Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 2

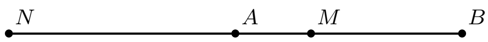
Prof. Rodrigo Pinheiro

Aula 3

Teorema de Tales e Aplicações

Divisão Harmônica

Dizemos que os pontos M e N dividem harmonicamente o segmento AB quando $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$.

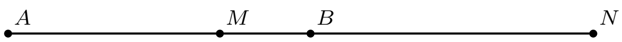


Como $\frac{MA}{MB} = k = \frac{NA}{NB}$, os pontos M e N dividem o segmento AB na mesma razão. Estes pontos são chamados conjugados harmônicos de AB na razão k.

Problema 1. Prove que em uma divisão harmônica com $k > 1$, temos que:

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$$

Solução.



$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} \Rightarrow \frac{AM}{AB - AM} = \frac{AN}{AN - AB}$$

$$\Rightarrow AM(AN - AB) = AN(AB - AM) \Rightarrow AM.AN - AM.AB = AN.AB - AM.AN$$

$$\Rightarrow 2.AM.AN = AN.AB + AM.AB \Rightarrow \frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$$

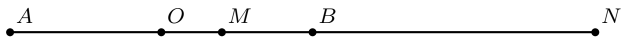
Problema 2. Prove que em uma divisão harmônica com $k < 1$, temos que:

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} - \frac{1}{AN}$$

Problema 3. Sendo O o ponto médio de AB em uma divisão harmônica, prove que:

$$OA^2 = OM.ON$$

Solução.

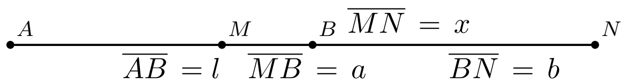


$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} \Rightarrow \frac{OM + OA}{OB - OM} = \frac{ON + OA}{ON - OB}$$

Como $OB = OA$, temos que:

$$(OM + OA)(ON - OA) = (ON + OA)(OA - OM) \Rightarrow$$
$$OM.ON - OM.OA + ON.OA - OA^2 = ON.OA - OM.ON + OA^2 - OM.OA \Rightarrow$$
$$OA^2 = OM.ON$$

Problema 4. Sejam M e N conjugados harmônicos na razão $k > 1$ do segmento $AB = l$. Qual é a distância entre os divisores harmônicos de AB?
Solução.



$$\frac{MA}{MB} = k \Rightarrow \frac{1-a}{a} = k \Rightarrow 1 - a = a.k \Rightarrow a = \frac{1}{k+1}$$
$$\frac{NA}{NB} = k \Rightarrow \frac{1+b}{b} = k \Rightarrow 1 + b = b.k \Rightarrow a = \frac{1}{k-1}$$

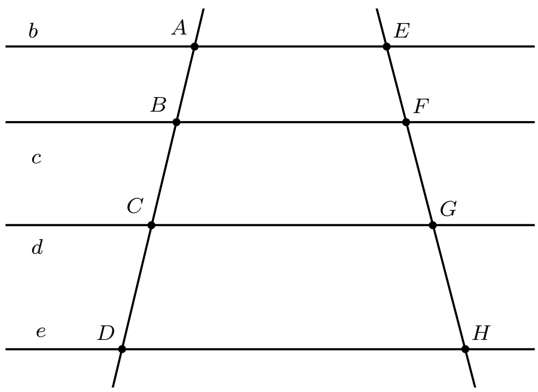
Portanto,

$$x = a + b \Rightarrow x = \frac{2k.l}{k^2 - 1}$$

Problema 5. Sejam M e N conjugados harmônicos na razão $k < 1$ do segmento $AB = l$. Qual é a distância entre os divisores harmônicos de AB?

Teorema de Tales

Teorema 1. Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas retas transversais, r e s, então a razão entre quaisquer dois segmentos determinados em r é igual a à razão entre os segmentos correspondentes em s.



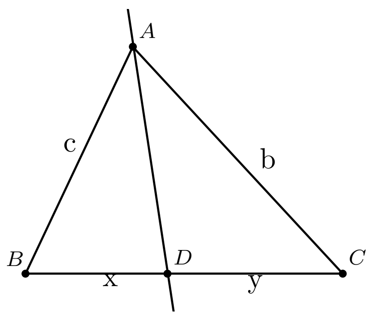
Se b, c, d e e são retas paralelas cortadas pelas transversais r e s, então:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{AC}{EG} = \frac{BD}{FH} = \frac{AD}{EH}$$

Teorema da bissetriz interna

Teorema 2. A bissetriz interna de um ângulo interno de um triângulo determina sobre o lado oposto ao ângulo dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

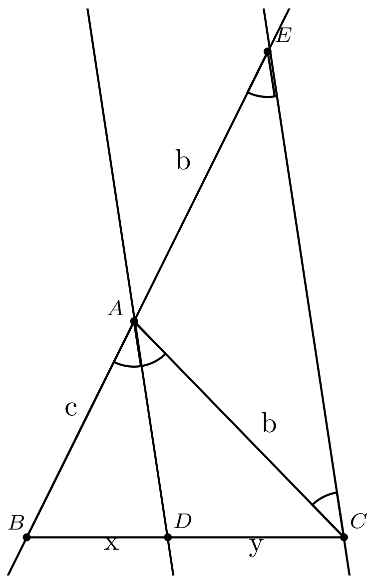
Assim, por exemplo, a bissetriz interna do ângulo A do triângulo ABC divide o lado BC em dois segmentos x e y tais que:



