Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 2

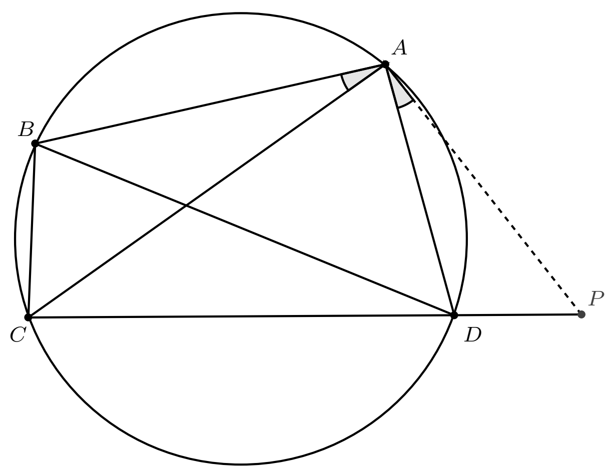
Prof. Cícero Thiago

Aula 9

Teorema de Ptolomeu

Teorema 1. (Ptolomeu) O produto dos comprimentos das diagonais de um quadrilátero inscritível é igual a soma dos produtos dos comprimentos dos pares de lados opostos.

Demonstração.



Seja P o ponto sobre o prolongamento do lado CD tal que $\angle BAC = \angle DAP$. Como o quadrilátero $ABCD$ é inscritível então $\angle ABC = \angle ADP$, assim $\Delta ABC \sim \Delta DAP$. Com isso,

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DP} = \frac{AC}{AP} \Rightarrow DP = \frac{AD \cdot BC}{AB}.$$

Como $\angle BAD = \angle CAP$ e $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AP}$. Portanto, $\Delta ABD \sim \Delta ACP$. Assim,

$$\frac{BD}{CP} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow CP = \frac{AC \cdot BD}{AB}.$$

Mas $CP = CD + DP$, dessa forma

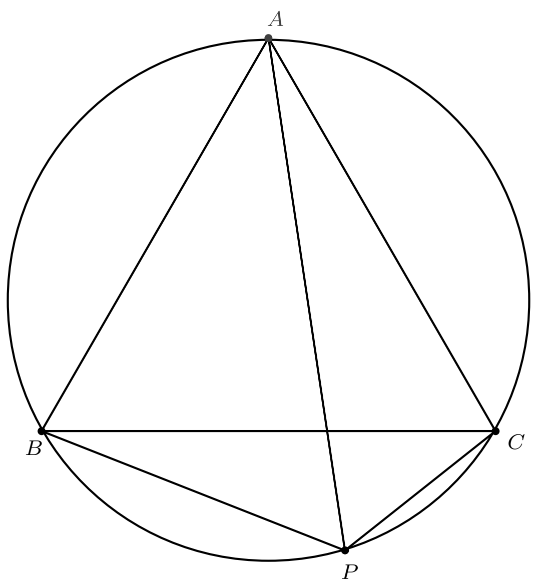
$$\frac{AC \cdot BD}{AB} = CD + \frac{AD \cdot BC}{AB} \Leftrightarrow$$

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Exercícios Resolvidos

1. Seja ABC um triângulo equilátero e seja P um ponto sobre o arco $\widehat{BC}$, que não contém A, da circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Prove que $PA = PB + PC$.

   Solução.

   Como o triângulo ABC é equilátero então $AB = BC = CA = a$. Aplicando o teorema de Ptolomeu ao quadrilátero $ABPC$ temos que

