1$. Mas o que é uma anticadeia? É uma sequência decrescente, pois não pode haver dois números x, y com $x \le y$ na anticadeia.

4. Primeiro, "deite" os retângulos, de modo que as bases são maiores ou iguais às alturas. Descrevemos cada retângulo R_i por uma tripla (h_i, b_i), com $1 \le h_i \le b_i \le 1000$, $1 \le i \le 1001$, sendo h_i sua altura e b_i sua base. Considere a ordem $\prec$ em que $(a,b) \prec (c,d) \iff a \le c$ e $b \le d$ (ou seja, um retângulo cabe no outro). Então precisamos provar que existe uma cadeia de tamanho pelo menos três. Suponha por absurdo que não haja tal cadeia. Então há pelo menos 501 cadeias, e portanto pelo teorema de Dilworth existe uma anticadeia com pelo menos 501 retângulos. Sejam $1 \le h_1 < h_2 < \ldots < h_{501}$ as alturas (são distintas porque senão eles seriam comparáveis) e $b_1 > b_2 > \ldots > b_{501}$ as bases. Temos $h_{501} \ge 501$ e $b_{501} \le 500$, o que contradiz $h_i \le b_i$. Logo existe uma cadeia de tamanho pelo menos três e o problema acabou.

5. Considere a relação de ordem de divisibilidade. Temos que provar, então, pelo dual de Dilworth, que pelo menos $m+1$ anticadeias são necessárias para cobrir S. Então suponha, por absurdo, que as anticadeias $A_1, A_2, \ldots, A_m$ cobrem S. Para cada elemento a de uma dessas anticadeias, associe a ele um número de $[2^{m-1}n+1, 2^m n]$ da seguinte forma: escolha o número da forma $2^t a$ que pertence a esse intervalo. Sendo $k = 2^t(2u+1)$, chamamos $2u+1$ de *parte ímpar* de k. Dois números com mesma parte ímpar não podem estar na mesma anticadeia, já que um divide o outro (o quociente

é uma potência de 2). Por isso, dois números de uma mesma anticadeia são levados a números diferentes no intervalo. Mas números de anticadeias podem ser levados a números iguais. Se $2^t \parallel k$, há $\min\{t+1, m\}$ números que podem ser associados a ele. Então, como há no intervalo $2^{m-u-1}n$ números k tais que $2^{u-1} \} k$ a quantidade elementos em S é no máximo

$$2^{m-2}n + 2^{m-3}n \cdot 2 + 2^{m-3}n \cdot 3 + \cdots + 2n \cdot (m-1) + n \cdot m = (2^m - 1)n,$$

contradição.

6. Vamos repetir a ideia da demonstração do teorema de Erdős-Ko-Rado. Considere todas as $(n-1)!$ permutações circulares de $\{1, 2, \ldots, n\}$ e conte os conjuntos quando eles aparecem consecutivos em cada permutação. Ou seja, contaremos a quantidade de pares (A_i, π) em que A_i é um conjunto da família que aparece na permutação circular π. Fixe um conjunto A_i e veja uma permutação onde ele aparece: por um argumento análogo à demonstração do teorema de Erdős-Ko-Rado, no máximo $|A_i|$ conjuntos aparecem nessa permutação. Então, para cada aparição de A_i há no máximo $|A_i|$ outros conjuntos. Em termos de contagem, tanto faz qual é o conjunto, então podemos fazer a contagem dessa forma: as permutações em que ele aparece são $|A_i|!(n-|A_i|)!$, mas como ele aparece $|A_i|$ vezes repetido, contamos $(|A_i|-1)!(n-|A_i|)!$ conjuntos. Somando tudo dá menos do que a quantidade de permutações circulares, logo
$$\sum_{i=1}^{m} (|A_i|-1)!(n-|A_i|)! \le (n-1)! \iff \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n-1}{|A_i|-1}} \le 1.$$

7. Considere os círculos com centro em cada um dos n pontos. Então quaisquer três desses círculos têm interseção não vazia, e pelo teorema de Helly todos os círculos têm interseção não vazia. Seja O um ponto da interseção; O está a uma distância menor ou igual a 1 de todos os pontos, e esse é o centro de um círculo de raio 1 que contém todos os pontos.

