Polos Olímpicos de Treinamento

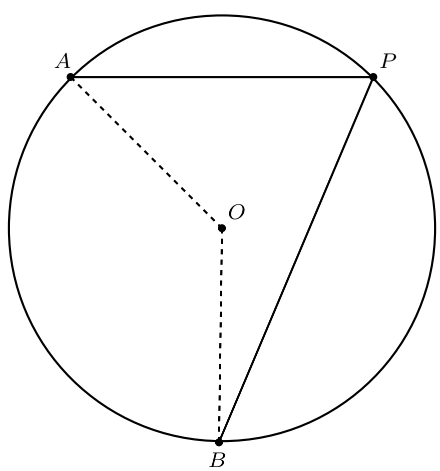
Curso de Geometria - Nível 2

Prof. Cícero Thiago

Aula 7

Ângulos na circunferência

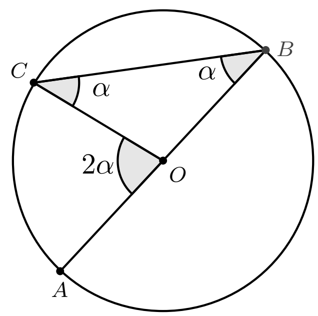
Definição 1: O ângulo inscrito relativo a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice na circunferência e os lados são secantes a ela.



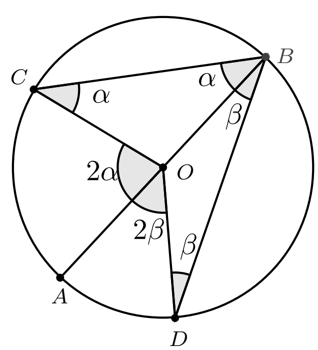
Assim, $\angle APB$ é o ângulo inscrito e $\angle AOB$ é o ângulo central que é igual à medida do arco, que não contém P, determinado na circunferência pelos pontos A e B.

Teorema 1. Um ângulo inscrito é metade do ângulo central correspondente.

Demonstração. A prova será dividida em três casos.
1° **caso:**
O triângulo OBC é isósceles e, com isso, $\angle OBC = \angle OCB$. Então, $\angle AOC = \angle OBC + \angle OCB = 2\angle OBC$ (propriedade do ângulo externo).

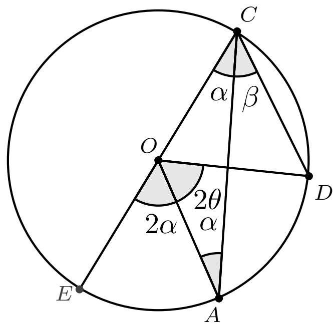


2° **caso:**
Pelo 1° caso temos que $\angle AOC = 2\angle ABC$ e $\angle AOD = 2\angle ABD$. Portanto, $\angle COD = 2\angle CBD$.



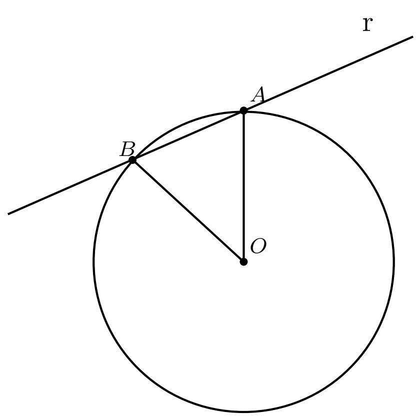
3° **caso:**

Pelo 1° caso temos que $\angle EOD = 2\angle ECD$, então $2\alpha + 2\theta = 2 \cdot (\alpha + \beta) \Leftrightarrow \theta = \beta$. Portanto, $\angle AOD = 2\angle ACD$.



Definição 2: Dizemos que uma reta é tangente a uma circunferência se essa reta intersecta a circunferência em um único ponto.

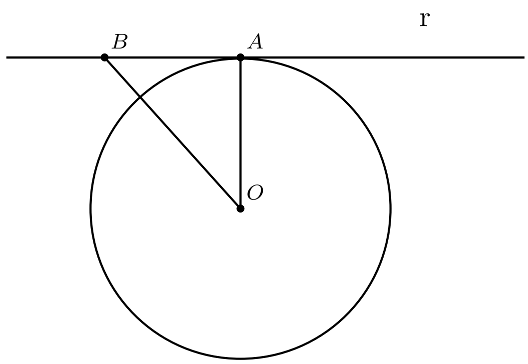
Teorema 2. Toda reta perpendicular a um raio na sua extremidade da circunferência é tangente à circunferência.
Demonstração.



