Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 2

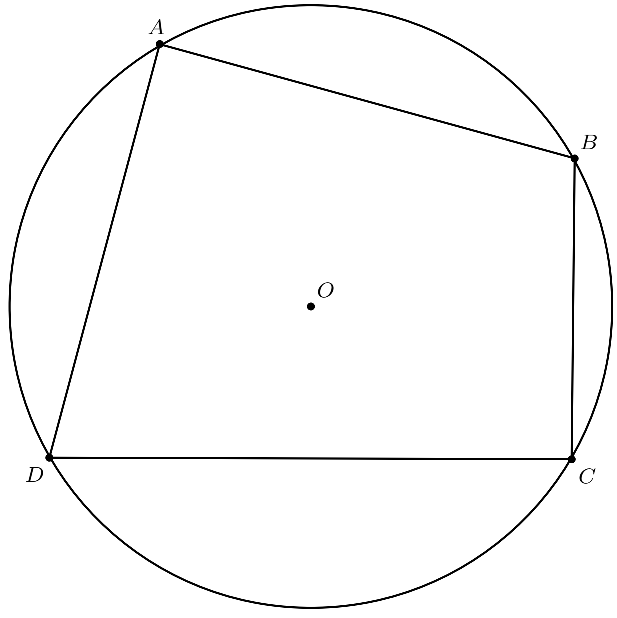
Prof. Cícero Thiago

Aula 8

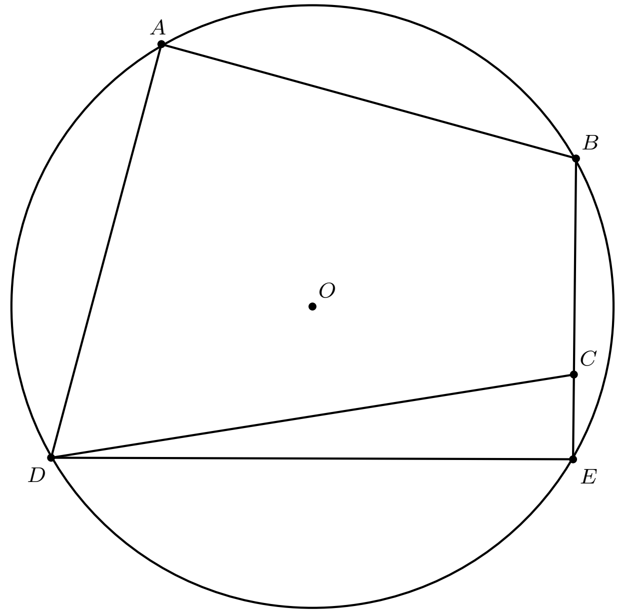
Quadriláteros inscritíveis

Teorema 1. Um quadrilátero é inscritível se, e somente se, a soma dos ângulos opostos é 180°.

Demonstração. $\Rightarrow$ Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível. Temos que $\dfrac{\overset{\frown}{BAD}}{2} + \dfrac{\overset{\frown}{BCD}}{2} = 360^\circ$, ou seja, $2\angle A + 2\angle C = 360^\circ \Leftrightarrow \angle A + \angle C = 180^\circ$. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é 360°, então $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

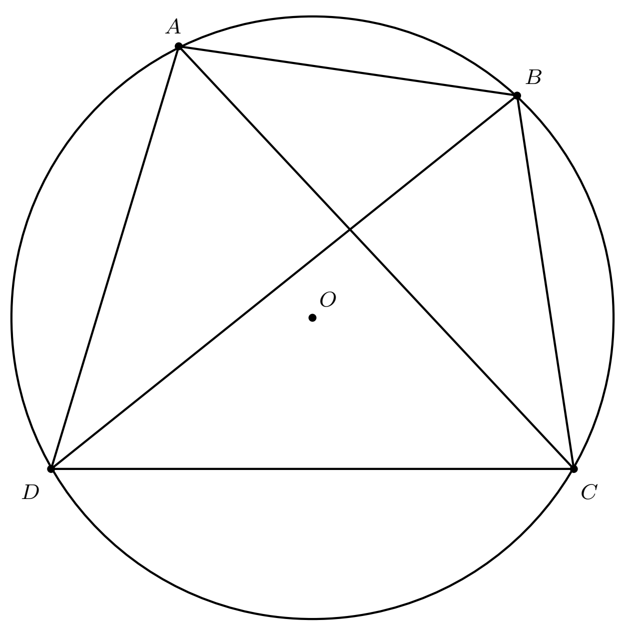


$\Leftarrow$ Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$. Vamos admitir, de maneira falsa, que $ABCD$ não é inscritível. Seja E a intersecção de BC com a circunferência circunscrita ao triângulo ABD. Sendo assim, $\angle A + \angle E = 180^\circ \Rightarrow \angle C = \angle E$, o que é um absurdo pela propriedade do ângulo externo. Portanto, $ABCD$ é inscritível.



