Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 2

Prof. Cícero Thiago

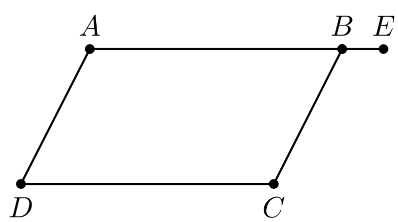
Aula 6

Quadriláteros Notáveis

1. Paralelogramo: Um quadrilátero convexo é dito um paralelogramo quando possuir lados opostos paralelos.

Teorema 1. Um quadrilátero convexo é paralelogramo se, e somente se:
a) Ângulos opostos são iguais;
b) Lados opostos são iguais;
c) Diagonais cortam - se em seus pontos médios;

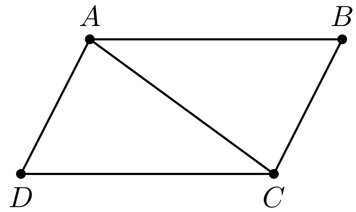
Demonstração.
(a)



Suponhamos inicialmente que $ABCD$ é um paralelogramo e seja E um ponto no prolongamento do lado AB. É fácil perceber que $\angle DAB = \angle CBE$, pois são ângulos correspondentes de retas paralelas. Por outro lado $\angle CBE = \angle DCA$, pois são ângulos alternos internos. Portanto, $\angle DAB = \angle DCA$. Com o mesmo raciocínio podemos provar que $\angle ADC = \angle ABC$.

Reciprocamente, seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $\angle DAB = \angle DCB$ e $\angle ADC = \angle ABC$. Sabemos que $\angle DAB + \angle DCB + \angle ADC + \angle ABC = 360^\circ$ e com isso $\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$ e $\angle DCB + \angle ADC = 180^\circ$. Por outro lado, $\angle ABC + \angle CBE = 180^\circ$ Concluímos então, que $\angle DAB = \angle CBE$ e, com isso, $AD \parallel BC$. Com o mesmo raciocínio podemos provar que $AB \parallel CD$. E com isso $ABCD$ é um paralelogramo.

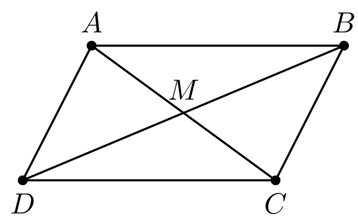
(b)



Seja $ABCD$ um paralelogramo. É fácil perceber, que $\angle DCA = \angle BAC$, pois são ângulos alternos internos. Da mesma forma, $\angle DAC = \angle BCA$. Com isso, $\Delta DAC \equiv \Delta ABC$, pelo caso **A.L.A.** Portanto, $AD = BC$ e $AB = CD$.

Reciprocamente, seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $AD = BC$ e $AB = CD$. É fácil perceber que, $\Delta DAC \equiv \Delta ABC$, pelo caso **L.L.L.** Portanto, $\angle ADC = \angle ABC$. De maneira similar, podemos provar que $\angle DAB = \angle DCB$. Usando o fato provado no item (a), podemos concluir que $ABCD$ é um paralelogramo.

(c)



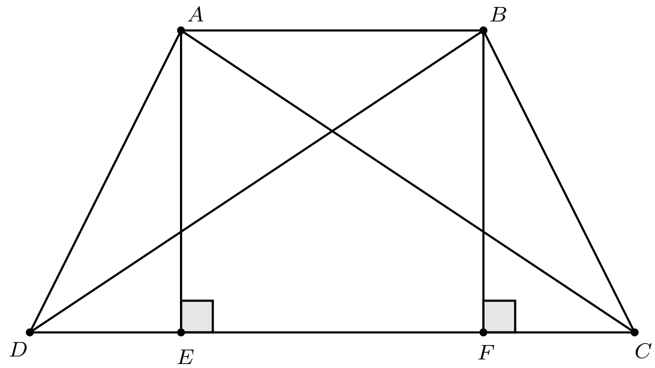
Seja $ABCD$ um paralelogramo e seja M o ponto de encontro de suas diagonais. Já sabemos, pelos itens anteriores, que os ângulos e lados opostos são iguais. Por outro lado, $\angle DAC = \angle BCA$, pois são ângulos alternos internos. Pelo mesmo motivo $\angle ADB = \angle CBD$ e com isso $\Delta ADM \equiv \Delta CBM$, pelo caso **A.L.A.** Portanto, $AM = MC$ e $DM = MB$.

