Geometria Básica

Bruno Holanda*

12 de novembro de 2011

Resumo

Este trabalho representa um conjunto de notas de aulas de um curso inicial em Geometria Euclidiana Plana para alunos do ensino fundamental. A principal tafera dos exercícios aqui apresentados é a formação do rigor matemático necessário em problemas de geometria, porém sem grandes aprofundamentos teóricos. Portanto, nos focaremos em três pontos principais: Teorema de Pitágoras, áreas e ângulos.

1 Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é um dos mais antigos e usados teoremas da geometria plana. Também é ele que forma a base da *geometria analítica* de Descartes. Apesar de toda a sua fama, muitos estudiosos da História da Matemática afirmam que Pitágoras não foi o verdadeiro autor desse teorema. E que, muito possívelmente, os alunos da escola pitagórica sejam os reais autores.

Existem muitas provas, a maioria delas usa algum argumento de área. A solução a seguir é uma das mais simples.

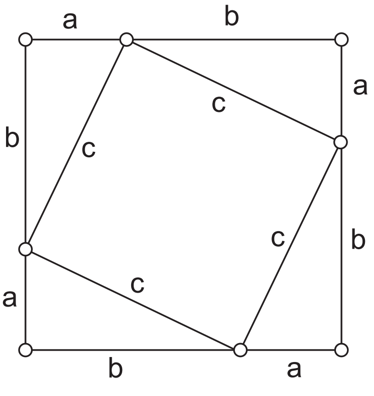


Figura 1: Teorema de Pitágoras

Prova. Na figura 1, temos um quadrado de lado $(a + b)$ particionado em um quadrado de lado c e quatro triângulos retângulos de área $\frac{a \cdot b}{2}$. Daí, por uma equivalência de áreas, temos que

*Outros materiais como este podem ser encontrados em http://brunolholanda.wordpress.com/

$(a+b)^2 = c^2 + 2ab$, ou seja:

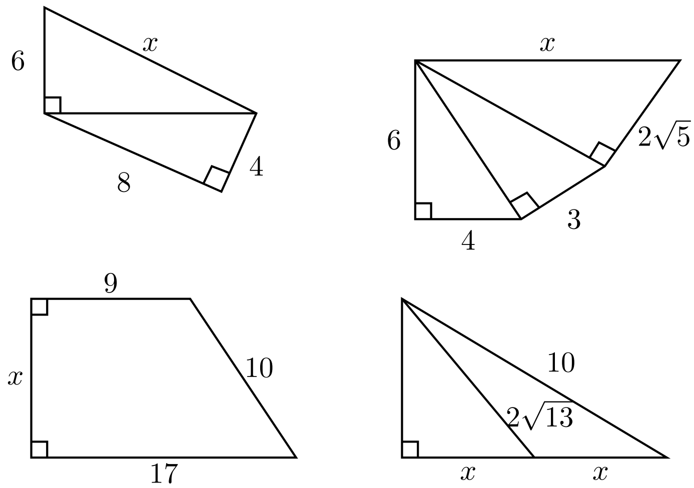
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Problema 1. Prove o Teorema de Pitágoras de duas novas maneiras:

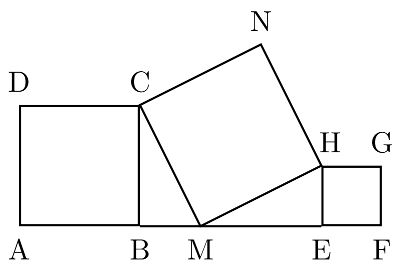
(a) (George Airy) Mostre como cortar dois quadrados em triângulos e quadriláteros e usar os pedaços para formar um único quadrado maior.

(b) (Henry Perigal) Dados dois quadrados, mostre como cortar um deles em quatro partes iguais que, juntas com o outro quadrado, formem um único quadrado maior.