Suponha que $OA \perp r$ mas r não é tangente à circunferência, e seja $B \neq A$ o segundo ponto de interseção. Isso é um absurdo pois o triâgulo OAB seria isósceles, pois $OA = OB$ (raio da circunferência), com os ângulos da base iguais a $90°$. Portanto, r é tangente à circunferência.

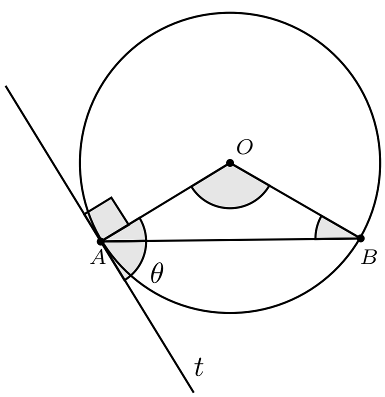
Teorema 3. Toda tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

Demonstração.



Seja A o ponto de tangencia. Qualquer ponto de r está a uma distância maior do que A do centro. Com isso, OA é a menor distância de O para a reta r. Portanto, $OA \perp r$.

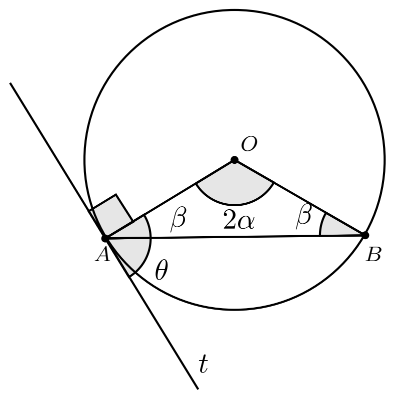
Definição 3: Um ângulo de segmento relativo a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice na circunferência, um lado secante e outro lado tangente à circunferência.



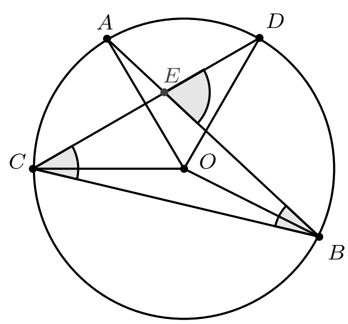
O ângulo θ da figura é um ângulo de segmento.

Teorema 4. Um ângulo de segmento é a metade do ângulo central correspondente.

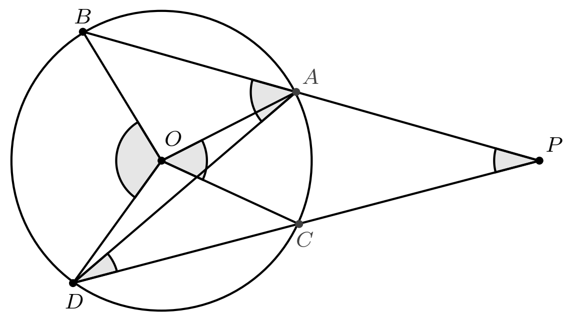
Demonstração.
Calculando a soma dos ângulos internos no triângulo AOB temos $2\alpha+2\beta = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha+\beta = 90^\circ$. Mas, $\theta + \beta = 90^\circ$. Portanto, $\theta = \alpha$.



Definição 4: Chamaremos de ângulo excêntrico interior qualquer ângulo formado por duas cordas de uma circunferência. Na figura abaixo, temos que $\angle BED$ é um ângulo excêntrico interior que satisfaz $\angle BED = \dfrac{\angle AOC + \angle BOD}{2}$, pois $\angle BED = \angle ABC + \angle DCB = \angle EBC + \angle ECB = \dfrac{\angle AOC}{2} + \dfrac{\angle BOD}{2} = \dfrac{\angle AOC + \angle BOD}{2}$.



