Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 2

Prof. Cícero Thiago

Aula 11

Potência de ponto e eixo radical

1. Definição

Seja Γ uma circunferência de centro O e raio R. Seja P um ponto que está a uma distância d de O, vamos definir a potência do ponto P em relação à circunferência Γ por

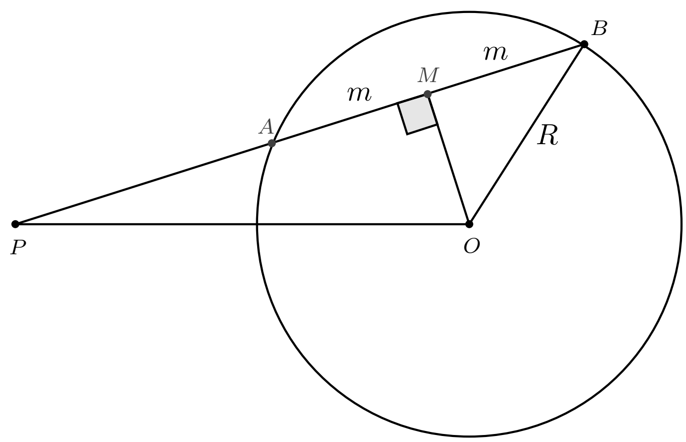
$$\mathrm{Pot}_{\Gamma}^{P} = d^2 - R^2.$$

É fácil ver que se P é um ponto no exterior de Γ então a potência será positiva, se P é um ponto sobre a circunferência então sua potência será zero e se P é um ponto no interior da circunferência então sua potência será negativa.

Teorema 1. Seja P um ponto e Γ uma circunferência. Se uma reta que passa por P intersecta a circunferência nos pontos A e B, então o produto $PA \cdot PB$ é constante.

Demonstração.

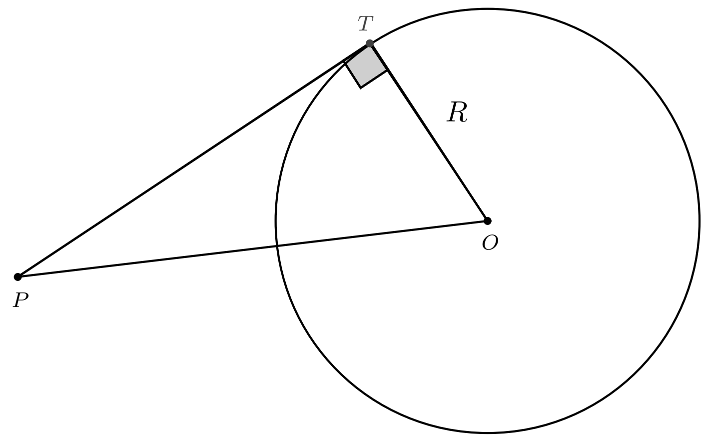
1° caso: P é um ponto no exterior.



Seja OM a mediatriz de AB. Então

$$PA \cdot PB = (PM - m) \cdot (PM + m) = PM^2 - m^2 = PM^2 + OM^2 - (OM^2 + m^2)$$
$$= PO^2 - R^2 = \text{Pot}_{\Gamma}^{P}.$$

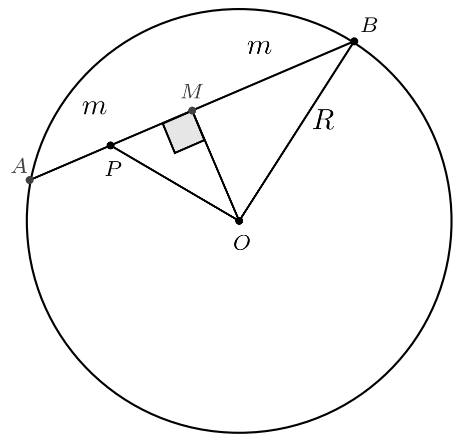
Vamos analisar também o caso em que pelo ponto P é traçada uma tangente a Γ.