Reciprocamente, seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que suas diagonais se intersectam em seus pontos médios, ou seja, $AM = MC$ e $DM = MB$. É fácil perceber, que $\angle DMA = \angle CMB$, pois são ângulos opostos pelo vértice. Então, $\Delta ADM \equiv \Delta CBM$, pelo caso **L.A.L.** Portanto, $AD = BC$. De maneira similar, podemos provar, que $AB = CD$. Usando agora, o que foi provado no item (b), concluímos que $ABCD$ é um paralelogramo.

2. Trapézio: Um quadrilátero convexo é trapézio se, e somente se, possui dois lados paralelos. Um trapézio será dito isósceles se os lados não paralelos forem iguais e será dito retângulo se um dos ângulos da base for reto.

Teorema 2. Os ângulos de cada base de um trapézio isósceles são congruentes e as diagonais também são congruentes.

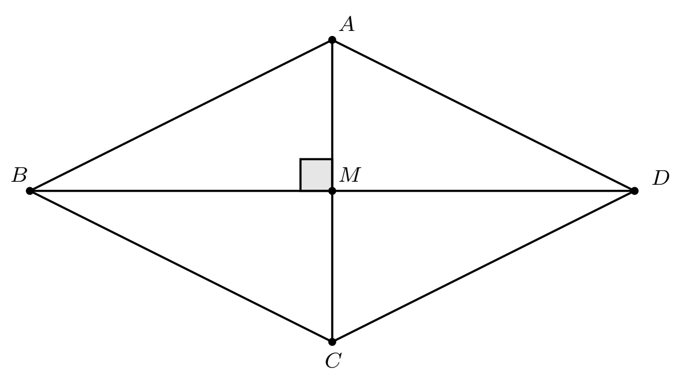
Demonstração. Sejam AE e BF alturas do trapézio. Como AB e CD são paralelos então $AE = BF$. Se $AD = BC$ então $\Delta ADE \equiv \Delta BCF$ pelo caso especial para triângulos retângulos cateto - hipotenusa. Com isso, $\angle ADC = \angle BCD$. Temos também que $\Delta ADC \equiv \Delta BCD$ pelo caso **L.A.L**, portanto $AC = BD$.



3. Losango: Paralelogramo com todos os lados iguais.

Teorema 3. As diagonais do losango são perpendiculares.

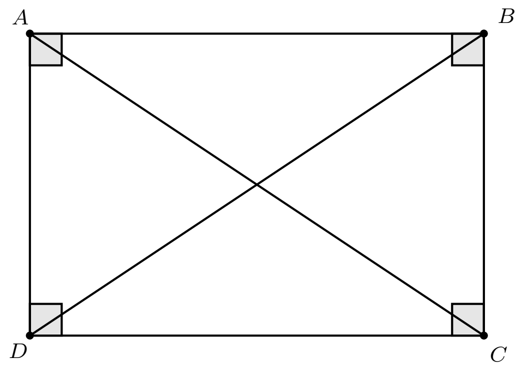
Demonstração. Como o losango é um paralelogramo então as diagonais cortam - se em seus ponyos médios, ou seja, $AM = MC$ e $BM = MD$. Com isso, $\Delta AMB \equiv \Delta AMD$, pelo caso **L.L.L**, portanto $\angle AMB = \angle AMD$. Como $\angle AMB + \angle AMD = 180°$, então $\angle AMB = \angle AMD = 90°$.



4. Retângulo: Paralelogramo com quatro ângulos retos.

Teorema 4. A diagonais de um retângulo são iguais.

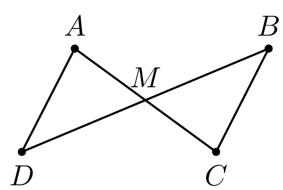
Demonstração. É fácil ver que $\Delta ADC \equiv \Delta BCD$ pelo caso **L.A.L**. Portanto, $AC = BD$.