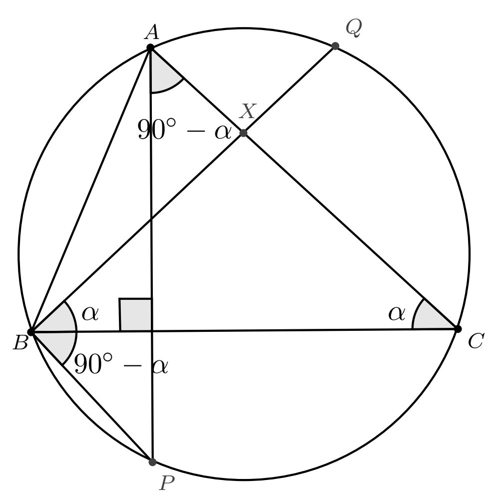
Definição 5: Chamaremos de ângulo excêntrico exterior o ângulo formado por duas secantes a uma circunferência traçadas por um ponto no exterior. Na figura abaixo, $\angle BPD$ é um ângulo excêntrico exterior que satisfaz $\angle BPD = \dfrac{\angle BOD - \angle AOC}{2}$, pois $\angle BPD = \angle BAD - \angle ADP = \dfrac{\angle BOD}{2} - \dfrac{\angle AOC}{2} = \dfrac{\angle BOD - \angle AOC}{2}$.



Exercícios Resolvidos

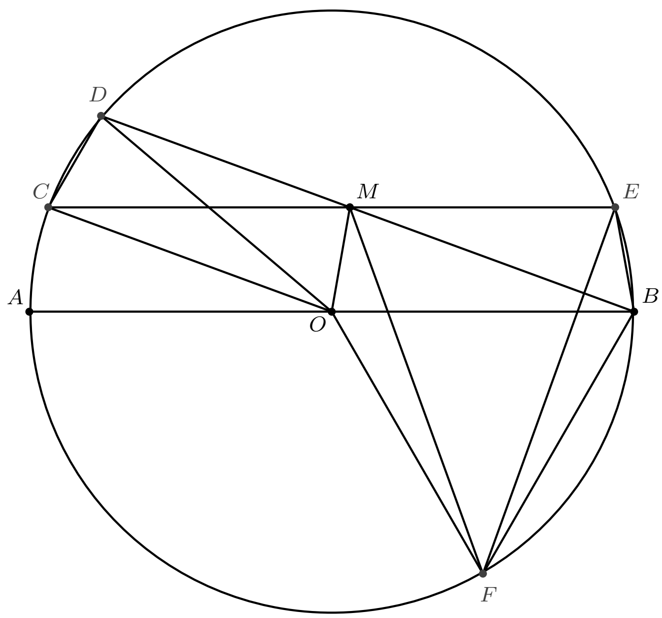
1. (OBM) O triângulo ABC está inscrito na circunferência S e $AB < AC$. A reta que contém A e é perpendicular a BC encontra S em P ($P \neq A$). O ponto X situa-se sobre o segmento AC e a reta BX intersecta S em Q ($Q \neq B$). Mostre que $BX = CX$ se, e somente se, PQ é um diâmetro de S.

   Solução. Vamos dividir o problema em duas partes:
   (a) $BX = CX \Rightarrow PQ$ é um diâmetro de S. Seja $\angle ACB = \alpha$. Assim, temos que $\angle QBC = \alpha$ (já que $BX = CX$) e $\angle PAC = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$. Observe que os ângulos $\angle PAC = \angle PBC$. Assim, vemos que $\angle PBC = \angle PAC = 90° - \alpha \Rightarrow \angle PBQ = 90° - \alpha + \alpha = 90° \Rightarrow PQ$ é diâmetro.



(b) PQ é um diâmetro de $S \Rightarrow BX = CX$. Se $\angle ACB = \alpha$, $\angle PAC = \angle PBC = 90° - \alpha$. Mas PQ é diâmetro, ou seja, $\angle PBQ = 90° \Rightarrow 90° - \alpha + \angle QBC = 90° \Rightarrow \angle QBC = \alpha \Rightarrow \Delta BXC$ é isósceles $\Rightarrow BX = XC$.