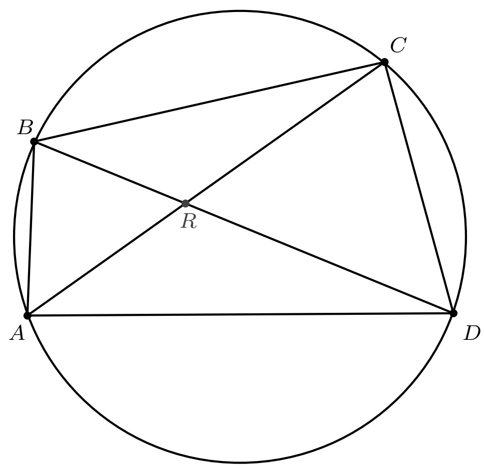
$$AB \cdot PC + AC \cdot PB = BC \cdot PA \Leftrightarrow$$

$$a \cdot PC + a \cdot PB = a \cdot PA \Leftrightarrow$$

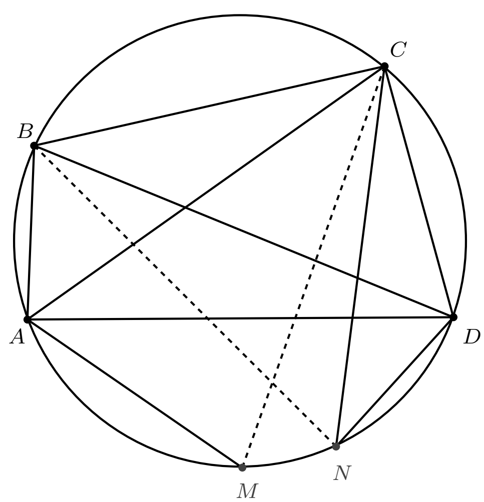
$$PC + PB = PA.$$

2. (IME) Dado o quadrilátero $ABCD$, inscrito num círculo de raio r, conforme a figura abaixo, prove que:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + BC \cdot CD}{AB \cdot BC + CD \cdot AD}.$$



Solução.



Sejam M e N pontos sobre a circunferência circunscrita ao quadrilátero $ABCD$ tais que $\widehat{AM} = \widehat{CD}$ e $\widehat{DN} = \widehat{AB}$. Dessa forma $AM = CD$, $DN = AB$, $BM = CN$ e $MC = BN = AD$. Aplicando o teorema de Ptolomeu nos quadriláteros $MABC$ e $NBCD$ temos

$$BM \cdot AC = AB \cdot MC + BC \cdot AM \text{ (I)}$$

$$CN \cdot BD = DN \cdot BC + CD \cdot BN \text{ (II)}$$

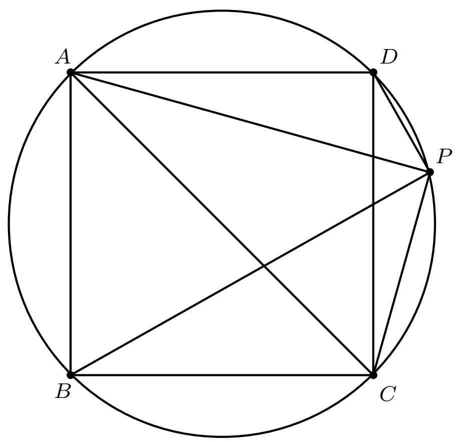
Fazendo (I) $\div$ (II), temos

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + BC \cdot CD}{AB \cdot BC + CD \cdot AD}.$$

Este resultado é conhecido como **Teorema de Hiparco**.

3. (Seletiva do Brasil para a Cone Sul) Prove que as distâncias entre um ponto sobre uma circunferência e os quatro vértices de um quadrado nesta inscrita não podem ser todas números racionais.

Solução.



Como $ABCD$ é um quadrado então $AB = BC = CD = DA = a$. Pelo toerema de Pitágoras no triângulo ABC temos que $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow AC^2 = a^2 + a^2 = 2 \cdot a^2 \Leftrightarrow AC = \sqrt{2} \cdot a$. Aplicando o teorema de Ptolomeu no quadrilátero $ABCP$, temos