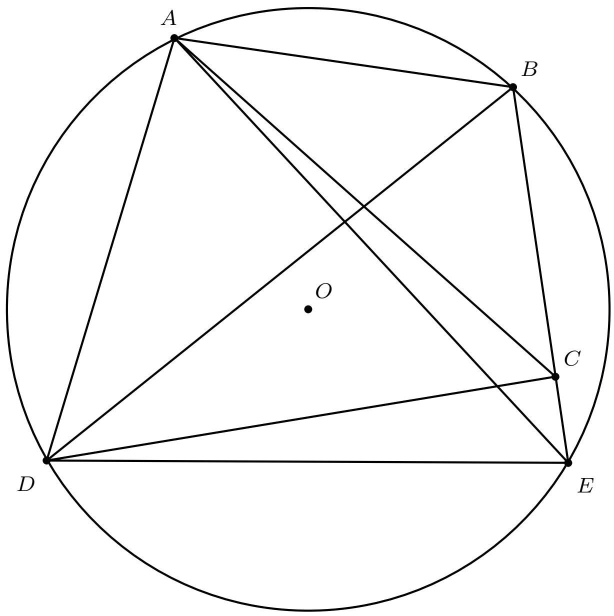
Teorema 2. Um quadrilátero é inscritível se, e somente se, o ângulo entre um lado e uma diagonal é igual ao ângulo entre o lado oposto e a outra diagonal.

Demonstração. $\Rightarrow$



Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível. É fácil ver que $\angle DAC = \angle DBC = \dfrac{\overparen{DC}}{2}$.

$\Leftarrow$



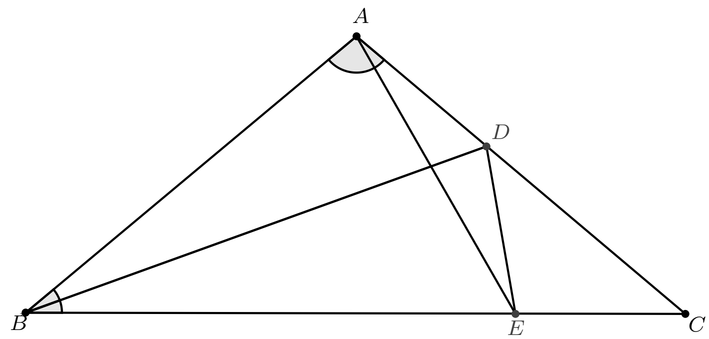
$\Leftarrow$ Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $\angle ADB = \angle ACB$. Vamos admitir, de maneira falsa, que $ABCD$ não é inscritível. Seja E a intersecção de BC com a circunferência circunscrita ao triângulo ABD. Sendo assim, $\angle ADB = \angle ACB = \angle AEB$, o que é um absurdo pela propriedade do ângulo externo. Portanto, $ABCD$ é inscritível.

Exercícios Resolvidos

1. Em um triângulo ABC, $\angle BAC = 100°$ e $AB = AC$. Seja BD a bissetriz de $\angle ABC$, com D sobre o lado AC. Prove que $AD + BD = BC$.

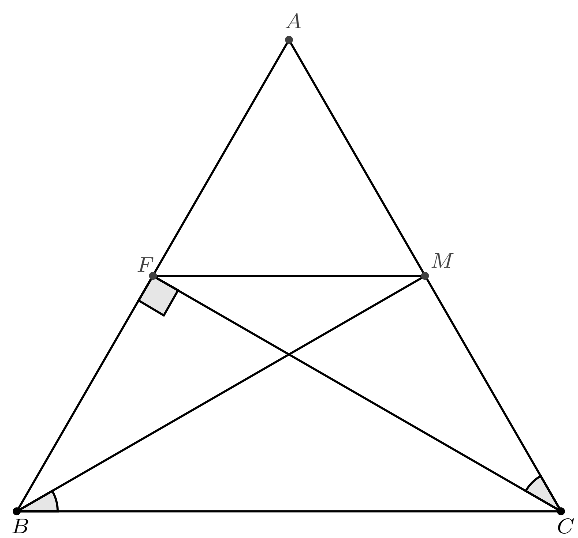
   Solução.