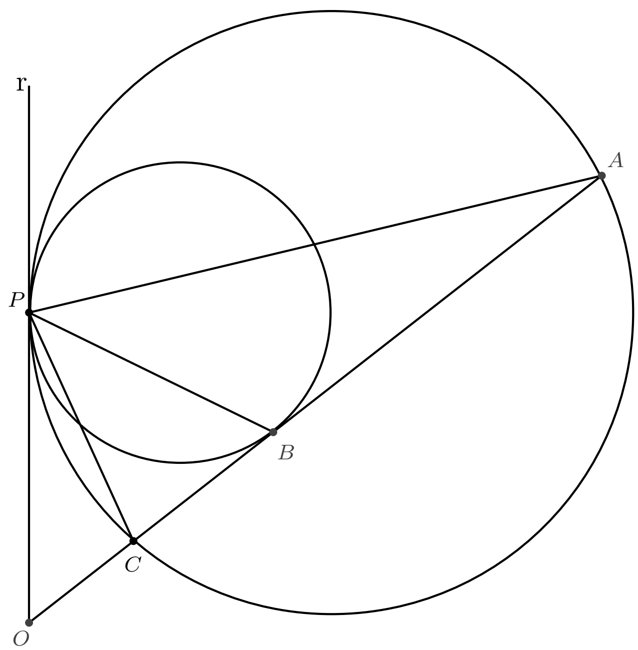
2. Sobre um círculo de diâmetro AB são escolhidos os pontos C, D e E em um semiplano determinado por AB e F no outro semiplano, tais que $\widehat{AC} = \widehat{CD} = \widehat{BE} = 20°$ e $\widehat{BF} = 60°$. Seja M a intersecção de BD e CE. Prove que $FM = FE$.
Solução.



Seja O o centro da circunferência. Vamos provar que os triângulos ΔOMF e ΔBEF são congruentes. Como $\angle BOF = 60°$ então o triângulo ΔBOF é equilátero e $OF = BF$. Além disso, $\widehat{BE} = \widehat{CD} \Rightarrow BE = CD$ e $\angle DCE = \angle EBD = 60°$, ou seja, $\Delta CDM \equiv \Delta EBM \Rightarrow CM = BM \Rightarrow \Delta OCM = \Delta OBM \Rightarrow \angle MOB = 80°$. Como $\angle OBE = \angle OBM + \angle EBD = \angle ABD + 60° = 20° + 60° = 80°$ então o trapézio $MOBE$ é isósceles e, com isso, $MO = EB$. Finalmente, $\angle MOF = 80° + 60° = 140° = \angle EBF$. Isto prova que os triângulos ΔOMF e ΔBEF são congruentes. Portanto, $FM = FE$.

3. Sejam dois círculos C_1 e C_2, com C_2 tangente interno a C_1 no ponto P. Seja s uma reta tangente a C_2 em um ponto B, e que corta C_1 em A e C. Mostre que PB é bissetriz do ângulo $\angle APC$.

Solução.



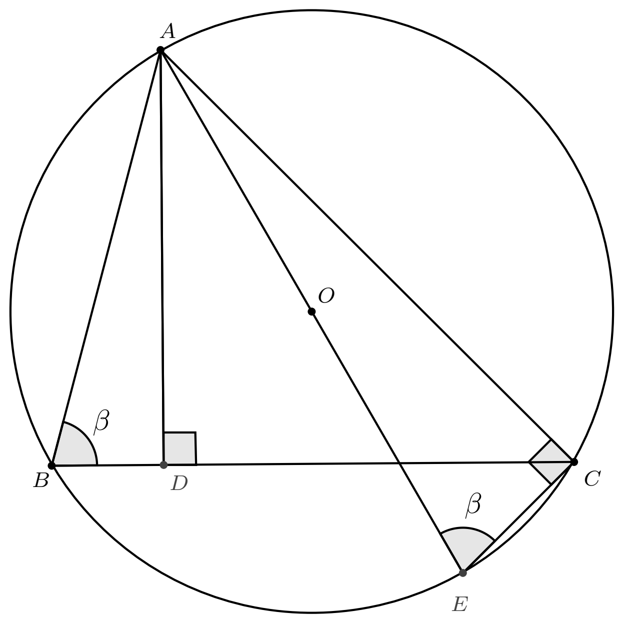
Seja r a reta tangente às duas circunferências em P. Seja O o ponto de intersecção de r com o prolongamento AC. Temos que