Dessa forma pelo teorema de Pitágoras temos que

$$PO^2 = PT^2 + R^2 \Leftrightarrow PT^2 = PO^2 - R^2 = \text{Pot}_{\Gamma}^{P}.$$

2° caso: P é um ponto no interior.



Seja OM a mediatriz de AB. Então

$$PA \cdot PB = (m - PM) \cdot (m + PM) = m^2 - PM^2 = m^2 + OM^2 - (OM^2 + PM^2)$$

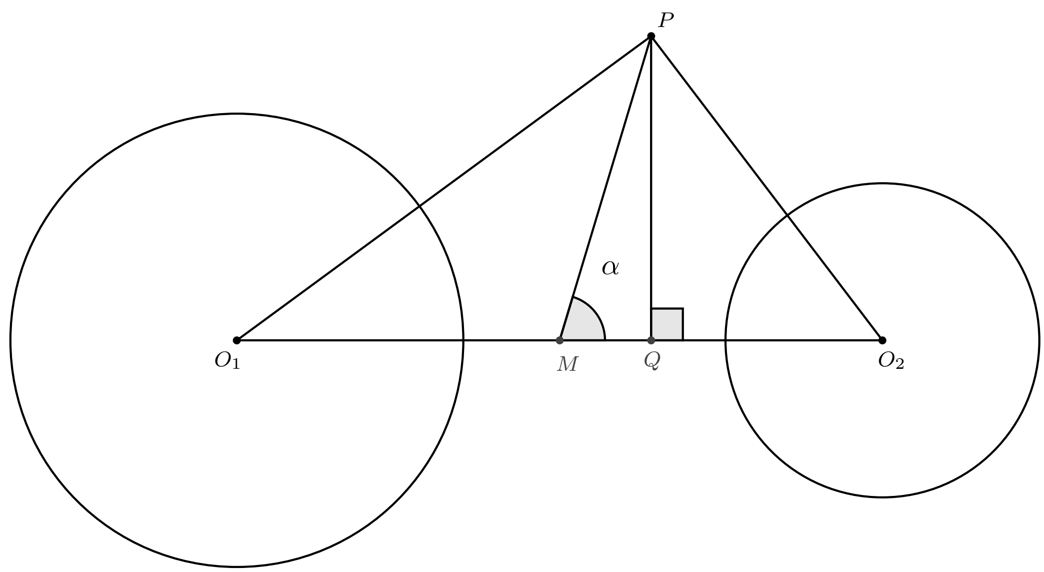
$$= R^2 - PO^2 = -\text{Pot}_{\Gamma}^{P}.$$

2. Eixo radical

Chamaremos de **Eixo radical** o lugar geométrico dos pontos que possuem a mesma potência com relação a duas circunferências dadas.

Teorema 2. O conjunto dos pontos que possuem a mesma potência com relação a duas circunferências dadas é uma reta perpendicular à reta que contém os centros.

Demonstração.



Sejam Γ_1 e Γ_2 circunferências com centros O_1 e O_2 e raios R_1 e R_2, respectivamente. Além disso, seja P um ponto que possui a mesma potência com relação as duas circunferências. Assim,

$$\text{Pot}_{\Gamma_1}^{P} = \text{Pot}_{\Gamma_2}^{P} \Leftrightarrow$$
$$PO_1^2 - R_1^2 = PO_2^2 - R_2^2 \Leftrightarrow$$
$$PO_1^2 - PO_2^2 = R_1^2 - R_2^2.$$

Seja M o ponto médio de O_1O_2, Q a projeção de P sobre O_1O_2 e $\angle PMQ = \alpha$. Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos ΔPO_1M e ΔPO_2M temos

$$PO_1^2 = O_1M^2 + PM^2 - 2 \cdot O_1M \cdot PM \cdot \cos(180^\circ - \alpha) =$$
$$PO_1^2 = O_1M^2 + PM^2 + 2 \cdot O_1M \cdot PM \cdot \cos\alpha$$
$$PO_2^2 = O_2M^2 + PM^2 - 2 \cdot O_2M \cdot PM \cdot \cos\alpha.$$