   É fácil ver que $\angle ABD = \angle DBC = 20°$. Seja E um ponto sobre BC tal que $BD = BE$. Basta provar que $EC = AD$. Veja que $\angle BDE = \angle BED = 80°$. Como $\angle BED = 80°$ e $\angle BCD = 40°$, então $\angle EDC = 40°$, ou seja, $ED = EC$. Por outro lado, $ABED$ é um quadrilátero inscritível pois $\angle BAD + \angle BED = 180°$, assim $\angle EAD = \angle EBD = 20°$ e $\angle AED = \angle ABD = 20°$. Portanto, $AD = ED = EC$ e, dessa forma, $BC = AD + BD$.



2. (Inglaterra) No triângulo acutângulo ABC, CF é altura, com F em AB e BM é mediana, com M em CA. Se $BM = CF$ e $\angle MBC = \angle FCA$, prove que o triângulo ABC é equilátero.

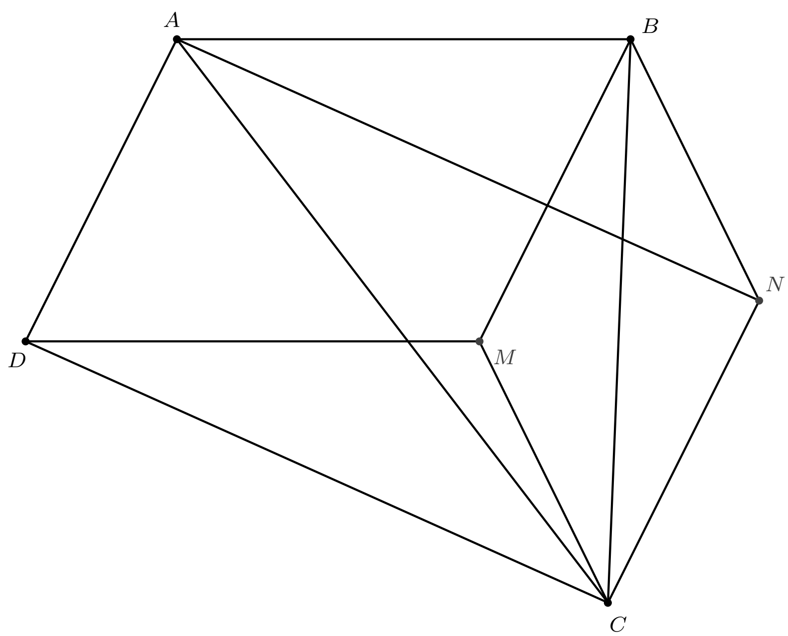
Solução.



Temos que $FM = AM = MC$ e, com isso, $\angle MFC = \angle FCM$, ou seja, o quadrilátero $FBCM$ é inscritível. Dessa forma, $\angle FCM = \angle FBM$ e $\angle BMC = \angle BFC = 90°$. É fácil ver que $\Delta BMC \equiv \Delta BMA$, pelo caso **A.L.A**, então $AB = BC$. Veja também que $\Delta BMC \equiv \Delta BFC$, pelo caso **cateto - hipotenusa**, então $\angle BCM = \angle CBF$ e, portanto, $AC = AB$. Finalmente, $AB = AC = BC$.

3. Seja M um ponto no interior de um quadrilátero convexo $ABCD$ tal que $ABMD$ é um paralelogramo. Prove que se $\angle CBM = \angle CDM$, então $\angle ACD = \angle BCM$.

   Solução.



   Seja N um ponto tal que $BN \parallel MC$ e $NC \parallel BM$. Então $NA \parallel CD$, $\angle NCB = \angle CBM = \angle CDM = \angle NAB$, ou seja, os pontos A, B, N e C são concíclicos. Então, $\angle ACD = \angle NBC = \angle BCM$.

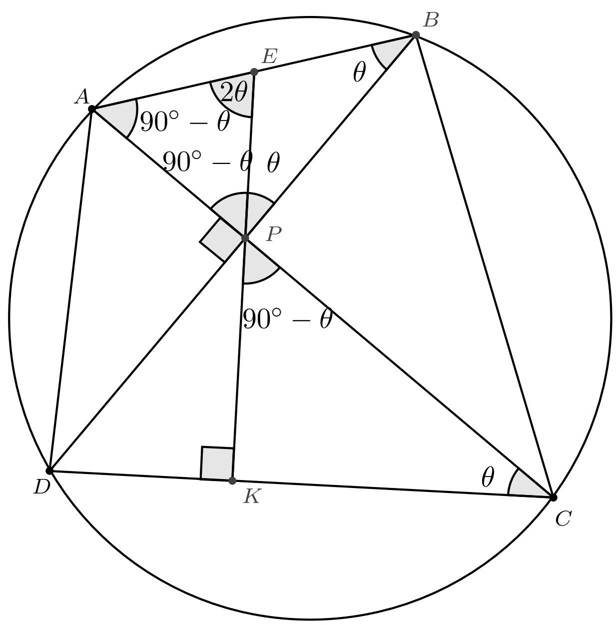
4. (Cone Sul) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que suas diagonais AC e BD são perpendiculares. Seja P a intersecção de AC e BD e seja M o ponto médio de AB. Mostre que o quadrilátero $ABCD$ é inscritível se, e somente se, as retas PM e CD são perpendiculares.