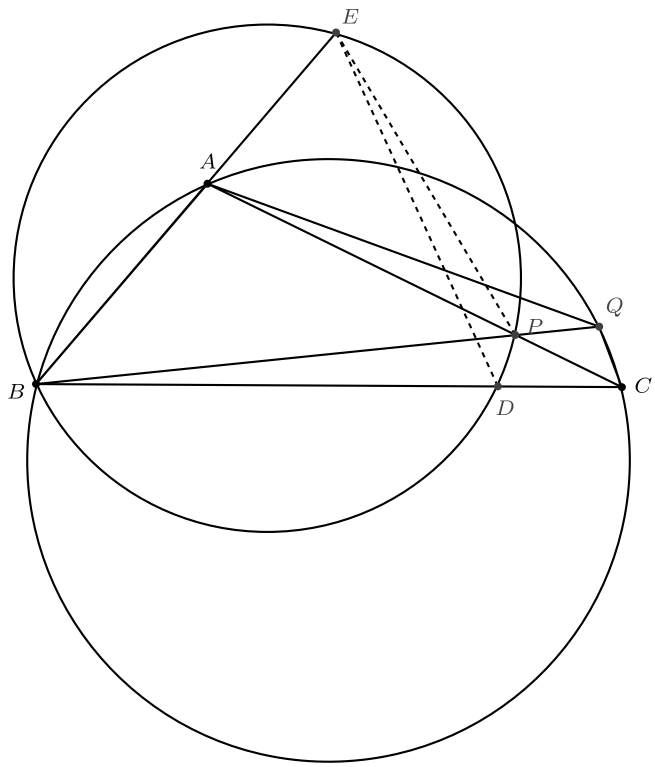
$$AC \cdot BP = AP \cdot BC + CP \cdot AB \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot a \cdot BP = AP \cdot a + CP \cdot a \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2} = \frac{AP + CP}{BP}.$$

Se todas as medidas fossem números racionais estaríamos afirmando, de maneira falsa, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Se P coincidir com um dos vértices, ou seja, $P \equiv D$, então $\dfrac{BP}{CP} = \sqrt{2}$. Assim, as medidas não podem ser todas racionais.

4. (Irã) Seja ABC um triângulo com $BC > CA > AB$. Seja D um ponto sobre o lado BC e seja E o ponto no prolongamento de BA, com A entre E e B, tal que $BD = BE = CA$. Seja P o ponto sobre AC tal que E, B, D e P são concíclicos e seja Q o segundo ponto de interseção de BP com o círculo circunscrito ao triângulo ABC. Prove que $AQ + CQ = BP$.

Solução.



Veja que $\Delta AQC \sim \Delta EPD$, pois $\angle CAQ = \angle CBQ = \angle DEP$ e $\angle AQC = 180^\circ - \angle ABD = \angle EPD$. Por outro lado, pelo teorema de Ptolomeu, temos

$$BP \cdot DE = BE \cdot DP + BD \cdot EP.$$

Então,

$$BP = BE \cdot \frac{DP}{DE} + BD \cdot \frac{EP}{DE} = CA \cdot \frac{CQ}{CA} + CA \cdot \frac{AQ}{CA} = AQ + CQ.$$

5. Seja $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ um polígono regular de n lados tal que

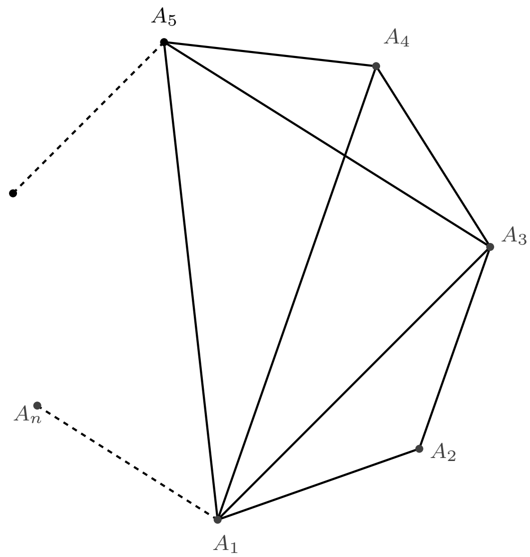
$$\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_4}.$$

Determine n, ou seja, o número de lados do polígono regular.