Então,

$$PO_1^2 - PO_2^2 = 2 \cdot O_1O_2 \cdot PM \cdot \cos\alpha.$$

Por outro lado, $\cos\alpha = \dfrac{MQ}{PM} \Leftrightarrow MQ = PM \cdot \cos\alpha$, com isso

$$MQ = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2 \cdot O_1O_2} = \text{Fixo}.$$

Portanto, o lugar geométrico dos pontos P é a reta perpendicular a O_1O_2 que passa por Q.

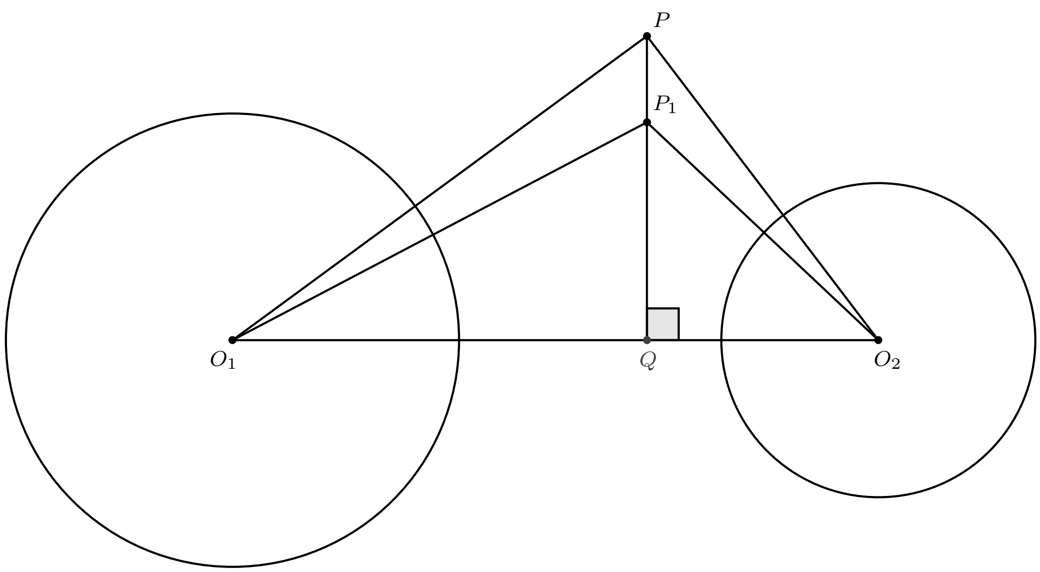
Por outro lado, seja P_1 um ponto de PQ. Vamos provar que P_1 possui a mesma potência com relação às duas circunferências. Assim, pelo toerema de Pitágoras

$$P_1O_1^2 = O_1Q^2 + P_1Q^2,$$

$$P_1O_2^2 = O_2Q^2 + P_1Q^2.$$

Então,

$$P_1O_1^2 - P_1O_2^2 = O_1Q^2 - O_2Q^2.$$



Além disso,

$$PO_1^2 = O_1Q^2 + PQ^2,$$
$$PO_2^2 = O_2Q^2 + PQ^2.$$

Então,

$$PO_1^2 - PO_2^2 = R_1^2 - R_2^2 = O_1Q^2 - O_2Q^2 = P_1O_1^2 - P_1O_2^2 \Leftrightarrow$$
$$P_1O_1^2 - R_1^2 = P_1O_2^2 - R_2^2 \Leftrightarrow$$
$$\text{Pot}_{\Gamma_1}^{P_1} = \text{Pot}_{\Gamma_2}^{P_1}.$$

Problema 1. Dois círculos Γ_1 e Γ_2 intersectam - se em P e Q. Uma reta passando por P intersecta Γ_1 e Γ_2 novamente em A e B, respectivamente, se X é o ponto médio de AB e a reta que passa por Q e X intersecta Γ_1 e Γ_2 novamente em Y e Z, respectivamente. Prove que X é o ponto médio de YZ.