   Solução. Primeiramente vejamos quando PM e CD são perpendiculares. Seja K a intersecção de PM e CD. Como no triângulo ABP, retângulo em P, M é o ponto médio da hipotenusa $AB \Rightarrow PM = MA = MB$. Assim, seja

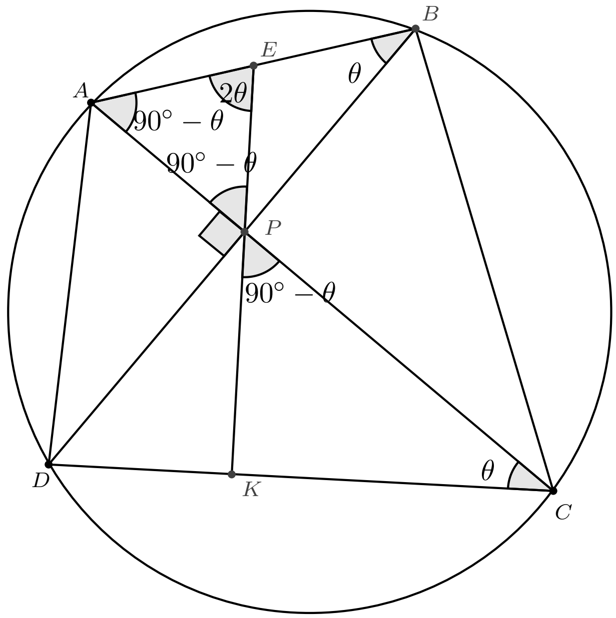
$$\angle ABD = \theta \Rightarrow \angle MPB = \theta \Rightarrow \angle AMP = 2\theta \Rightarrow \angle MPA = 90^\circ - \theta \Rightarrow$$

$$\angle CPK = \angle APM = 90^\circ - \theta.$$

Como $\angle PKC = 90^\circ \Rightarrow \angle PCD = \theta$. Logo, $\angle ABD = \angle ACD = \theta \Rightarrow$ o quadrilátero $ABCD$ é inscritível.



Vejamos agora o caso em que o quadrilátero $ABCD$ é inscritível. Do mesmo modo como M é o ponto médio da hipotenusa AB do triângulo retângulo APB então $PM = MA = MB$. Logo, se $\angle ABD = \theta \Rightarrow \angle BAP = \angle MPA = 90^\circ - \theta \Rightarrow \angle CPK = 90^\circ - \theta$ e como $ABCD$ é inscritível $\Rightarrow \angle ACD = \angle ABD = \theta \Rightarrow \angle PKC = 180^\circ - (90^\circ - \theta + \theta) = 90^\circ \Rightarrow MP \perp CD$. Portanto, $ABCD$ é inscritível se, e somente se, $PM \perp CD$.

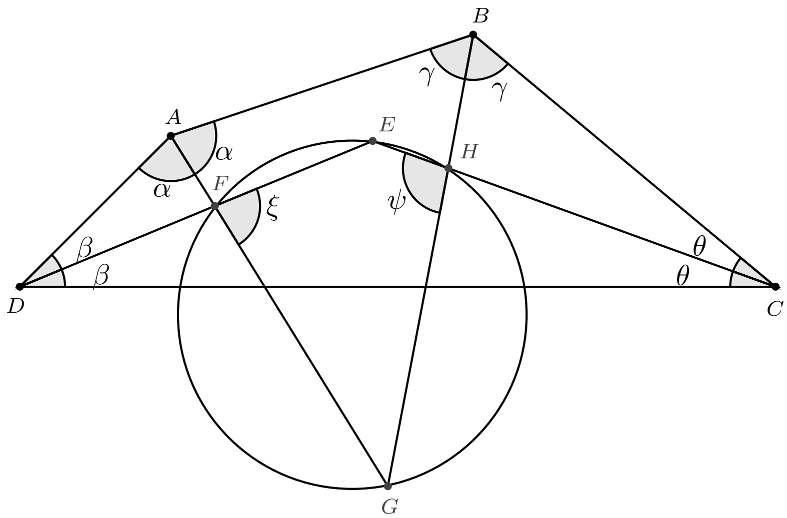


5. Prove que as bissetrizes internas dos quatro ângulos de um quadrilátero convexo determinam um quadrilátero inscritível.

