Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 2

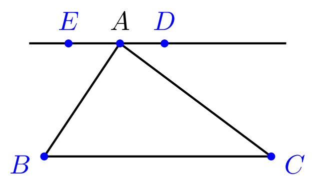
Prof. Rodrigo Pinheiro

Aula 1

Introdução

Nesta aula, aprenderemos conceitos iniciais de geometria e alguns teoremas básicos que utilizaremos em todas as aulas seguintes. É importante o aluno perceber que os exercícios olímpicos de geometria exigem muita criatividade, mas sem o conhecimento do colegial, não há criatividade que resolva. Vamos assumir alguns conhecimentos básicos, que podem ser encontrados em livros de geometria do colegial. Alguns teoremas enunciados abaixo serão demonstrados posteriormente, em aulas futuras.

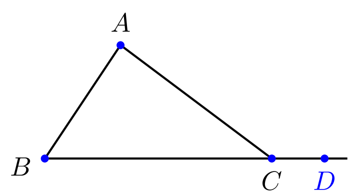
Teorema 1. A soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$.
Demonstração.



Dado um triângulo ABC, tomamos a partir de A uma reta paralela a BC. Pelas propriedades de paralelismo, temos que $\angle EAB = \angle ABC$ e $\angle DAC = \angle ACB$. Como $\angle EAD$ é um ângulo raso, temos que $\angle EAD = 180°$, podemos concluir que:

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°.$$

Teorema 2. A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.
Demonstração.



Como a soma dos ângulos internos é $180°$, então $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$. Mas na reta BD, temos que $\angle BCA + \angle DCA = 180°$. Assim,

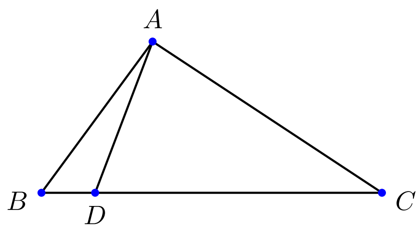
$$\begin{aligned} \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB &= \angle BCA + \angle DCA, \\ \angle ABC + \angle CAB &= \angle DCA. \end{aligned}$$

Teorema 3. A soma de todos os ângulos internos de um polígono convexo de n lados é $180° \cdot (n-2)$
Demonstração. A partir de um vértice do polígono, traçaremos todas as suas diagonais, ou seja dividimos o polígono em $n-2$ triângulos, portanto, a soma de todos os ângulos internos do polígono é igual a soma de todos os ângulos internos de todos os triângulos que é $180° \cdot (n-2)$.

Teorema 4. Dois lados de um triângulo são congruentes se, e somente se os ângulos opostos a estes lados são congruentes.

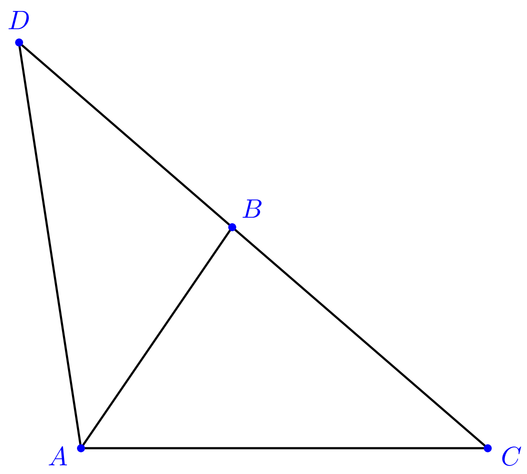
Teorema 5. Em todo triângulo isósceles, a altura, mediana e bissetrizes relativas à base são coincidentes.

Teorema 6. Dados dois lados distintos de um triângulo, o maior ângulo é oposto ao maior lado.
Demonstração.