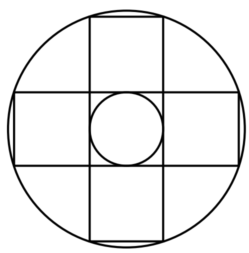
Problema 2. Determine x nas seguintes figuras:



Problema 3. Na figura abaixo $ABCD$ é um quadrado de área $64cm^2$ e $EFGH$ um quadrado de área $36cm^2$. Determine a área do quadrado $CMHN$.



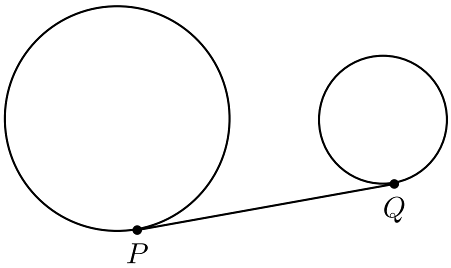
Problema 4. Na figura abaixo os dois círculos são têm o mesmo centro e os cinco quadriláteros são quadrados. Se o círculo menor tem raio igual a $1cm$ determine o raio do círculo maior.



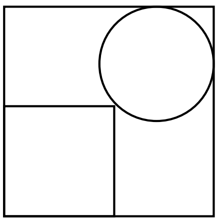
Problema 5. Seja $ABCD$ um quadrado de lado 28. Seja P um ponto no seu interior e E um ponto no lado CD de modo que $CD \perp PE$ e $AP = BP = PE$. Ache AP.

Problema 6. Suponha que ABC seja um triângulo retâgulo escaleno, e P seja o ponto na hipotenusa AC tal que $\angle ABP = 45°$. Dado que $AP = 1$ e $CP = 2$, calcule a área do triângulo ABC.

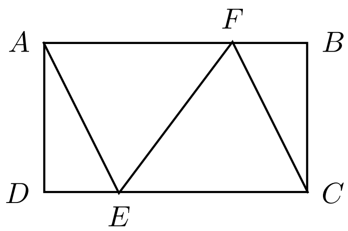
Problema 7. Na figura abaixo temos dois círculos de raios 3 e 2 e cuja distância centro a centro é 10. Ache o comprimento da tangente comum PQ.



Problema 8. (Cone Sul 1989 - adaptado) Na figura abaixo temos dois quadrados, um de lado dois e outro de lado um. Determine o raio do círculo que é tangente aos lados do maior e passa pelo vértice do menor.



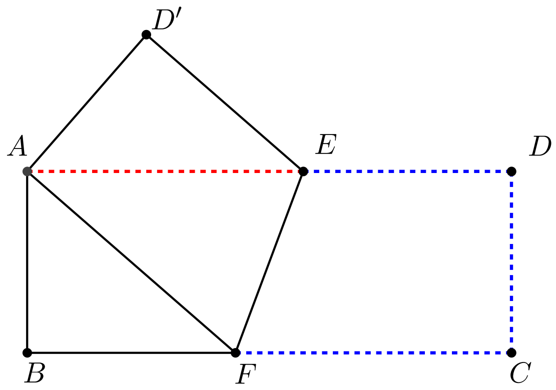
Problema 9. Nos lados AB e DC do retângulo $ABCD$, os pontos F e E são escolhidos de modo que $AFCE$ seja um losango. Se $AB = 16$ e $BC = 12$, ache EF.



Problema 10. P é um ponto no interior do retângulo $ABCD$. Se $PA = 2$; $PB = 3$, e $PC = 10$. Ache PD.

Problema 11. (Maio 2006) Um retângulo de papel $3cm \times 9cm$ é dobrado ao longo de uma reta, fazendo coincidir dois vértices opostos. Deste modo se forma um pentágono. Calcular sua área.

Solução. Seja $ABCD$ o retângulo e $ABEFD'$ o pentágono formado ao dobrar o paple como é mostrado na figura a seguir:



2 Trabalhando com Ângulos

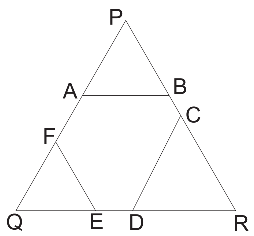
Ao lado da "distância", o "ângulo" é uma unidade de medida fundamental para o estudo da geometria plana. Explicando de uma maneira formal, o ângulo mede a diferença entre as inclinações de duas retas.