Solução. É fácil ver que $\xi = 180° - \alpha - \beta$ e que $\psi = 180° - \gamma - \theta$. Dessa forma,

$$\xi + \psi = 360° - (\alpha + \beta + \gamma + \theta)$$

$$= 360° - 180° = 180°.$$



Exercícios Propostos

1. (BAMO) Seja k um círculo no plano xy com centro sobre o eixo y e passando pelos pontos $A(0, a)$ e $B(0, b)$ com $0 < a < b$. Seja P um ponto qualquer do círculo, diferente de A e B. Seja Q a intersecção da reta que passa por P e A com o eixo x, e seja $O(0, 0)$. Prove que $\angle BQP = \angle BOP$.

2. (OBM) As diagonais de um quadrilátero inscritível $ABCD$ se intersectam em O. Os círculos circunscritos aos triângulos AOB e COD intersectam as retas BC e AD, pela segunda vez, nos pontos M, N, O e Q. Prove que o quadrilátero $MNPQ$ está inscrito em um círculo de centro O.

3. Um quadrilátero convexo está inscrito em um círculo de centro O. As diagonais AC e BD intersectam - se em P. Os círculos circunscritos aos triângulos ABP e CDP intersectam - se novamente em Q. Se O, P e Q são três pontos distintos, prove que OQ é perpendicular a PQ.

4. (Ibero) Num triângulo escaleno ABC traça-se a bissetriz interna BD, com D sobre AC. Sejam E e F, respectivamente, os pés das perpendiculares traçadas desde A e C até à reta BD, e seja M o ponto sobre o lado BC tal que DM é perpendicular a BC. Prove que $\angle EMD = \angle DMF$.

5. Seja M o ponto de interseção das diagonais de um quadrilátero inscritível $ABCD$, em que $\angle AMB$ é agudo. O triângulo isósceles BCK é construído exteriormente ao quadrilátero, com base a base sendo BC, tal que $\angle KBC + \angle AMB = 90°$. Prove que KM é perpendicular a AD.

6. (Romênia) Seja ABC um triângulo acutângulo, e seja T um ponto no interior tal que $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA$. Sejam M, N e P as projeções de T sobre BC, CA, e AB, respectivamente. O círculo circunscrito ao triângulo MNP intersecta os lados BC, CA e AB, pela segunda vez, em M', N' e P', respectivamente. Prove que o triângulo $M'N'P'$ é equilátero.

7. (Cone Sul) Seja $ABCD$ um quadrado (os vértices estão nomeados no sentido horário) e P um ponto qualquer pertencente ao interior do segmento BC. Constrói - se o quadrado $APRS$ (os vértices novamente nomeados no sentido horário). Demonstrar que a reta CR é tangente à circunferência circuscrita ao triângulo ABC.

8. (IMO) Duas circunferências Γ_1 e Γ_2 intersectam - se em M e N. Seja l a tangente comum a Γ_1 e Γ_2 que está mais próxima de M do que de N. A reta l é tangente a Γ_1 em A e a Γ_2 em B. A reta paralela a l que passa por M intersecta novamente a circunferência Γ_1 em C e novamente a circunferência Γ_2 em D. As retas CA e DB intersectam - se em E; as retas AN e CD intersectam - se em P; as retas BN e CD intersectam - se em Q. Mostre que $EP = EQ$.

9. Seja Q o ponto médio do lado AB de um quadrilátero inscritível $ABCD$ e S a interseção de suas diagonais. Sejam P e R as projeções ortogonais de S sobre AD e BC, respectivamente. Prove que $PQ = QR$.

10. (Itália) Um triângulo ABC acutângulo está inscrito em um círculo de centro O. Seja D a interseção da bissetriz de A com BC e suponha que a perpendicular a AO por D, corta a reta AC em um ponto P, interior a AC. Mostre que $AB = AP$.

Bibliografia

1. A Decade of Berkeley Math Circle
Zvesdelina Stankova

2. Problems in plane and solid geometry
Viktor Prasolov

3. Episodes in nineteenth and twentieth century euclidean geometry
Ross Honsberger