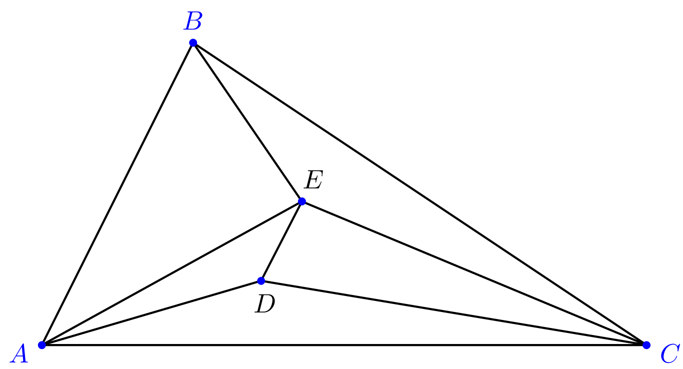
Suponhamos $BC > AC$. Seja D o ponto sobre o lado BC tal que $AC = CD$. Portanto, o triângulo ADC é isósceles. Pelo teorema anterior temos que, $\angle CAD = \angle CDA$. Pelo teorema do ângulo externo temos que $\angle CDA = \angle ABD + \angle DBA > \angle ABC$. Como $\angle BAC > \angle CAD = \angle CDA > \angle ABC$, temos que $\angle BAC > \angle ABC$.

Teorema 7. A soma de dois lados quaisquer de um triângulo é maior que o terceiro lado.
Demonstração.



Seja D o ponto sobre o prolongamento BC, tal que $BD = BA$. Sendo assim, o triângulo DBA é isósceles, portanto, $\angle BAD = \angle BDA$. Pela figura, percebemos que $\angle CAD > \angle BAD = \angle BDA$. Pelo teorema anterior, temos que $CD > CA$. Como $BD = BA$ e $CB + BD = CD$, podemos concluir que $CB + BA > AC$. Analogamente provamos para os outros lados.

Problema 1. Paladino, num belo domingo à tarde decidiu se divertir com a bela geometria. Ele pegou um triângulo, com três pontos distintos em seu interior, e traçou alguns segmento entre esses pontos e os vértices do triânguo. Ele notou que dividiu a figura toda em triângulos como mostrada abaixo.



Em todos os desenhos onde os segmentos não se cortavam e a figura foi dividida em triângulos, sempre existiam 5 triângulos pequenos! Ele provou que em um triângulo, se tomarmos n pontos em seu interior e triagularizarmos a figura unindo os pontos internos sem cruzamento dos segmentos, sempre dividiremos a figura em $2n+1$ triângulos pequenos. Demonstre esta afirmação.

Solução. Você já escutou falar em contagem dupla? Pois é! Você escutará muito isso em combinatória! Utilizaremos isso também em geometria.

Vamos calcular a soma de todos os ângulos internos de todos os triângulos pequenos de duas formas, essas duas somas tem que ser a mesma. Na primeira forma, digamos que existem T triângulos pequenos, portanto a soma que queremos será $180° \cdot T$. Na segunda forma, basta perceber que cada ângulo vértice no interior do triângulo contribui para a soma com $360°$, enquanto todos os vértices do triângulo contribui com $180°$. Temos então que $180° \cdot T = 360° \cdot n + 180°$, simplificando, temos que $T = 2n + 1$.

Problema 2. Paladino já estava na madrugada de segunda-feira, quando pensou na seguinte hipótese: "Será que dado um polígono convexo, se dividirmos o polígono em triângulos traçando suas diagonais sem se interceptarem, o número de triângulos é sempre o mesmo?" E aí, o que você acha?

Solução. Se dividirmos o polígono em T triângulos ligando suas diagonais sem se interceptarem, a soma de todos os ângulos internos do polígono será $180° \cdot T$, como a soma sempre é $180° \cdot (n-2)$, teremos que $T = n - 2$.

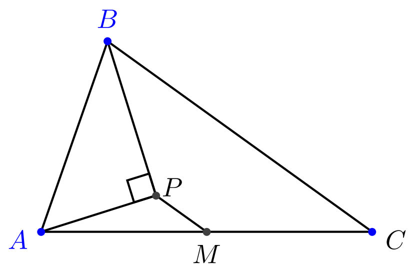
Problema 3. Demonstre que se em um polígono convexo de n lados, 4 desses ângulos forem retos, então esse polígono é um retângulo.