8. Primeiro, note que quaisquer três pontos A, B e C de M estão em um círculo de raio $1/\sqrt{3}$, que é o raio do círculo circunscrito a um triângulo equilátero de lado 1. De fato, suponha que AB é o maior lado do triângulo ABC. Então $\angle ACB \ge 60°$. Então, se $\angle ACB \ge 90°$, um círculo de centro no ponto médio de AB, e portanto raio menor ou igual a $1/2$, contém o triângulo ABC. Se $\angle ACB \le 90°$, pela lei dos senos o circunraio R de AB é $R = \frac{AB}{2 \operatorname{sen} \angle ACB} \le \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}/2} = 1/\sqrt{3}$. Assim, pelo problema anterior, todos os pontos estão em um círculo de raio $1/\sqrt{3}$.

9. Note que todo conjunto com a elementos está na mesma quantidade de subconjuntos de $\mathcal{F}$. Há $\binom{2k-a}{k-1-a}$ conjuntos de $k-1$ elementos contendo a elementos fixados. Cada elemento de $\mathcal{F}$ contém $\binom{k-a}{k-1-a} = k-a$ desses conjuntos de $k-1$ elementos, logo há $\frac{1}{k-a}\binom{2k-a}{k-1-a}$ conjuntos em $\mathcal{F}$ que contêm a elementos fixados. Logo $k-a$ divide $(2k-a)(2k-a-1)\ldots(2k-a-k+1+a+1) = (2k-a)(2k-a-1)\ldots(k+2)$, $1 \le a \le k-1$. Em particular, todo primo $p = k-a$ entre 2 e $k-1$ divide

$(2k-a)(2k-a-1)\dots(k+2) = (k+2)(k+3)\dots(k+p)$. Em particular, nenhum deles pode dividir $k+1$ (caso contrário ele não dividiria $k+2$, $k+3$, $\dots$, $k+p$). Assim, $k+1$ tem que ser primo.

10. Há, é claro, várias maneiras de se fazer isso. Exibiremos uma baseada nas seguintes ideias:

    - Primeiro dividimos o conjunto $\{1,2,3,\dots,3\cdot 117\}$ em 117 conjuntos com três elementos, todos com a mesma soma $\frac{3\cdot 117\cdot(3\cdot 117+1)}{2\cdot 117} = 9\cdot 58+6$: considere os conjuntos $\{i, 3\cdot 58+1+i, 6\cdot 58+5-2i\}$, $\{58+1+i, 2\cdot 58+1+i, 6\cdot 58+4-2i\}$, $i=1,2,\dots,58$, e $\{58+1, 4\cdot 58+2, 4\cdot 58+3\}$. Entendeu a ideia? Na primeira classe de conjuntos, o i cobre os números de 1 a 58, o $3\cdot 58+1+i$ cobre de $3\cdot 58+2$ a $4\cdot 58+1$ e o $6\cdot 58+5-2i$ os ímpares de $4\cdot 58+5$ até $6\cdot 58+3 = 3\cdot 117$; na segunda classe de conjuntos, temos $58+1+i$ cobrindo de $58+2$ até $2\cdot 58+1$, $2\cdot 58+1+i$ cobrindo de $2\cdot 58+2$ até $3\cdot 58+1$ e $6\cdot 58+4-2i$ cobrindo os pares de $4\cdot 58+4$ até $6\cdot 58+2$.
    - Depois dividimos o conjunto $\{117\cdot(2k+1)+1, 117\cdot(2k+1)+2, 117\cdot(2k+1)+3,\dots,117\cdot(2k+1)+2\cdot 117\}$ em 117 conjuntos com dois elementos, todos com a mesma soma: nesse caso é só tomar os equidistantes: $\{117\cdot(2k+1)+i, 117\cdot(2k+1)+118-i\}$, $i=1,2,\dots,117$.

    Para terminar o problema, basta juntar um conjunto com três elementos com sete conjuntos com dois elementos, um de cada tipo.

11. Cada aluno fica no mesmo grupo com outros 16 alunos. Como são 288 colegas no total, o esquema pode ser feito por no máximo $288/16 = 18$ dias.