5. Quadrado: Retângulo com os quatro lados iguais.

Exercícios Resolvidos

1. Se dois segmentos são iguais e paralelos, então suas extremidades são os vértices de um paralelogramo.
   Solução.

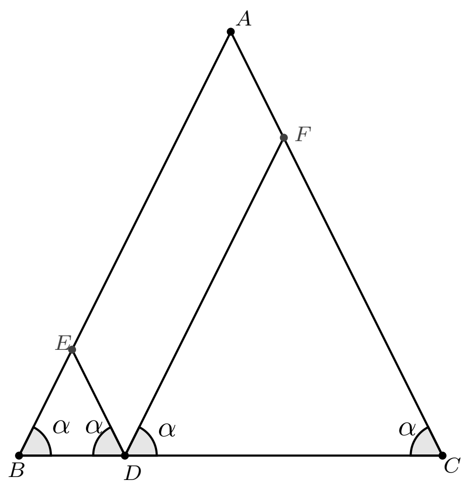
   

   Sejam AD e BC os segmentos iguais e paralelos. Vamos então construir os segmentos DB e AC, que se intersectam em M. É fácil perceber que $\angle DAC = \angle BCA$, pois são ângulos alternos internos. Pelo mesmo motivo, $\angle ADC = \angle CBD$. Portanto, $\Delta ADM \equiv \Delta BCM$, pelo caso **A.L.A.** Usando o resultado provado no item (c) do teorema (1), provamos que $ABCD$ é um paralelogramo.

2. Mostre que se por um ponto na base de um triângulo isósceles traçamos retas paralelas aos lados congruentes, então se forma um paralelogramo cujo perímetro é igual a soma dos comprimentos dos lados congruentes.

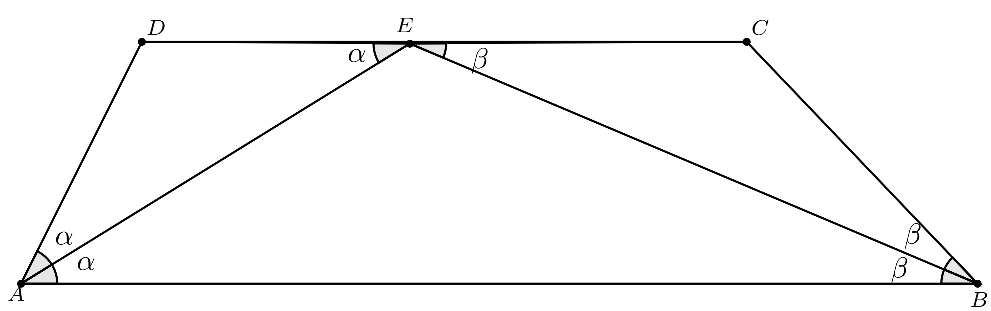
   Solução. Seja D um ponto da base do triângulo isósceles ABC e sejam DE e DF os segmentos paralelos aos lados iguais. É fácil ver que $AFDE$ é um paralelogramo pois $DE \parallel AC$ e $DF \parallel AB$. Portanto, $AF = DE$, $AE = DF$ e os triângulos BDE e CDF são isósceles assim $BE = DE$ e $DF = CF$. É fácil perceber que o triângulo

ABC e o paralelogramo $AFDE$ possuem o mesmo perímetro.



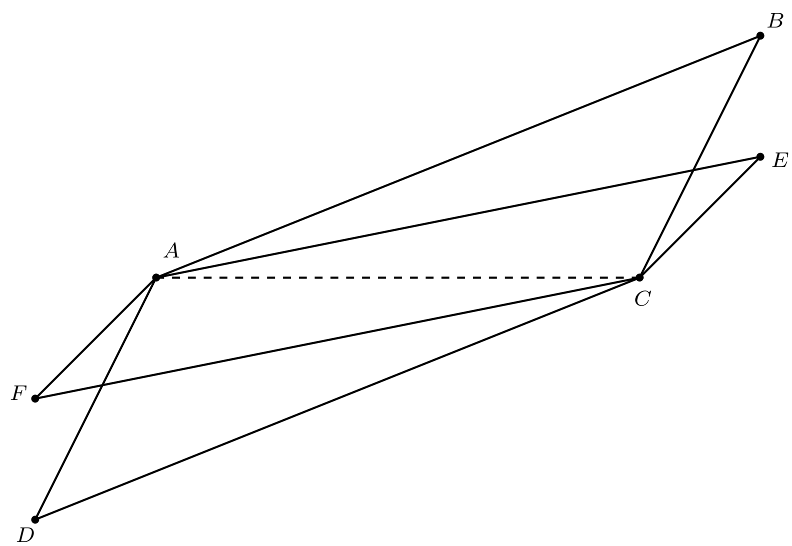
3. (OCM) Sejam AB e CD as bases de um trapézio tal que a base menor CD é igual à soma dos lados não paralelos do trapézio. Se E é um ponto de CD e EA é a bissetriz do ângulo $\angle A$, mostre que EB é também bissetriz do ângulo $\angle B$.