Solução. Obviamente $n \geq 4$. Suponhamos $n > 4$. Seja S_{n-4} a soma dos outros $n-4$ ângulos. Por ser um polígono convexo, cada ângulo é menor que $180°$. Portanto, $S_{n-4} < 180°(n-4)$. Sabendo que a soma de todos os ângulos internos é

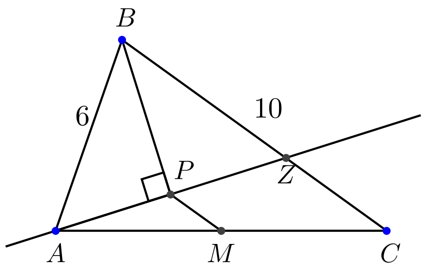
$$180° \cdot (n-2) = 90° + 90° + 90° + 90° + S_{n-4} < 360° + 180° \cdot (n-4)$$

chegamos que $180°(n-2) < 180° \cdot (n-2)$, que é um absurdo.

Problema 4. No triângulo ABC abaixo, BP é bissetriz do ângulo B e M é o ponto médio do lado AC. Se $AB = 6$ e $BC = 10$, calcule PM.



Solução. Veja a nova figura, onde prolongamos AP até encontrar o lado BC em Z.



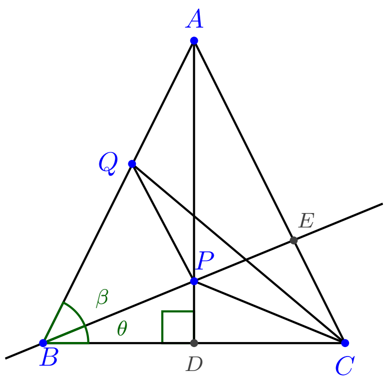
Note que no triângulo ABZ, o segmento AP é altura e bissetriz. Isso faz com que o triângulo ABZ seja isósceles! Logo $BZ = AB = 6$ e portanto:

$$ZC = BC - BZ = 10 - 6 = 4.$$

Perceba ainda que como o triângulo ABZ é isósceles, BP é altura, bissetriz e mediana. Logo P é o ponto médio de AZ. Como M já é o ponto médio de AC, vemos que PM é a base média no triângulo AZC. Conclusão:

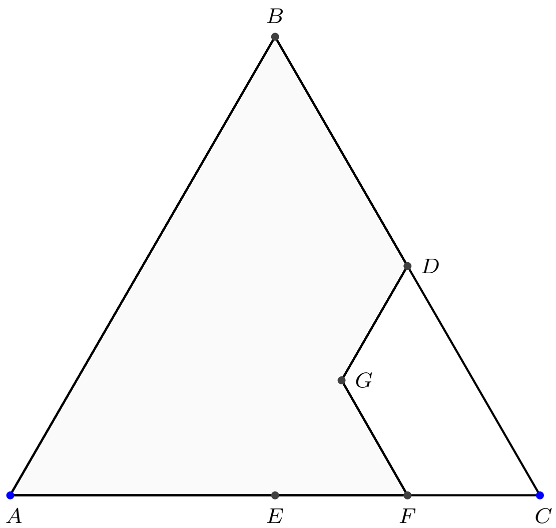
$$PM = \frac{ZC}{2} = 2.$$

Problema 5. Em um triângulo ABC ($AB = AC$, $\angle BAC = 30°$) marcamos um ponto Q no lado AB e um ponto P na mediana AD, de modo que $PC = PQ (Q \neq B)$. Ache $\angle PQC$.
Solução.



Como o $\triangle ABC$ é isósceles e $\angle BAC = 30°$, temos que $\angle ABC = \angle ACB = 75°$. Chame $\angle BPQ = \beta$ e $\angle PBC = \theta$. Como PD é mediana e altura do $\triangle BPC$, então $\angle BCP = \theta$ e $PC = PB$, pela propriedade de ângulo externo, concluímos que $\angle CPE = 2\theta$. Como $PC = PB = PQ$, temos que $\triangle PBQ$ é isósceles, portanto $\angle PQB = \angle QBP = \beta$. Pela propriedade de ângulos externos $\angle QPE = 2\beta$. Daí temos que $QPC = 2.(\beta + \theta) = 150°$. Como $PQ = PC$, temos que $\triangle PQC$ é isósceles, então $\angle PQC = \angle PCQ$, concluindo que $\angle PQC = 15°$.