    Vamos exibir um exemplo com 18 dias: represente cada aluno por um par ordenado (a,b) com $0 \le a,b \le 16$ (ou seja, estamos trabalhando módulo 17). No dia i, $0\le i\le 16$, tome o grupo j com os alunos $(0,j)$, $(1,j+i)$, $(2,j+2i)$, $\dots$, $(16,j+16i)$ (contas todas feitas módulo 17). A última divisão é a usual com o grupo j com $(j,0)$, $(j,1)$, $\dots$, $(j,16)$.

    Note que esses grupos são sempre disjuntos: no dia i, para achar o grupo do aluno (a,b) basta tomar $j = b-ai$. Como todos os alunos estão em algum dos 17 grupos e cada grupo tem 17 alunos, não é possível haver repetições.

    Só falta mostrar que todo par de alunos (a,b), (x,y) aparece no mesmo grupo em algum momento. Se $a=x$, eles estão no grupo a na última divisão. Se $a\ne x$, basta encontrar i,j tais que $b\equiv j+ai \pmod{17}$ e $y\equiv j+xi \pmod{17}$. Mas aí temos $(x-a)i\equiv b-y \pmod{17}$, e como 17 é primo é sempre possível encontrar i; substituindo, encontramos j. Com isso, todo par está representado. Como são $\binom{289}{2} = \binom{17}{2}\cdot 18\cdot 17$ pares tanto de alunos como de pares dentro do mesmo grupo em algum dia, não há repetições, de modo que cada par aparece exatamente uma vez.

    Observação 2. *Essa construção é um exemplo de* plano afim finito.

12. Considere três cópias de $\mathbb{Z}/(2k+1)$, ou seja, a_i, b_i, c_i, $i \in \mathbb{Z}/(2k+1)$. As triplas são $\{a_i, a_j, b_{(i+j)/2}\}$, $\{b_i, b_j, c_{(i+j)/2}\}$, $\{c_i, c_j, a_{(i+j)/2}\}$, ($i \neq j$ nos três casos anteriores) e $\{a_i, b_i, c_i\}$. Note que há $3 \cdot \binom{2k+1}{2} + 2k + 1 = \frac{(6k+3)(6k+2)}{6}$ triplas, então basta verificar se todo par está em alguma tripla. Pares do tipo $\{a_i, a_j\}$, $\{b_i, b_j\}$ e $\{c_i, c_j\}$ são fáceis de achar (veja as três primeiras classes de triplas). Pares do tipo $\{a_i, b_j\}$, $i \neq j$ estão em $\{a_i, a_{2j-i}, b_j\}$; é claro que o mesmo argumento vale para $\{b_i, c_j\}$ e $\{c_i, a_j\}$. Enfim, pares do tipo $\{a_i, b_i\}$ estão na última classe.

13. Para simplificar a notação, seja $N(n) = N$. Primeiro, note que a soma de todas as coordenadas de todas as triplas é $n \cdot N$, que deve ser maior ou igual a $3(0 + 1 + 2 + \cdots + N - 1) = \frac{3N(N-1)}{2}$. Logo
$$n \cdot N \geq \frac{3N(N-1)}{2} \iff N \leq \frac{2n}{3} + 1,$$
ou seja, $N(n) \leq \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + 1$.

    Para $n = 3k$, considere o exemplo
$$S = \{(i, m+i, 2m-2i); 0 \leq i \leq m\} \cup \{(m+1+i, i, 2m-2i-1); 0 \leq i \leq m-1\}$$
com $2k+1$ triplas.

    Para $n = 3k+1$, $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + 1 = 2k+1$; basta tomar o exemplo anterior e somar 1 na terceira coordenada, por exemplo.

    Para $n = 3k-1$, $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + 1 = 2k$; basta tomar o exemplo anterior, eliminar o que tem 0 na terceira coordenada e subtrair 1 de cada um dos demais.

    Logo $N(n) = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + 1$.