$$\angle CPO = \angle PAC = \frac{\widehat{CP}}{2}$$

$$OP = OB \Rightarrow \angle PBO = \angle BPC + CPO.$$

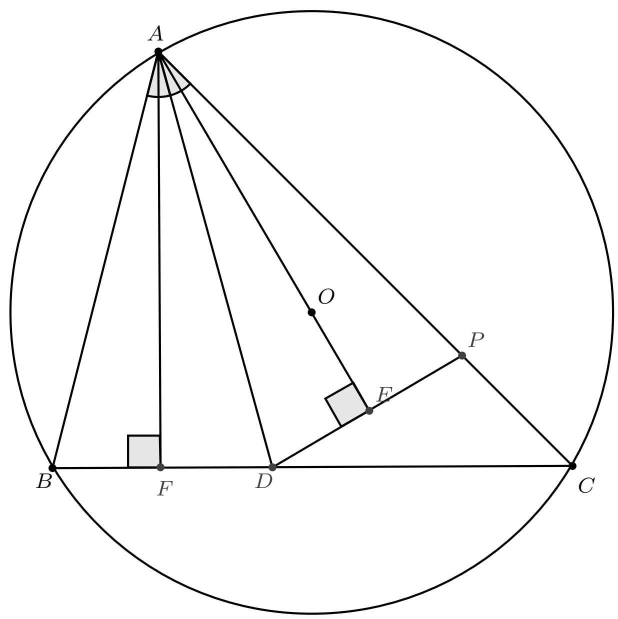
Mas $\angle PBO$ é ângulo externo do triângulo $\Delta PBA \Rightarrow \angle PBO = \angle PAC + \angle BPA$. Portanto, $\angle BPC = \angle BPA$.

4. Seja O o centro da circunferência circunscrita ao triângulo acutângulo ABC e seja D a projeção de A sobre BC. Prove que $\angle DAB = \angle OAC$.
Solução.



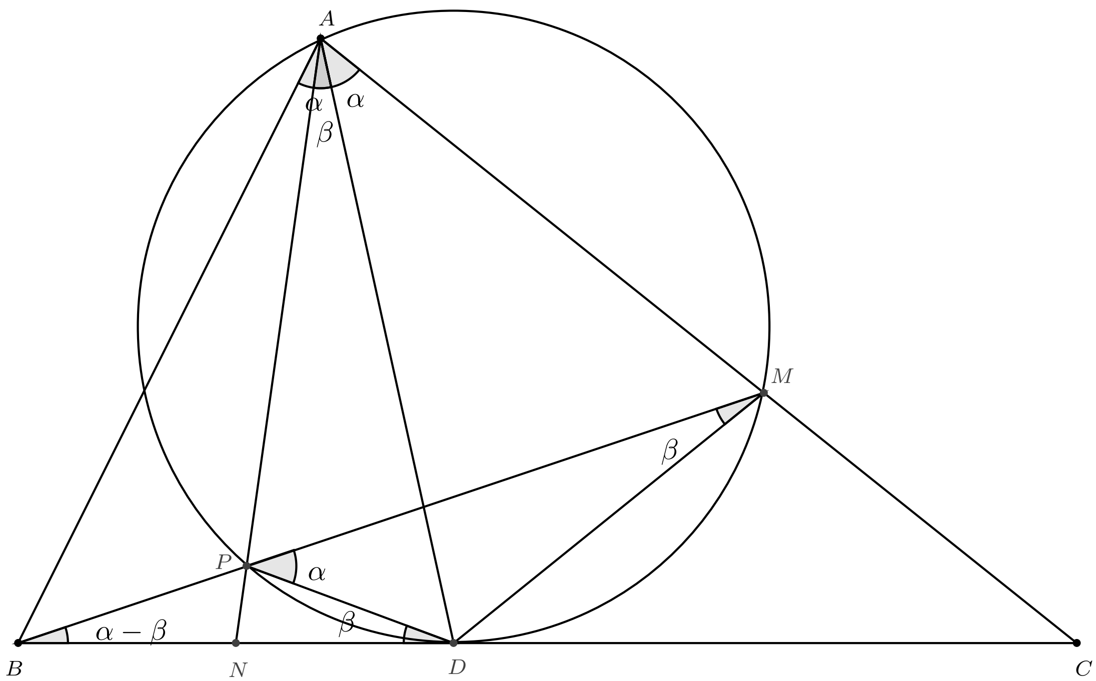
Seja AE um diâmetro. Além disso, $\angle ABC = \angle AEC$. Portanto, $\angle BAD = \angle EAC$.

5. (Itália) Um triângulo ABC acutângulo está inscrito em um círculo de centro O . Seja D a intersecção da bissetriz de A com BC e suponha que a perpendicular a AO por D, corta a reta AC em um ponto P interior a AC. Mostre que $AB = AP$.
Solução.