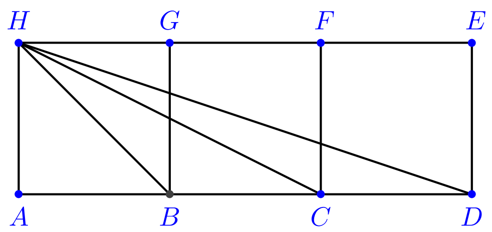
Problema 6. (OBM - 99) Na figura, os triângulos ABC e EGF são equiláteros. O perímetro do triângulo ABC é $132cm$ e, além disso, $AE = EC$, $BD = DC$, $EF = FC$ e $DG = GE$.



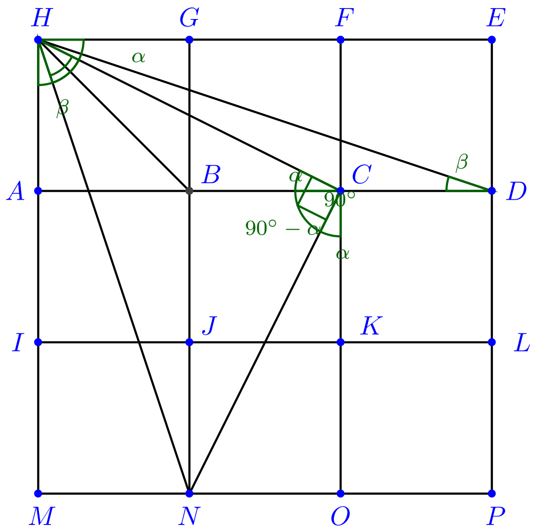
Qual o perímetro da área sombreada?

Solução. Como o $\triangle ABC$ é equilátero, então todos os seus lados são iguais, assim como seus ângulos são todos iguais a $60°$. Portanto, $AB = BC = CA = \frac{132}{3} = 44cm$. Como $BD = DC$, temos que $BD = DC = \frac{44}{2} = 22$, analogamente $EC = 22$. Dado que o $\triangle DEC$ é isósceles com um ângulo de $60°$, então ele é equilátero, consequentemente $DE = 22$. Sabendo que $DG = GE$, obtemos que $DG = GE = 11$. Analogamente obtemos que $EF = FC = 11$, assim o perímetro da área sombreada é $AB+BD+DG+GF+FE+EA = 44 + 22 + 11 + 11 + 11 + 22 = 121$.

Problema 7. Na figura abaixo, $ABGH$, $BCFG$ e $CDEF$ são quadrados iguais. Determine a soma $\angle ABH + \angle ACH + \angle ADH$.



Solução. Observemos a figura abaixo.



Pela propriedade de ângulos alternos internos, temos que $\angle ACH = \angle CHE = \alpha$. Pela simetria da figura, vemos que $\angle NHM = \angle HDA = \beta$, da mesma forma vemos que $\angle OCN = \angle HCA = \alpha$ e $CN = HC$, como $\angle ACO = 90°$, concluímos que $\angle HCN = 90°$. Como o $\triangle HCN$ é isósceles com um ângulo de $90°$, temos que $CHN = 45°$. Sabendo que $\angle MHE = 90°$, vemos que $\alpha + \beta + 45° = 90°$, como $\angle ABH = 45°$, temos que: $\angle ADH + \angle ACH + \angle ABH = 90°$

Problema 8. Dados n pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e um círculo unitário, prove que é possível encontrar um ponto M sobre o círculo tal que $MA_1 + MA_2 + \cdots + MA_n \geq n$.
Solução. Sejam M_1 e M_2 pontos diametralmente opostos no círculo. Então $M_1A_k + M_2A_k \geq M_1M_2 = 2$. Adcionando essas desigualdades para $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ temos

$$(M_1A_1 + \cdots + M_1A_n) + (M_2A_1 + \cdots + M_2A_n) \geq 2n.$$

Portanto, $M_1A_1 + \cdots + M_1A_n \geq n$ ou $M_2A_1 + \cdots + M_2A_n \geq n$, então basta tomar $M = M_1$ ou $M = M_2$.