Problema 12. (Torneio das Cidades 1994) No triângulo ABC, retângulo em C, os pontos M e N são escolhidos sobre a hipotenusa de modo que $BN = BC$ e $AM = AC$. Ache a medida do ângulo $\angle NCM$.

Problema 13. Seja $ABCDEF$ um hexágono com todos os ângulos internos iguais a $120°$. Mostre que

$$AB - DE = CD - FA = EF - BC$$

Solução.



Sejam $AF \cap BC = P, ED \cap AF = Q, BC \cap ED = R$. Como todos os ângulos internos são $120°$ obtemos que todos os triângulos $\triangle PAB, \triangle QEF, \triangle RCD, \triangle PQR$ são equiláteros. Como $PQ = PR$ temos: $AB + AF + FE = PA + AF + FQ = PB + BC + CR = AB + BC + CD$, então $CD - AF = FE - BC$. A outra igualdade é análoga.

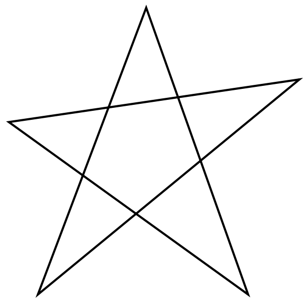
Problema 14. O octógono $ABCDEFGH$ é equiangular. Sabendo que $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 3$, $DE = 4$, e $EF = FG = 2$, calcule o perimetro do octógono.

Problema 15. Seja $ABCDEF$ um hexágono com todos os ângulos internos iguais a $120°$. Mostre que

$$AB - DE = CD - FA = EF - BC$$

Problema 16. Seja $RSTUV$ pentagono regular. Construa um triangulo eqüilátero PRS com P no interior do pentagono. Ache a medida do ângulo $\angle PTV$.

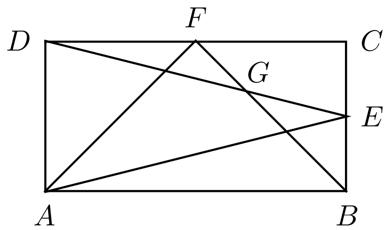
Problema 17. Ache a soma dos ângulos internos de uma estrela



Problema 18. No triângulo isósceles ABC com $AB = AC$, P é o ponto médio do lado AB tal que $AP = PC$. Se a bissetriz do ângulo $\angle ABC$ corta PC em O de modo que $PO = BO$, ache os ângulo do triângulo.

Problema 19. No trapésio $ABCD$, de bases AB e CD, temos $AD = 39$, $CD = 14$, $\angle ABC = 69°$ e $\angle CDA = 138°$. Ache a medida de AB.

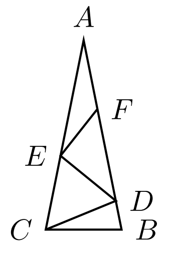
Problema 20. (OBM) No retângulo $ABCD$, E é o ponto médio do lado BC e F é o ponto médio do lado CD. A interseção de DE com FB é G. O ângulo $E\widehat{A}F$ mede $20°$. Quanto vale o ângulo $E\widehat{G}B$?



Problema 21. $DEFG$ é um quadrado no exterior do pentágono regular $ABCDE$. Quanto mede o ângulo $E\widehat{A}F$?

Problema 22. No triângulo ABC, D e E são pontos sobre os lados BC e AC respectivamente. Determine $\angle CDE$ sabendo que $AB = AC$, $AE = AD$ e $\angle BAD = 48°$.

Problema 23. Determine $B\hat{A}C$ na figura abaixo sabendo que $AB = AC$ e $BC = CD = DE = EF = FA$.



Problema 24. No triângulo ABC com $AB = BC$, $\angle ABC = 144°$. Seja K um ponto em AB, L um ponto em BC e M em AC de modo que $KL \parallel AC$, $KM \parallel BC$ e $KL = KM$. A reta LM corta o prolongamento de AB em P. Ache a medida do ângulo $\angle BPL$.