Solução. Temos que

$$\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_4} \Leftrightarrow$$

$$A_1A_2 \cdot A_1A_3 + A_1A_2 \cdot A_1A_4 = A_1A_3 \cdot A_1A_4. \text{ (I)}$$



Como o quadrilátero $A_1A_3A_4A_5$ é inscritível podemos aplicar o teorema de Ptolomeu, assim

$$A_4A_5 \cdot A_1A_3 + A_3A_4 \cdot A_1A_5 = A_3A_5 \cdot A_1A_4. \text{ (II)}$$

Além disso, como o polígono é regular, temos

$$A_1A_2 = A_4A_5, \ A_1A_2 = A_3A_4, \ A_1A_3 = A_3A_5.$$

Comparando (I) e (II), encontramos

$$A_1A_4 = A_1A_5.$$

Como as diagonais A_1A_4 e A_1A_5 são iguais, segue que existe o mesmo número de vértices entre A_1 e A_4 e entre A_1 e A_5. Dessa forma concluímos que $n = 7$.

Exercícios Propostos

1. (AHSME) Seja $ABCD$ um quadrilátero e seja O o ponto de interseção das diagonais AC e BD. Se $BO = 4$, $OD = 6$, $AO = 8$, $OC = 3$ e $AB = 6$, determine a medida de AD.

2. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Prove que $ABCD$ é inscritível.

3. Seja $ABCD$ um quadrado. Determine o lugar geométrico dos pontos P, no mesmo plano do quadrado $ABCD$, tais que

$$\text{máx}\,\{PA, PC\} = \frac{1}{\sqrt{2}}(PB + PD).$$

4. Uma circunferência passa pelo vértice A de um paralelogramo $ABCD$ intersectando os lados AB e AD nos pontos P e R, respectivamente. Além disso intersecta a diagonal AC no ponto Q. Prove que $AQ \cdot AC = AP \cdot AB + AR \cdot AD$.

5. Um ponto P é escolhido o interior do paralelogramo $ABCD$ de tal forma que $\angle APB + \angle CPD = 180°$. Prove que $AB \cdot AD = BP \cdot DP + AP \cdot CP$.

6. Seja ABC um triângulo isósceles, com $AB = AC$, inscrito em uma circunferência Γ. Seja P um ponto sobre o arco $\widehat{BC}$, que não contém A, da circunferência Γ. Prove que $\dfrac{PA}{PB + PC} = \dfrac{AC}{BC}$.

7. Seja $ABCD$ um quadrado inscrito em uma circunferência Γ. Seja P um ponto sobre o arco $\widehat{BC}$, que não contém A e D, da circunferência Γ. Prove que

$$\frac{PA + PC}{PB + PD} = \frac{PD}{PA}.$$

8. A bissetriz do ângulo $\angle A$ do triângulo ABC intersecta o círculo circunscrito no ponto D. Prove que $AB + AC \leq 2AD$.

9. (IMO) Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo tal que $AB = BC = CD$, $DE = EF = FA$ e $\angle BCD = \angle EFA = 60°$. Sejam G e H pontos no interior do hexágono tais que $\angle AGB = \angle DHE = 120°$. Prove que $AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$.

10. (Mandelbrot) Um quadrilátero inscritível é tal que seus lados medem 1, $\sqrt{7}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{21}$, nesta ordem. Determine a distância entre os pontos médios das diagonais.

Bibliografia

1. Mandelbrot Morsels
Sam Vandervelde

2. Advanced Euclidean Geometry
Alfred Posamentier

3. Problem primer for the olympiad
C R Pranesachar, B J Venkatachala e C S Yogananda

4. 360 Problems for Mathematical Contests
Titu Andreescu e Dorin Andrica

5. Olimpíadas de Matemática 97
Antonio Caminha, Onofre Campos e Paulo Rodrigues

6. Geometría - Una Visión de la planimetría
Lumbreras

7. the Art of Problem Solving, vol. 2: and Beyond
Richard Rusczyk e Sandor Lehoczky

8. Problems in plane and solid geometry, vol. 1 - Plane Geometry
Viktor Prasolov