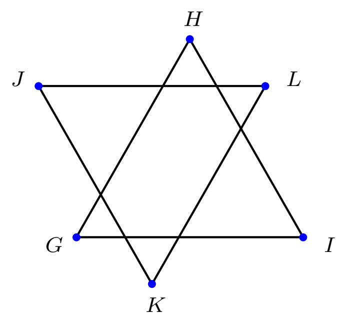
Problema 9. Os ângulos $\angle BAD$ e $\angle CBA$ do quadrilátero convexo $ABCD$ são iguais e $BC = 1$, $AD = 3$. Prove que o comprimento de CD é maior que 2.
Solução. Tomemos um ponto E sobre AD tal que $AE = BC$. Seja F o ponto de encontro das retas AD e BC, como $\angle BAD = \angle CBA \Rightarrow \angle FAB = \angle FBA$. Portanto o triângulo FAB é isósceles, com $FA = FB$. Assim, $FE = FC$, pois $AE = BC$, podemos concluir então que o $\triangle FEC$ também é isósceles, consequentemente, $\angle FEC = \angle FCA$. A partir disto, temos que $\angle DEC = \angle GCE$. Pela figura, percebemos que $\angle GCE > \angle DCE$, ou seja, $\angle DEC > \angle DCE$, pelo Teorema 6, concluímos que $CD > ED = 3 - 1 = 2$.

Problemas Propostos

Problema 10. Dados os pontos colineares e consecutivos A, B, C, D e E, tal que $AB + CD = 3 \times BC$ e $DE = AB$. Sendo M o ponto médio de BE, onde $MD = 2$ e $AE = 16$, calcule MC.

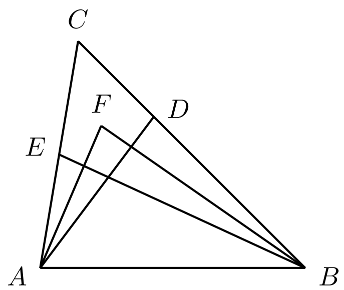
Problema 11. Em um reta, temos quatro pontos A, B, C e D que satisfazem as seguintes relações $4 \times AB - BD - 2 \times CD = 4$, $AB = 3$ e $AC = 5$, calcule AD.

Problema 12. (OBM-2011) Dois triângulos equiláteros de perímetro $36cm$ cada um sâo sobrepostos de modo que sua interseção forme um hexágono com pares de lados paralelos, conforme ilustrado no desenho. Qual é o perímetro desse hexágono?



Problema 13. Um trapézio $ABCD$ de bases BC e AD com $BC < AD$ é tal que $2.AB = CD$ e $\angle BAD + \angle CDA = 120°$. Determine os ângulos do trapézio $ABCD$.

Problema 14. No $\triangle ABC$, E e D são pontos interiores aos lados AC e BC, respectivamente. Se AF bissecta $\angle CAD$ e BF bissecta CBE. Prove que $\angle AEB + \angle ADB = 2\angle AFB$.



Problema 15. No $\triangle ABC$, um ponto D está sobre AC tal que $AB = AD$. Se $\angle ABC - \angle ACB = 30$, encontre $\angle CBD$.

Problema 16. A bissetriz interior de B, e a bissetriz exterior de C do triângulo ABC encontram-se em D. Através de D, uma reta paralela a CB encontra AC em L e AB em M. Se as medidas dos comprimentos de LC e MB do trapézio $CLMB$ são 5 e 7, respectivamente, encontre a medida de LM. Prove seu resultado.

Problema 17. No $\triangle ABC$, CF é mediana relativa á hipotenusa AB, CE é bissetriz de $\angle ACB$, e CD é uma altura realativa à AB. Prove que $\angle DCE = \angle ECF$.

Problema 18. A medida do segmento de reta PC, perpendicular á hipotenusa AC do triângulo retângulo ABC, é igual à medida do comprimento BC. Mostre que BP deve ser perpendicular ou paralelo à bissetriz de A.

Problema 19. Prove que para quaisquer três pontos A, B, C nós temos $AC \geq |AB - BC|$.