Problema 25. No triângulo ABC com $AB = BC$, P, Q e R são pontos nos lados AC, BC e AB, respectivamente tais que $PQ \parallel AB$, $RP \parallel BC$ e $RB = AP$. Se $\angle AQB = 105°$, ache as medidas dos ângulos do $\triangle ABC$.

Problema 26. BE e AD são as alturas do triângulo ABC, H é o ortocentro e F, G, K são os pontos médios dos segmentos AH, AB, BC, respectivamente. Prove que $\angle FGK$ é reto.

Problema 27. Em um triângulo ABC temos que $\hat{B} = 37°$ e $\hat{C} = 38°$. Sejam P e Q pontos sobre o lado BC tais que $\angle BAP = \angle PAQ = \angle QAC$. Se traça por B uma paralela à AP e por C uma paralela à AQ. O ponto de encontro destas duas retas é D. Calcule $\angle DBC$.

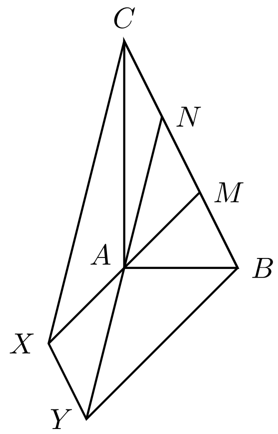
Problema 28. Em um romboide $ABCD$ ($AB = BC$ e $CD = DA$) as diagonais se cortam em um ponto F. Sobre o prolongamento do lado BC se marca um ponto E de modo que $CF = CE$ e $FCED$ também seja um romboide. Se $\angle ABC = 122°$, quanto mede $\angle ADE$?

Problema 29. *(Maio 1996)* Seja $ABCD$ um quadrado e F um ponto qualquer do lado BC. Traça-se por B a perpendicular à reta DF que corta a reta DC em Q. Quanto mede o ângulo $\angle FQC$?

3 Áreas

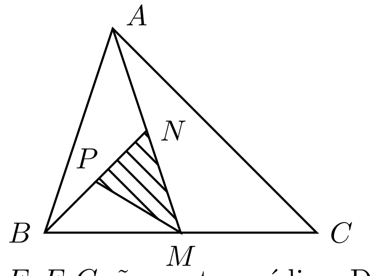
Problema 30. *(OBM 2006)* ABC é um triângulo retângulo e M e N são pontos que trisectam a hipotenuza BC. Sejam X e Y os simétricos de N e M em relação ao ponto A. Determine a área do quadrilátro $XYCB$, sabendo que o triângulo ABC tem área 1 cm^2.

Solução.

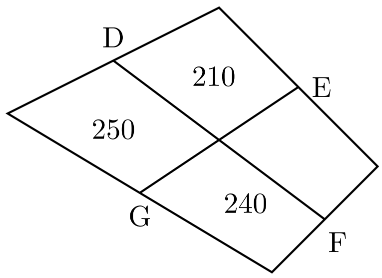


Observe que $\triangle AXY \equiv \triangle ANM$ e $\angle YXA = \angle AMN$. Assim, $XY \parallel MN$ e como $XY = MN = MC = NB$, segue que os quadriláteros $XYCM$ e $XYNB$ são paralelogramos, como A é ponto médio de XM e NY temos que $[AYC] = [BAX] = \frac{2}{3}$. Logo, $[XYCB] = \frac{8}{3}$.

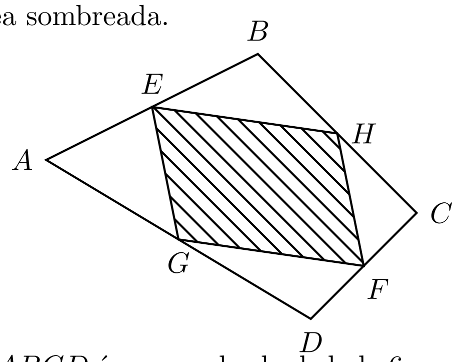
Problema 31. Na figuras abaixo ABC é um triângulo de área $72cm^2$ e M, N, P são pontos médios. Determine a área da região sombreada.