Usando o resultado obtido no problema 4 temos que $\angle BAF = \angle EAP$. Como AD é bissetriz do ângulo $\angle A$, então $\angle FAD = \angle DAE$. Com isso, $\Delta FAD \equiv \Delta DAE$, pelo caso **A.L.A.**, assim $AF = AE$. Desse modo, $\Delta AEP \equiv \Delta ABF$, pelo caso **A.L.A**. Finalmente, $AB = AP$.

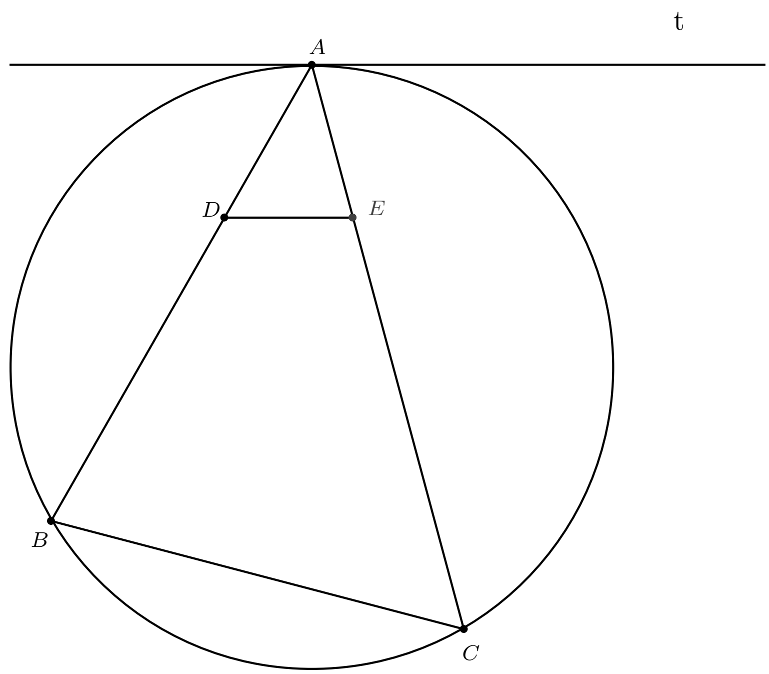
6. (Irã) Em um triângulo ABC a bissetriz do ângulo $\angle BAC$ intersecta o lado BC no ponto D. Seja Γ um círculo tangente a BC no ponto D e que passa pelo ponto A. Se M é o segundo ponto de intersecção de AC com Γ e se BM intersecta o círculo em P, mostre que AP é uma mediana do triângulo ABD.
   Solução.



Como BC é tangente à circunferência Γ, temos que $\angle NDP = \angle DMP = \angle PAD = \beta$. Além disso, $\angle MPD = \angle MAD = \angle BAD = \alpha$. Sendo assim, $\Delta NPD \sim \Delta NAD$, então $\dfrac{NP}{ND} = \dfrac{ND}{NA} \Leftrightarrow ND^2 = NP \cdot NA$. Temos também que $\Delta NBP \sim \Delta NAB$, então $\dfrac{PN}{NB} = \dfrac{NB}{AN} \Leftrightarrow NB^2 = NP \cdot NA$. Portanto, $NB^2 = ND^2 \Leftrightarrow NB = ND$.

Exercícios propostos

1. Na figura, a reta t é tangente ao círculo e paralela ao segmento DE. Se $AD = 6$, $AE = 5$ e $CE = 7$, o valor da medida do segmento BD é:



(a) $3,5$ (b) 4 (c) $4,5$ (d) 5 (e) $5,5$

2. São dadas duas circunferências secantes, com pontos de intersecção C e D. Traça - se por C uma secante à duas circunferências, que intersecta uma delas em E e a outra em F. Mostre que o ângulo $\angle EDF$ é constante.

3. As extremidades de uma corda ST, com comprimento constante, são movidos ao longo de um semicírculo com diâmetro AB. Seja M o ponto médio de ST e P o pé da perpendicular de S sobre AB. Prove que a medida do ângulo $\angle SPM$ independe da posição de ST.