   Solução. Como $AB \parallel CD$ então $\angle BAE = \angle DEA$ e, com isso, $AD = BE$. Como $CD = AD + BC$ então $EC = CB$. Assim, $\angle CEB = \angle CBE$. Mas $AB \parallel CD$ então $\angle CEB = \angle EBA$.



4. (Cone Sul) Sejam A, B e C três pontos (não colineares) e $E(\neq B)$ um ponto qualquer que não pertence à reta AC. Construa paralelogramos $ABCD$ (nesta ordem) e $AECF$ (também nesta ordem). Demonstre que $BE \parallel DF$.

   Solução. $ABCD$ e $AECF$ são paralelogramos de diagonais AC, BD e AC, FE respectivamente. Como as diagonais de um paralelogramo se cortam em seus pontos médios e AC é uma diagonal comum, o ponto médio de AC é o ponto médio de BD e de FE. Logo $BEDF$ é um quadrilátero cujas diagonais BD e FE cortam - se em seus pontos médios. Portanto $BEDF$ é um paralelogramo e $BE \parallel DF$.



5. (Torneio das Cidades) Em um quadrado $ABCD$, K é um ponto do lado BC e a bissetriz do $\angle KAD$ intersecta o lado CD no ponto M. Prove que o comprimento do segmento AK é igual à soma dos comprimentos dos segmentos DM e BK.

   Solução. Seja L o ponto no prolongamento de BC tal que $BL = DM$. Como $AB = AD$ e $\angle ABL = 90^\circ = \angle ADM$ então $\Delta ABL \equiv \Delta ADM$. Assim, $\angle BAL = \angle DAM$ e $\angle ALK = \angle AMD$. Por outro lado