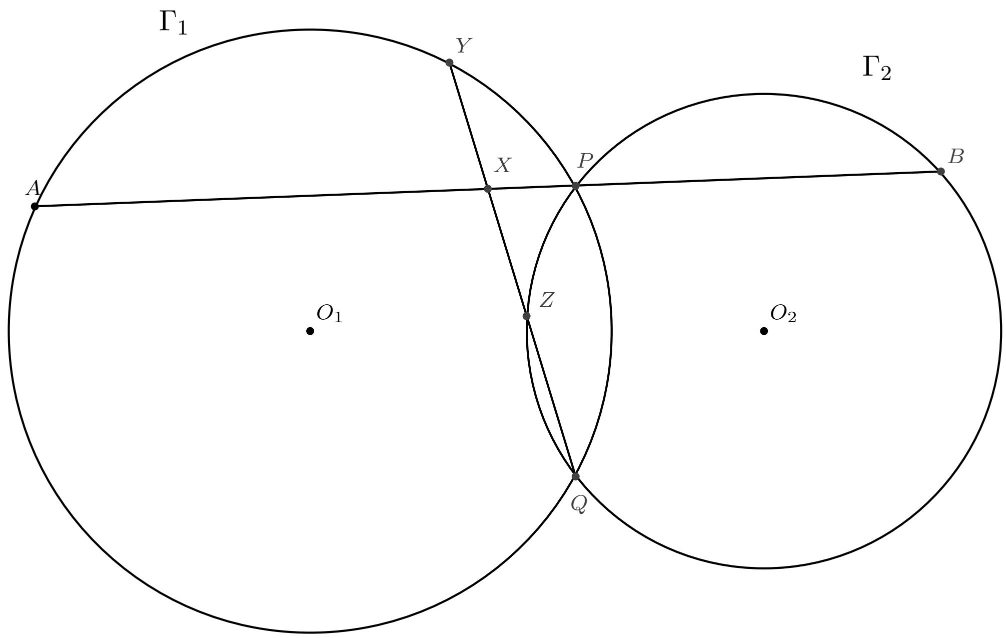
Solução.

$$\mathrm{Pot}^{X}_{\Gamma_2} = XP \cdot XB = XZ \cdot XQ,$$

$$-\mathrm{Pot}^{X}_{\Gamma_1} = XP \cdot XA = XY \cdot XQ.$$

Então,

$$\frac{XP \cdot XB}{XP \cdot XA} = \frac{XZ \cdot XQ}{XY \cdot XQ} \Leftrightarrow$$
$$XY = XZ.$$



Problema 2. (OCM) Duas tangentes OA e OB são traçadas a um círculo de um ponto externo O. Uma corda AC é construída paralela a OB e uma secante OC é desenhada intersectando o círculo em E. Se K é o ponto de interseção de OB com o prolongamento de AE, prove que $OK = KB$.