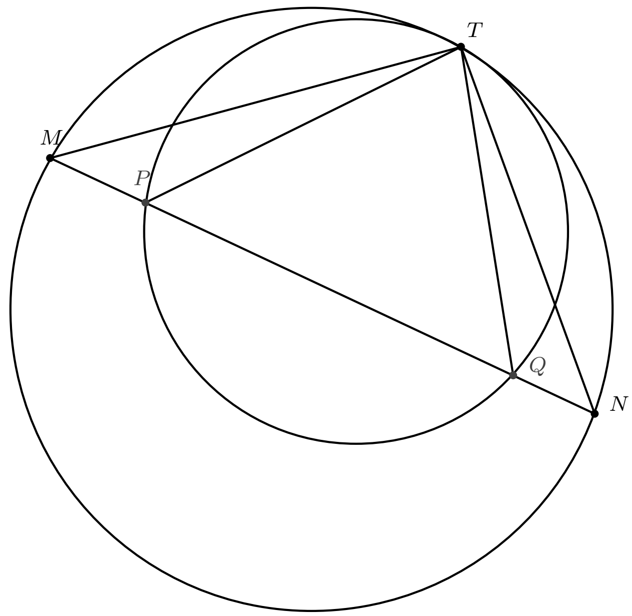
4. É dado um triângulo ABC. Sejam O o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, I o centro da circunferência inscrita no triângulo, $D \neq A$ a intersecção da reta AI com a circunferência circunscrita. Prove que $CD = BD = ID$.

5. Se os lados AB e AC de um triângulo são diâmetros de duas circunferências, prove que o outro ponto comum às circunferências está em BC.

6. Sejam C_1 e C_2 duas circunferência tangentes exteriores em T. Sejam A e B pontos de C_1 tais que a reta AB é tangente a C_2 em P. Prove que TP é bissetriz externa

do triângulo ΔATB.

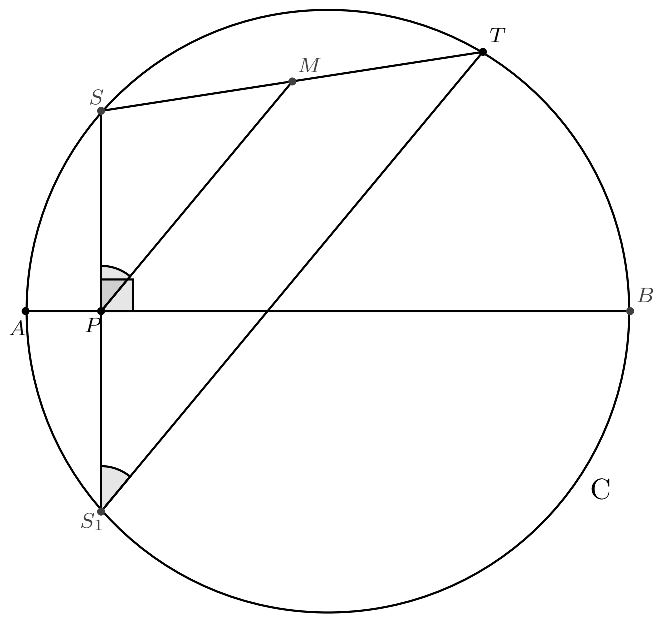
7. Na figura abaixo seja T o ponto de tangencia das circunferências. Prove que $\angle MTP = \angle QTN$.



Sugestões/Soluções

1. $BD = 4$. Use ângulo de segmento para concluir que $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.
2. Use que em uma circunferência, a medida do ângulo inscrito é metade da medida do ângulo central que subtende o mesmo arco.

3.



Seja C a circunferência de diâmetro AB. Seja S_1 o simétrico de S com relação a AB. É fácil ver que P é o ponto médio de SS_1 e seja M o ponto médio de ST. Temos que $PM \parallel S_1T$. Então $\angle SPM = \angle SS_1T = \frac{1}{2} \cdot \widehat{ST}$. Por outro lado, $\widehat{ST}$ só depende do comprimento de ST. Portanto, segue o resultado.

4. Use ângulo externo e ângulos inscritos.

5. Use que todo ângulo inscrito em uma semicircunferência mede 90°.

6. Use ângulos de segmento.

7. Use ângulos inscritos.

Bibliografia

1. Fundamentos de Matemática Elementar, vol.9.
Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo.

2. Geometría - Una visión de la planimetría.
Lumbreras.

3. Challenging Problems in Geometry
Alfred S. Posamentier e Charles T. Salkind

4. Problems and Solutions in Euclidean Geometry
M. N. Aref e William Wernick

5. Geometría
Radmila Bulajich Manfrino e José Antonio Gómez Ortega
Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas

6. Tópicos de Matemática Elementar, vol. 2
Geometria Euclidiana Plana
Antonio Caminha Muniz Neto
SBM