$$\angle KAL = \angle BAL + \angle KAB$$

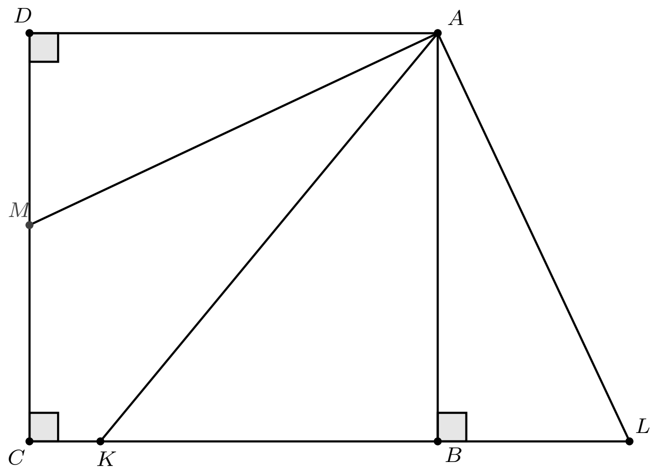
$$= \angle MAD + \angle KAB$$

$$= \angle MAK + \angle KAB$$

$$= \angle MAB$$

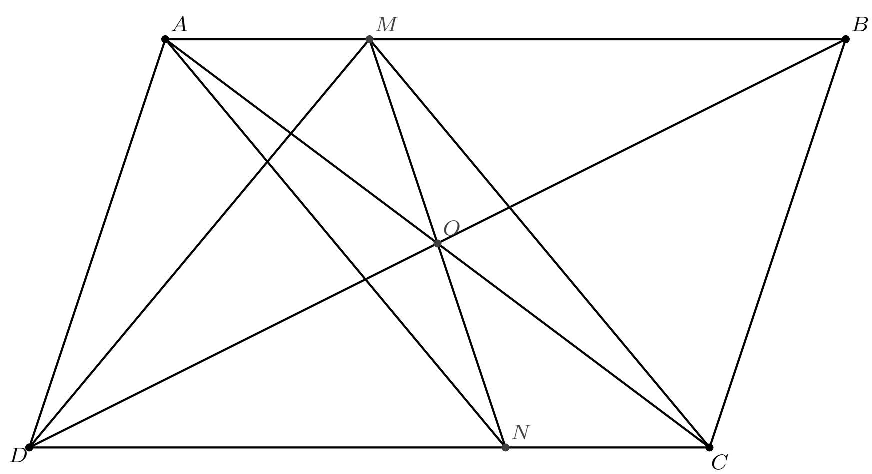
$$= \angle AMD.$$

   a última igualdade acontece porque AB e DC são paralelos. Segue que $\angle KAL = \angle ALK$ e, portanto, $AK = KL = KB + BL = KB + DM$.



6. (Torneio das Cidades) $ABCD$ é um paralelogramo. Um ponto M é escolhido sobre o lado AB tal que $\angle MAD = \angle AMO$, onde O é o ponto de interseção das diagonais do paralelogramo. Prove que $MD = MC$.

   Solução. Seja N o interseção de MO e CD. Temos que $\angle MAD = \angle AMN$ então $AMND$ é um trapézio isósceles. Por simetria, $AM = NC$ então $AMCN$ é um paralelogramo. Com isso, $\angle MDC = AND = \angle MCD$ e, portanto, $MC = MD$.



Exercícios Propostos

1. No quadrado $ABCD$ consideram - se as diagonais AC e BD. Seja P um ponto qualquer pertencente a um dos lados. Demonstrar que a soma das distâncias de P às duas diagonais é constante.

2. (Maio) Num paralelogramo $ABCD$, BD é a diagonal maior. Ao fazer coincidir B com D mediante uma dobra se forma um pentágono regular. Calcular as medidas dos ângulos que forma a diagonal BD com cada um dos lados do paralelogramo.

3. (Maio) No retângulo $ABCD$ de lados AB, BC, CD e DA, seja P um ponto do lado AD tal que $\angle BPC = 90°$. A perpendicular a BP traçada por A corta BP em M e a perpendicular a CP traçada por D corta CP em N. Demonstre que o centro do retângulo está no segmento MN.

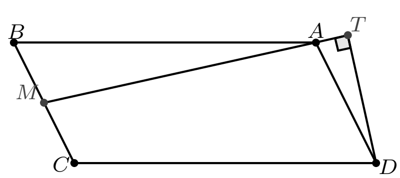
4. Sejam ABC e ABD triângulo com o lado AB comum. O triângulo ABC tem $\angle BAC = 90°$ e $AB = 2AC$. O triângulo ABD tem $\angle ADB = 90°$ e $AD = BD$. O segmento CD corta o segmento AB em O. Calcule a medida de BO sabendo que $AC = 4$.

5. (OBM) O trapézio $ABCD$ tem bases AB eCD. O lado DA mede x e o lado BC mede $2x$. A soma dos ângulos $\angle DAB$ e $\angle ABC$ é $120°$. Determine o ângulo $\angle DAB$.

6. No quadrilátero convexo $ABCD$, sejam E e F os pontos médios dos lados AD e BC, respectivamente. Os segmentos CE e DF se cortam em O. Demonstre que se as retas AO e BO dividem o lado CD em três partes iguais então $ABCD$ é um paralelogramo.

7. Seja $ABCDEF$ um hexágono tal que seus lados opostos são respectivamente paralelos, ou seja, $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ e $CD \parallel FA$. Se $AB = DE$, demonstre que $BC = EF$ e $CD = FA$.

8. Seja $ABCD$ um paralelogramo tal que M é o ponto médio de BC. Seja T a projeção de D sobre MA. Prove que $CT = CD$.



9. Prove que o segmento que liga os pontos médios dos lados opostos de um quadrilátero convexo passa pelo ponto médio do segmento que liga os pontos médios das diagonais.