$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

Demonstração. Traçamos por C um reta paralela a bissetriz interna AD, e seja E a interseção dessa paralela com o prolongamento da reta AB. Pela propriedade de paralelismo, temos que $\angle BAD = \angle BEC$ e $\angle DAC = \angle ACE$, como AD é bissetriz, concluímos que $\angle ACE = \angle AEC$, portanto $\triangle ACE$ é isósceles, com $AE = AC = b$. Sendo assim, pelo teorema de tales, temos que:

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

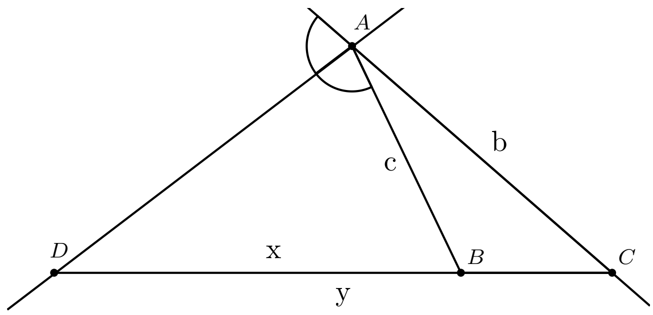


Teorema da bissetriz externa

Teorema 3. A bissetriz externa de um ângulo de um triângulo determina sobre o lado oposto ao ângulo dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

Assim, por exemplo, a bissetriz externa do ângulo A do triângulo ABC determina sobre o lado BC dois segmentos x e y tais que:

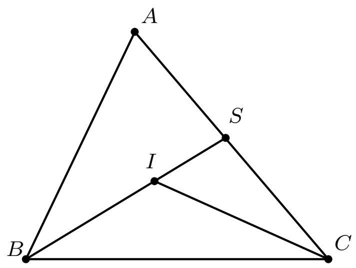
$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$



Demonstração. Analogo ao teorema da bissetriz interna.

Problema 6. Seja ABC um triângulo tal que $AB = 6$, $AC = 7$ e $BC = 8$. Tome $S \in AC$ onde BS é bissetriz do ângulo B e tome $I \in BS$ tal que CI é bissetriz do ângulo C, determine a razão $\frac{BI}{IS}$.

Solução.



Seja $SC = x$. Temos então que $AS = 7 - x$. Pelo teorema da bissetriz interna no triângulo ABC temos que:

$$\frac{6}{8} = \frac{AS}{SC} = \frac{7-x}{x} \Rightarrow 6x = 56 - 8x \Rightarrow x = 4$$

Pelo teorema da bissetriz interna no triângulo BSC, temos que:

$$\frac{BI}{IS} = \frac{8}{x} = 2$$

Problema 7. Seja ABC um triângulo retângulo em A, com hipotenusa $BC = 30$ e $AC - AB = 6$. Calcule o comprimento da bissetriz BS.

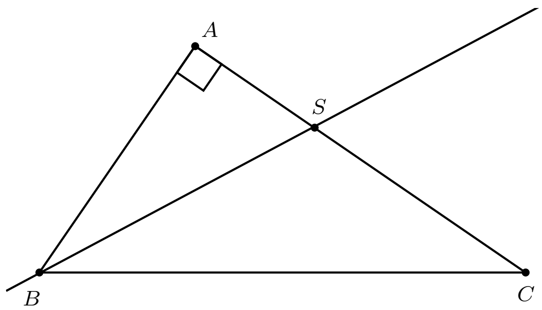
Solução. Seja $AC = x$ e $AB = y$, então temos que: $x - y = 6$ e $x^2 + y^2 = 900$ pelo teorema de pitágoras. Isolando x na primeira equação e substituindo na segunda, teremos que:

$$(y + 6)^2 + y^2 = 900 \Rightarrow y^2 + 6y - 432 = 0$$

onde teremos as raízes 18 e -24, portanto, $y = 18$, assim $x = 24$, como BS é bissetriz, pelo teorema da bissetriz interna, teremos que:

$$\frac{18}{30} = \frac{AS}{24 - AS} \Rightarrow AS = 9$$

Pelo teorema de pitágoras, teremos que: $BS^2 = 18^2 + 9^2 \Rightarrow BS = 9.\sqrt{5}$.



Problema 8. Sendo AS e AP bissetrizes dos ângulos internos e externos em A, determine o valor de CP, sabendo que $BS = 8$ e $CS = 6$.

Problema 9. Seja ABC um triângulo de lados a, b, c opostos aos vértices A, B, C, respectivamente. Se $D \in BC$ tal que AD é bissetriz interna, mostre que $BD = \frac{ac}{b+c}$ e $CD = \frac{ab}{b+c}$.

Problema 10. O incentro do triângulo ABC divide a bissetriz interna do ângulo A na razão $AI : ID = 2 : 1$. Mostre que os lados do triângulo estão em progressão aritmética.

Problema 11. (Círculo de Apolonius) Seja k um número real positivo, $k \neq 1$. Mostre que o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $PA : PB = k$ é uma circunferência cujo centro pertence à reta AB.

Problema 12. Em um triângulo ABC, $BC = 7$, $\frac{AB}{BC} = 3$. Calcule o valor da altura relativa ao lado a sabendo que ela é máxima.

Problema 13. Em um triângulo ABC, $BC = 16$ e a altura relativa ao lado BC é 8. Calcule a razão $\frac{AB}{AC}$ sabendo que ela é máxima.

Problema 14. Os comprimentos dos lados de um triângulo são os inteiros $x - 1$, x e $x + 1$ e seu maior ângulo é o dobro do menor. Determine o valor de x.

Problema 15. Em um triângulo ABC, de lados $AB = 12$, $AC = 8$ e $BC = 10$, encontre o maior segmento que a bissetriz interna de A determina sobre BC.