Semelhança de Triângulos

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais. Sendo k a razão entre os lados homólogos, k é chamado de razâo de semelhança. Observe que se $k = 1$, então os triângulos são congruentes. Igualmente a congruência de triângulos, temos os casos de semelhança.

1° **Caso:** Se dois triângulos têm congruentes dois a dois os três ângulos internos, então esses dois triângulos são semelhantes.

2° **Caso:** Se dois triângulos têm dois pares de lados proporcionais e os ângulos compreendidos entre eles congruentes, então esses dois triângulos são semelhantes.

3° **Caso:** Se dois triângulos têm os três lados correspondentes proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.

Teorema 1. Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo, então o triângulo que ele determina é semelhante ao primeiro.

Demonstração. Basta ver que eles têm os mesmo ângulos por paralelismo.

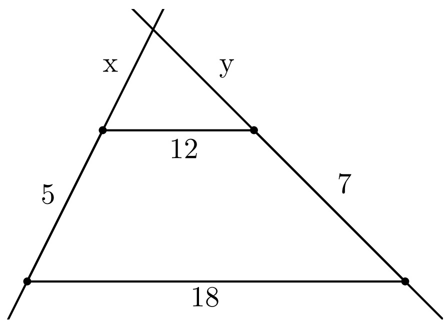
Observação 1: Se dois triângulos são semelhantes na razão k, então também é igual a k:

- a razão entre as alturas
- a razão entre as medianas
- a razão entre as bissetrizes, etc.

Observação 2: A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes (na razão k) é igual a k^2.

Problema 1. As bases de um trapézio medem $12m$ e $18m$ e os lados oblíquos às bases medem $5m$ e $7m$. Determine o perímetro do triângulo menor que obtemos ao prolongar os lados oblíquos às bases.

Solução.



Como as bases do trapézio são paralelas, teremos que os dois triângulos são semelhantes, portanto:

$$\frac{x}{x+5} = \frac{12}{18} = \frac{y}{7+y} \Rightarrow$$

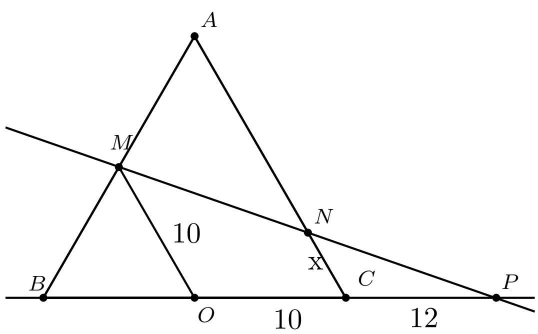
$18x = 12x + 90$ e $18y = 12y + 84$, então: $x = 15$ e $y = 14$, assim, o perímetro será $15 + 12 + 14 = 41$

Problema 2. Num triângulo ABC, os lados medem $AB = 4cm$, $BC = 5cm$ e $AC = 6cm$. Calcule os lados de um triângulo semelhante a ABC cujo perímetro mede $20cm$.
Solução. Sejam x, y e z os lados do triângulo. Como os dois triângulos são semelhantes, então:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} = \frac{x+y+z}{4+5+6} = \frac{20}{15} \Rightarrow$$

$x = 16/3$, $y = 20/3$ e $z = 8$.

Problema 3. Seja ABC um triângulo eqüilátero de lado 20. Uma reta passando pelo ponto médio M do lado AB corta o lado AC no ponto N e o prolongamento do lado BC no ponto P, de tal modo que $CP = 12$. Determine o comprimento de CN e NA.
Solução.



Tomemos O como sendo o ponto médio de BC. Como MO é base média, temos que $MO = 10$ e MO é paralelo a AC, assim o triângulo NCP é semelhante a MOP, então:

$$\frac{x}{10} = \frac{12}{22} \Rightarrow x = \frac{60}{11}$$

.

Problema 4. Sejam D e E pontos sobre os lados AB e AC do triângulo ABC. Sendo $BC = 22cm$, $AD = 8cm$, $DB = 3cm$, $AE = 5cm$ e $\angle ABE = \angle ACD$, calcule o comprimento de DE.

Problema 5. Considere a circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Seja AE um diâmetro dessa circunferência e AD a altura do triângulo. Sendo $AB = 6cm$, $AC = 10cm$ e $AE = 30cm$, calcule AD.

Problema 6. Calcule o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC sabendo que $AB = 4$, $AC = 6$ e a altura AH relativa ao lado BC é igual a 3.

Problema 7. (Base média de um triângulo) Sejam M e N os pontos médios, respectivamente, dos lados AB e AC do triângulo ABC. O segmento MN é chamado de base média, relativa ao lado BC. Mostre que MN é paralela a BC e que $MN = \frac{BC}{2}$.

Problema 8. Sejam $ABCD$ um trapézio com AB paralelo a CD, M e N os pontos médios dos lados oblíquos AD e BC. Use o exercício anterior para concluir que $MN = \frac{AB+CD}{2}$.

Problema 9. No triângulo ABC, a bissetriz interna do ângulo $\angle A$ encontra BC em D. A reta por B, perpendicular a AD, encontra AD em E. Seja M o ponto médio do lado BC. Se $AB = 26$, $BC = 28$ e $AC = 30$, ache os comprimentos de DM e ME.

Problema 10. No triângulo ABC, Z é um ponto sobre o lado AB. Uma reta por A e paralela a CZ, encontra BC em X; uma reta por B e paralela a CZ encontra AC em Y. Mostre que $\frac{1}{AX} + \frac{1}{BY} = \frac{1}{CZ}$.

Problema 11. Seja P um ponto no interior do triângulo eqüilátero ABC. Por P traçamos três retas paralelas aos lados de ABC, determinando três triângulos menores, de áreas 4, 9 e 49. Determine a área do triângulo ABC.

Problema 12. Duas circunferências c_1 e c_2 interceptam-se em dois pontos A e B. Construa um segmento PQ pelo ponto B com uma extremidade sobre c_1 e a outra sobre c_2 de modo que PQ seja o maior possível.

Problema 13. Os lados de um triângulo ABC medem $AB = 6$, $AC = 9$ e $BC = 11$. Se J é o ponto de tangência do círculo ex-inscrito relativo ao lado AB. Sabendo que JL é paralelo a BC (com L sobre o lado AC), determine o comprimento do segmento AL.

Problema 14. Seja C_1 a circunferência inscrita num triângulo ABC cujo perímetro mede $18cm$. Uma tangente a C_1 é paralela a um dos lados do triângulo e mede $2cm$. Quais os possíveis valores do lado ao qual esta tangente é paralela?