10. Seja $ABCD$ um paralelogramo. Pelo vértice A é traçada uma reta r e sejam E, F e G as projeções de B, C e D sobre r, respectivamente. Prove que se r estiver no exterior do paralelogramo, então $CF = BE + DG$ e, se r estiver no interior, então $CF = |BE - DG|$.

11. Sobre os lados AB e AC do triângulo ABC são construídos no exterior triângulos isósceles semelhantes ABC' e CAB'. Prove que $AB'A'C'$ é um paralelogramo.

12. Os lados AB, BC, CD e DA de um quadrilátero $ABCD$ são divididos pelos pelos E, F, G e H da seguinte forma:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FB} = \frac{CG}{GD} = \frac{DH}{HA}.$$

Prove que $EFGH$ é um paralelogramo.

13. Seja $P_1P_2P_3P_4P_5$ um pentágono convexo. Seja Q_i o ponto de interseção dos segmentos que unem os pontos médios dos lados opostos do quadrilátero $P_{i+1}P_{i+2}P_{i+3}P_{i+4}$ onde $P_{k+5} = P_k$, $k \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Prove que os pentágonos $P_1P_2P_3P_4P_5$ e $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5$ são semelhantes.

Sugestões

2. Seja O o ponto de interseção das diagonais de um paralelogramo $ABCD$. Seja EF um segmento que passa por O com extremidades E e F sobre os lados AB e CD, respectivamente. Então, $EO = EF$.

3. Use o fato que as diagonais de um paralelogramo cortam - se em seus pontos médios.

8. Trace $CP \perp DT$, com P em DT.

9. Use base média.

11. Use semelhança de triângulos.

12. Use Teorema de Tales.

13. Os pontos médios dos lados de um quadrilátero são vértices de um paralelogramo.

Bibliografia

1. Problemas 18 - Olimpíada Matemática Argentina
Patrícia Fauring e Flora Gutierrez
Red Olímpica

2. Problemas 19 - Olimpíada Matemática Argentina
Patrícia Fauring e Flora Gutierrez
Red Olímpica

3. Problemas 20 - Olimpíada Matemática Argentina
Patrícia Fauring e Flora Gutierrez
Red Olímpica

4. Olimpíadas de Mayo - I a VIII
Patrícia Fauring, Flora Gutierrez, Carlos Bosch e María Gaspar
Red Olímpica

5. Olimpíadas de Mayo - IX a XVI
Patrícia Fauring, Flora Gutierrez, Carlos Bosch e María Gaspar
Red Olímpica

6. International Mathematics Tournament of Towns - 1997 - 2002
AM Storozhev
AMT

7. Coleção Elementos da Matemática, vol. 2 - Geometria Plana
Marcelo Rufino de Oliveira e Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

8. Challenging Problems in Geometry
Alfred S. Posamentier e Charles T. Salkind

9. Problems and Solutions in Euclidean Geometry
M. N. Aref e William Wernick

10. Geometría
Radmila Bulajich Manfrino e José Antonio Gómez Ortega
Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas

11. Tópicos de Matemática Elementar, vol. 2
Geometria Euclidiana Plana
Antonio Caminha Muniz Neto
SBM

12. Episodes in Nineteenth and Twentieth Euclidean Geometry
Ross Honsberger
MAA

13. Problems in Plane and Solid Geometry, vol. 1 - Plane Geometry
Viktor Prasolov

14. Advanced Euclidean Geometry
Alfred Posamentier

15. Lessons in Geometry
I. Plane Geometry
Jacques Hadamard
AMS

16. Hadamard's Plane Geometry
A Reader's Companion
Mark Saul
AMS

17. Olimpíadas Cearenses de Matemática, Ensino Fundamental, 1981 - 2005
Emanuel Carneiro, Francisco Antônio M. de Paiva e Onofre Campos

18. Problemas de las Olimpiadas Matematicas del Cono Sur (I a IV)
Fauring - Wagner - Wykowski - Gutierrez - Pedraza - Moreira
Red Olímpica

19. Explorations in Geometry
Bruce Shawyer
World Scientific

20. Treinamento Cone Sul, vol.2.
Bruno Holanda, Cícero Magalhães, Samuel Barbosa e Yuri Lima.