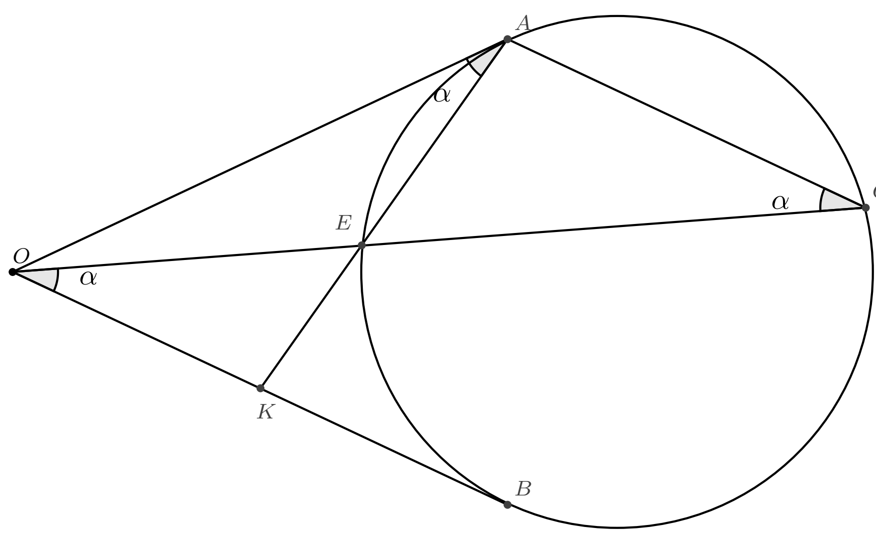
Solução.
Temos que $\angle KOC = \angle ECA$ pois $OB \parallel AC$ e $\angle ECA = \angle EAO$ pois OA é tangente ao círculo. Então $\Delta OKE \sim \Delta AKO$ assim

$$\frac{OK}{KA} = \frac{KE}{OK} \Leftrightarrow OK^2 = KE \cdot KA.$$

Usando a potência de K com relação à circunferência temos

$$KB^2 = KE \cdot KA.$$

Portanto, $OK = KB$.



Problema 3. Seja C uma semicircunferência de centro O e diâmetro AB e D é o ponto médio do arco AB. Sobre a reta OD toma - se o ponto E, do mesmo lado de D com relação a AB, tal que $OE = BD$. Se BE corta a semicircunferência em F e P é o ponto de AB tal que FP é perpendicular a AB. Prove que $BP = \dfrac{AB}{3}$.

Solução.
Sem perda de generalidade faça $OA = OB = 1$. Logo, $OD = 1$, $OE = BD = \sqrt{2}$ e $EB = \sqrt{3}$. Utilizando a potência de E com relação à circunferência de diâmetro AB temos

$$EF \cdot EB = EO^2 - R^2 = EO^2 - 1.$$

Assim,

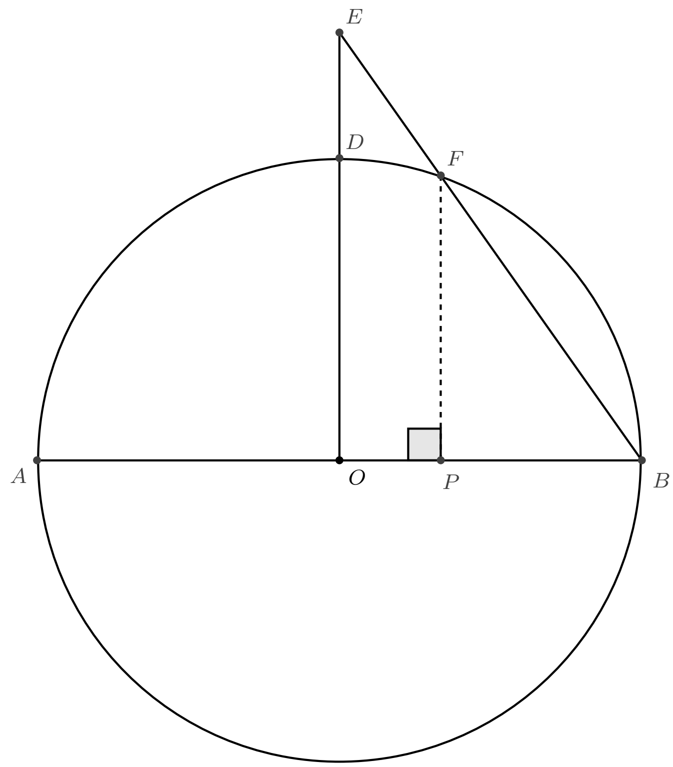
$$EF \cdot \sqrt{3} = (\sqrt{2})^2 - 1 \Leftrightarrow EF = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ e } FB = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Além disso, $\Delta BPF \sim \Delta BOE$ então