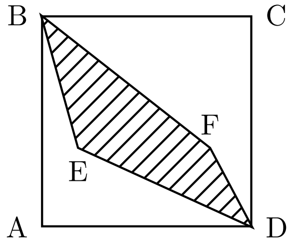
Problema 32. Na figura abaixo D, E, F, G são pontos médios. Determine a área que está faltando.



Problema 33. Na próxima figura $ABCD$ é um quadrilátero de área $200cm^2$ e D, E, F, G são pontos médios. Determine a área sombreada.

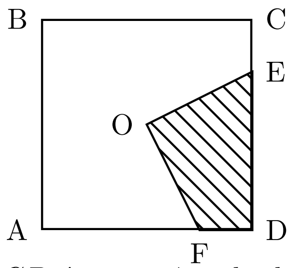


Problema 34. Na figura abaixo $ABCD$ é um quadrado de lado $6cm$ e EF é um segmento paralelo ao lado AD. Sabendo que a área sombreada é um terço da área do quadrado determine a medida do segmento EF.

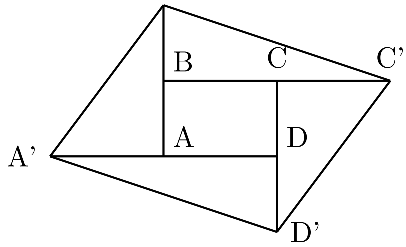


Problema 35. No trapezio $ABCD$, $AD \parallel BC$. $\angle A = \angle D = 45°$, enquanto $\angle B = \angle C = 135°$. Se $AB = 6$ e a área de $ABCD$ é 30, ache BC.

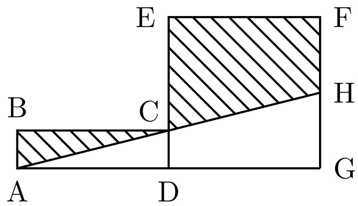
Problema 36. Na figura abaixo $ABCD$ é um quadrado de lado $4cm$ e O é o seu centro. Determine a área marcada sabendo que o ângulo EOF é reto.



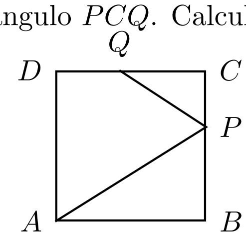
Problema 37. Na figura abaixo $ABCD$ é um retângulo de área $11cm^2$. Sabemos também que $A'A = AD$, $BB' = BA$, $CC' = CB$ e $DD' = DC$. Determine a área do quadrilátero $A'B'C'D'$



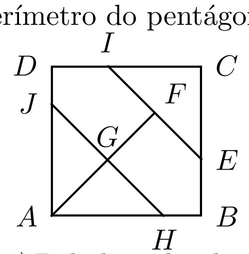
Problema 38. Na figura abaixo $DEFG$ é um quadrado de lado $4cm$ e $ABCD$ um retângulo cujos lados têm medidas $1cm$ e $4cm$. O encontro da reta AC com a reta FG é o ponto H. Determine a área marcada.



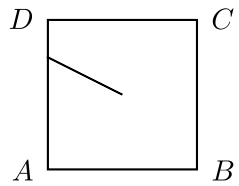
Problema 39. O quadrado $ABCD$ abaixo tem lado $10cm$. Sabe-se que $PC = QD$ e que a área do triângulo ABP é $\frac{7}{3}$ da área do triângulo PCQ. Calcule o perímetro do quadrilátero $APQD$.



Problema 40. Um quadrado de lado 5 é dividido em cinco partes de áreas iguais usando cortes paralelos às suas diagonais. Ache o perímetro do pentágono $BEFGH$.