Problema 20. O lado AC do triângulo ABC tem comprimento 3.8, e o lado AB tem comprimento 0.6. Se o comprimento do lado BC é um inteiro, qual é o seu comprimento?

Problema 21. Prove que o comprimento de qualquer lado de um triângulo não é maior que metade do perímetro.

Problema 22. A distância de Leningrado para Moscou é 660 quilômetros. De Leningrado para Likovo são 310 quilômetros, de Likovo para Klin são 200 quilômetros e de Klin para Moscou são 150 quilômetros. Qual é a distância entre Likovo e Moscou?

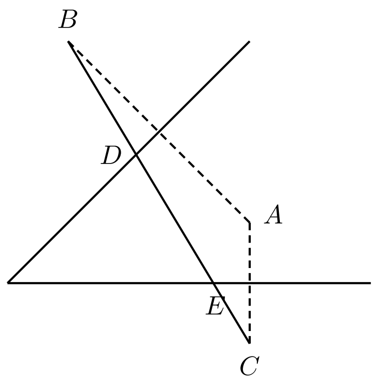
Problema 23. Encontre um ponto dentro de um quadrilátero convexo tal que a soma das distâncias do ponto aos vértices é mínima.

Problema 24. O ponto O é dado no plano do quadrado $ABCD$. Prove que a distância de O até um dos vértices do quadrado não é maior que a soma das distâncias de O até os outros três vértices.

Problema 25. Prove que a soma das diagonais de um quadrilátero convexo é menor que o perímetro mas é maior que o semiperímetro.

Problema 26. Prove que a soma das diagonais de um pentágono convexo maior que o perímetro mas é menor que o dobro do perímetro.

Problema 27. Um ponto A, dentro de um ângulo acutângulo, é refletido em cada lado do ângulo para obtermos os pontos B e C. O segmento de reta BC intersecta os lados do ângulo em D e E. Mostre que $BC/2 > DE$

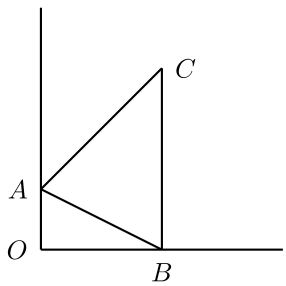


Problema 28. Prove que a distância entre quaisquer dois pontos dentro de um triângulo não é maior que que metade do perímetro do triangulo.

Problema 29. Se o ponto O está dentro do triângulo ABC, prove que $AO+OC < AB+BC$.

Problema 30. Prove que a soma das distâncias de O aos vértices de um dado triângulo é menor que o perímetro, se o ponto O está dentro do triângulo. O que acontece se o ponto O estiver fora do triângulo?

Problema 31. O ponto C está dentro de um ângulo reto, e os pontos A e B estão sobre seus lados. Prove que o perímetro do triângulo ABC não é menor que duas vezes a distância OC, onde O é o vértice do ângulo reto.



Problema 32. Prove que o comprimento da mediana AM em um triângulo ABC não é maior que a metade da soma dos lados AB e AC. Prove que a soma dos comprimentos das três medianas não é maior que o perímetro do triângulo.

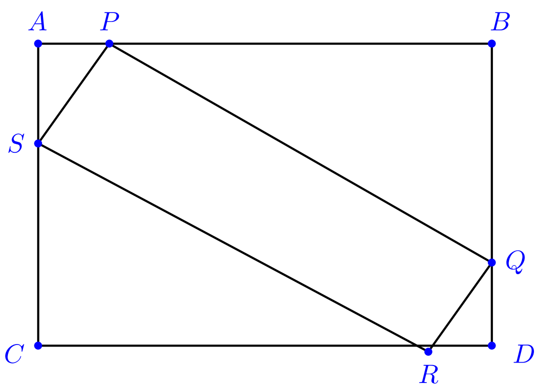
Problema 33. Prove que um polígono convexo não pode ter três lados , cada um maior que a maior diagonal.

Problema 34. Prove que o perímetro de um triângulo não é maior que 4/3 da soma das medianas.