14. Primeiro, prove que $A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) = (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C$ (dá um pouco de trabalho, mas não é difícil). Com isso, podemos dispensar os parêntesis. Além disso, note que podemos trocar a ordem das contas; além disso, $A \,\Delta\, A = \emptyset$ e $A \,\Delta\, \emptyset = \emptyset \,\Delta\, A = A$. Com isso, podemos fazer algumas iterações: sendo $A_1, A_2, \ldots, A_{1024}$ os subconjuntos, na primeira iteração aparecem $A_i \,\Delta\, A_{i+1}$; na segunda, $A_i \,\Delta\, A_{i+1} \,\Delta\, A_{i+1} \,\Delta\, A_{i+2}$. Abusando um pouco da linguagem, denote $mA_i = \underbrace{A_i \,\Delta\, A_i \,\Delta \ldots \Delta\, A_i}_{m \text{ vezes}}$. Veja que $mA = \emptyset$ para m par e $mA = A$ para m ímpar. Com isso, note que aparece $A_i \,\Delta\, 2A_{i+1} \,\Delta\, A_{i+2}$. Continuando, não é difícil provar por indução (com uma demonstração igual à do binômio de Newton) que na iteração k os conjuntos são $\binom{k}{0}A_i \,\Delta\, \binom{k}{1}A_{i+1} \,\Delta\, \binom{k}{2}A_{i+2} \,\Delta \ldots \Delta\, \binom{k}{j}A_{i+j} \ldots \Delta\, \binom{k}{k}A_{i+k}$. Em particular, na iteração 1024 os conjuntos são $\binom{1024}{0}A_i \,\Delta\, \binom{1024}{1}A_{i+1} \,\Delta\, \binom{1024}{2}A_{i+2} \,\Delta \ldots \Delta\, \binom{1024}{1024}A_{i+1024}$. Mas sabe-se que $\binom{1024}{i}$ é par para $0 < i < 1024$, logo sobra $A_i \,\Delta\, A_{i+1024} = A_i \,\Delta\, A_i = \emptyset$. Logo, após 1024 passos todos os conjuntos ficam vazios, e passam a ser assim para sempre.

15. Como os conjuntos são distintos, no máximo um dos conjuntos A_i, A_{i+1} é igual à interseção $A_i \cap A_{i+1} = X$. Logo
$$\frac{|A_i \cap A_{i+1}|}{|A_i| \cdot |A_{i+1}|} \leq \frac{|X|}{|X| \cdot (|X|+1)} \leq \frac{1}{2}$$

Assim, a soma pedida não ultrapassa n.

Por outro lado, fazendo $A_{2i-1} = \{i\}$ e $A_{2i} = \{i, i+1\}$ (tomando $A_{2n} = \{n, 1\}$), $1 \le i \le n$, obtemos esse valor, que é então o máximo.

16. Para $n = 2$, temos $\sum_{i=1}^{2} |A_i| \ge 3$, já que dois conjuntos unitários têm diferença simétrica com 0 ou 2 elementos. Para $n = 3$, temos $\sum_{i=1}^{3} |A_i| \ge 4$, pelo mesmo motivo.

    Seja $f(n)$ o valor mínimo da soma. Então, como $|A_{k+1} \Delta A_1| = k \implies |A_1| + |A_{k+1}| \ge k$ e podemos transladar os índices de qualquer forma, $\sum_{i=1}^{k+1} |A_i| = |A_1| + |A_{k+1}| + \sum_{i=1}^{k-1} |A_{i+1}| \ge k + f(k-1)$. Ou seja, $f(n) \ge n - 1 + f(n-2)$.

    Para n ímpar, temos $f(n) \ge (n-1) + (n-3) + \cdots + 4 + f(3) = \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} + 2 = \frac{n^2-1}{4} + 2$. Para n par, temos $f(n) \ge (n-1) + (n-3) + \cdots + 3 + f(2) = \frac{n^2}{4} + 2$. Ou seja, em geral, $f(n) \ge \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 2$.

    O exemplo pode ser construído usando o caso de igualdade: $|A_1| + |A_n| = |A_1 \Delta A_n| \iff A_1 \cap A_n = \emptyset$. Como na nossa indução tiramos A_1 e A_n, o melhor é construir tudo "de dentro para fora".

    Para $n = 2k+1$, considere o exemplo $A_i = \{1, 3, 5, \ldots, 2(k-i)+1\}$, $1 \le i \le k$, $A_{k+1} = \{1, 2\}$ e $A_i = \{2, 4, 6, \ldots, 2(i-k-1)\}$ para $k+2 \le i \le 2k+1$; para $n = 2k$, só desconsidere A_{2k+1}. Faça outra indução para mostrar que esses exemplos funcionam.