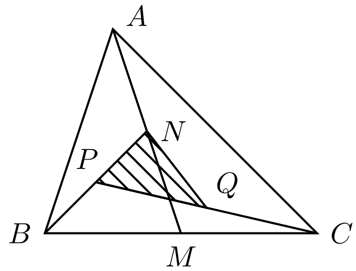


Problema 41. *(Teste Rioplatense 2005)* Paladino dividiu uma folha de papel quadrada, com 20 cm de lado, em 5 pedaços de mesma área. O primeiro corte teve início no centro do quadrado e prolongou-se até a fronteira do papel a 7 cm de um canto, como indicado na figura seguinte.



Sabendo que o João fez todos os cortes em linha recta a partir do centro do quadrado, de que forma cortou o papel?

Problema 42. Na figuras abaixo ABC é um triângulo de área $72cm^2$ e M, N, P, Q são pontos médios. Determine a área da região sombreada.



Problema 43. Sejam $ABCD$ um quadrado de lado $12cm$, E o ponto médio de DA e F o ponto médio de BC. Traçamos os segmentos EF, AC e BE, que dividem o quadrado em seis regiões. Calcular a área de cada uma dessas regiões.

Problema 44. Seja $ABCD$ um retângulo com área 1, e E um ponto sobre CD. Qual é a área do triângulo formado pelos baricentros dos triângulos ABE, BCE, e ADE?

Problema 45. Em um parapelogramo $ABCD$ de área igual a 1, seja E o ponto médio do lado DC, K o ponto de encontro das diagonais BD e AC e L o ponto de encontro de BD com AE. Ache a área do quadrilátero $ELKC$.

Problema 46. No triângulo ABC sabe-se que $\hat{C} = 90°$, $AC = 20$ e $AB = 101$. Seja D o ponto médio de BC. Ache a área do triângulo ADB.

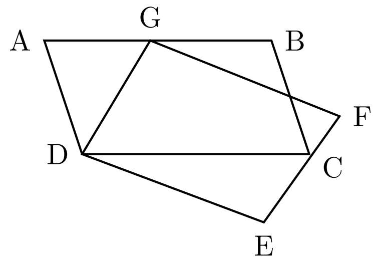
Problema 47. Seja $ABCDEF$ um hexágono regular de área $1cm^2$. Determine a área do triângulo ABC.

Problema 48. Suponha que $ABCDE$ seja um pentágono convexo (não necessariamente regular) tal que as áreas dos triângulos ABC, BCD, CDE, DEA e EAB saõ iguais a 1. Qual a área do pentágono?

Problema 49. No triângulo ABC, D é o ponto médio de BC, E o ponto médio de AD, F o ponto médio de BE e G o ponto médio de FC. Calcule a relação entre as áreas dos triângulo ABC e EFG.

Problema 50. *(Maio 1996)* Um terreno ($ABCD$) tem forma de trapézio retangular. O ângulo em $\hat{A}$ mede $90°$ e o ângulo em $\hat{D}$ mede $90°$. AB mede 30m; AD mede 20m e DC mede 45m. Este terreno tem que ser dividido em dois terrenos de área iguais traçando uma paralela ao lado AD. A que distância de D deve-se traçar a paralela?

Problema 51. Na figura abaixo $ABCD$ e $DEFG$ são paralelogramos. Além disso, F, C e G são colineares. Prove que ambos têm a mesma área.



Problema 52. *(Maio 2006)* Seja $ABCD$ um trapézio de bases AB e CD. Seja O o ponto de interseção de suas diagonais AC e BD. Se a área do triângulo ABC é 150 e a área do triângulo ACD é 120, calcular a área do triângulo BOC.

Problema 53. *(Maio 2006)* Um retângulo de papel $3cm \times 9cm$ é dobrado ao longo de uma reta, fazendo coincidir dois vértices opostos. Deste modo se forma um pentágono. Calcular sua área.

Problema 54. *(Torneio das Cidades 1981)* O quadrilátero convexo $ABCD$ está inscrito em um círculo de centro O e possui suas diagonais perpendiculares. Prove que a linha quebrada AOC divide o quadrilátero em duas regiões de mesma área.

Problema 55. *(Banco IMO)* Sejam $ABCD$ um quadrilátero convexo e M e N os pontos médios dos lados BC e DA, respectivamente. Prove que $[DFA] + [CNB] = [ABCD]$.