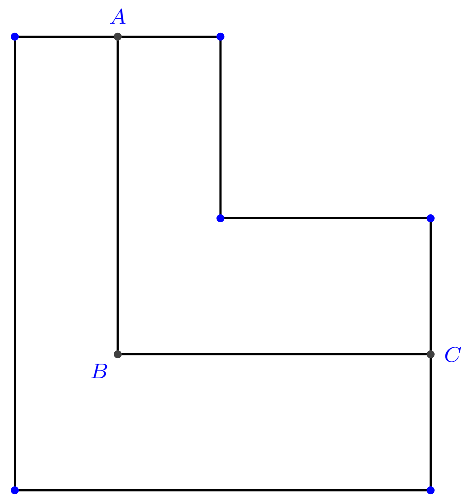
Problema 35. Prove que um pentágono convexo tem três diagonais que são lados de um triângulo.

Problema 36. Qual é o ângulo formado pelas agulhas do relógio as 12:35?

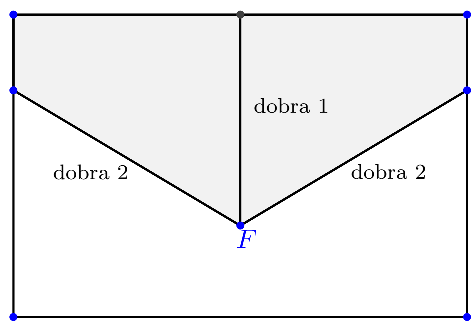
Problema 37. Na figura, os vértices do retângulo $PQRS$ pertencem aos lados do retângulo $ABCD$. Sendo $AP = 3cm$, $AS = 4cm$, $SC = 6cm$ e $CR = 8cm$, qual a área do retângulo $PQRS$, em cm^2?



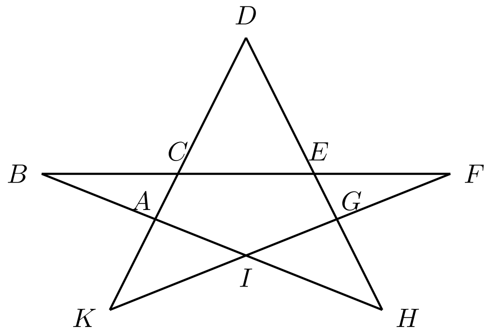
Problema 38. A piscina do clube que Samuel frequenta tem a forma de um hexágono (polígono com seis lados), com um ângulo intero de $270°$, os demais ângulos de $90°$ e os quatro lados menores com $12m$ cada. Samuel costuma nadar pelo meio da piscina, a partir do ponto A, descrevendo o trajeto representado, na figura, pelo ângulo reto ABC, em que $AB = BC$. Certo dia, ele nadou por esse trajeto 4 vezes, isto é, foi e voltou 2 vezes. Quantos metros ele percorreu?



Problema 39. Uma folha de papel tem $20cm$ de comprimento por $15cm$ de largura. Dobramos essa folha ao meio, paralelamente à sua largura. Em seguida, dobramos a folha retangular dupla, de modo que dois vértices opostos coincidam. Ao desdobrar a folha, as marcas da segunda dobra dividem a folha em duas partes, conforme mostrado na figura ao lado. Qual é a área da parte escura, em cm^2?



Problema 40. Prove que é impossível desenhar uma estrela (veja a figura abaixo) de modo que $AB < BC, CD < DE, EF < FG, GH < HI$ e $IK < KA$.



Problema 41. Seja $ABCD$ um paralelogramo. O ponto E está sobre AD de modo que $AE = CD$. Se $\angle ABE = 30°$ encontre o valor do ângulo $\angle EBC$.

Problema 42. Seja $\triangle ABC$ um triângulo com $\angle A = 50°$. O lado BC é prolongado em ambas as direções e sobre os prolongamentos são marcados os pontos P e Q de modo que $PB = BA$, $CQ = CA$ e $PB + BC + CQ = PQ$. Calcule a medida do ângulo $\angle PAQ$.

Problema 43. Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo em C. Sejam M e N pontos sobre a hipotenusa tais que $BN = BC$ e $AM = AC$. Ache o valor do ângulo $\angle NCM$.