$$\frac{BP}{BO} = \frac{BF}{BE} \Leftrightarrow BP = \frac{2}{3}.$$

Portanto,

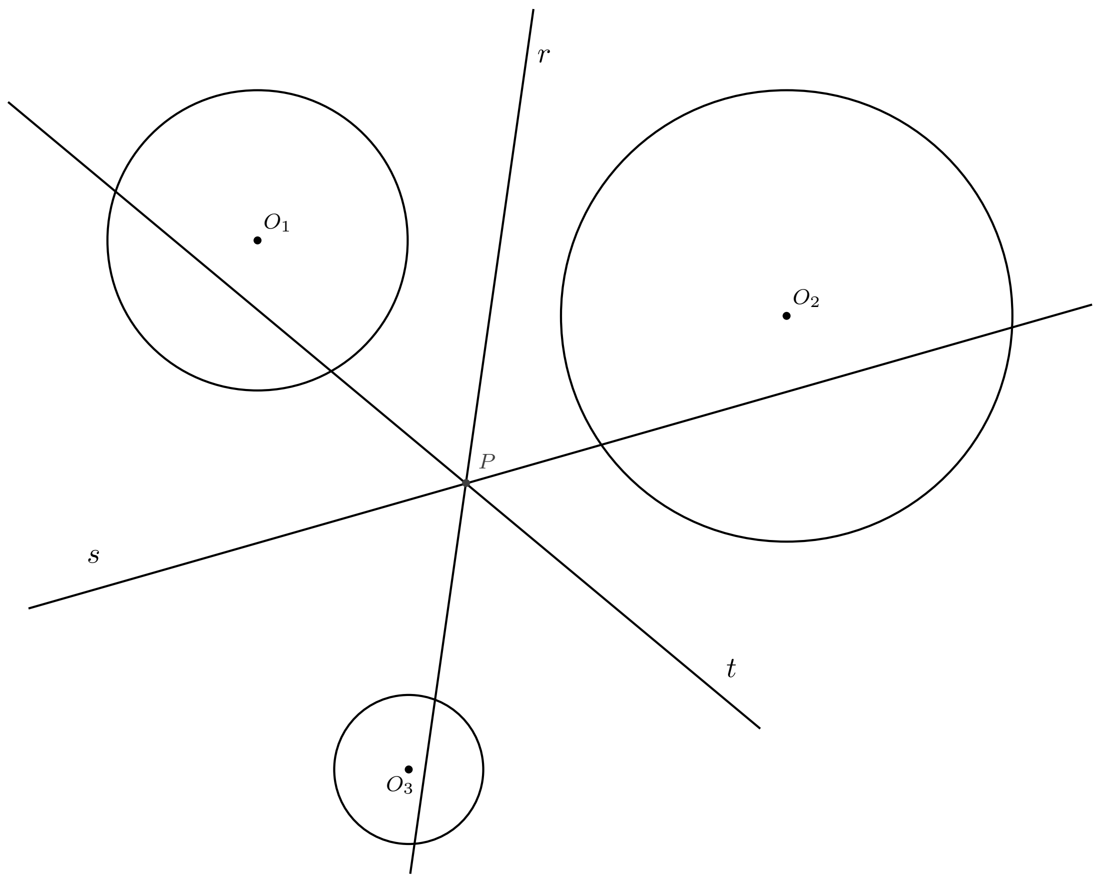
$$\frac{BP}{AB} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow BP = \frac{AB}{3}.$$



Problema 4. Considere três círculos Γ_1, Γ_2 e Γ_3 tais que seus centros O_1, O_2 e O_3, respectivamente, não estão alinhados. Sejam r, s e t os eixos radicais de Γ_1 e Γ_2, Γ_1 e Γ_3 e Γ_2 e Γ_3, respectivamente. Prove que r, s e t são concorrentes em um ponto chamado **centro radical**.

Solução.

Seja P um ponto sobre $r \cap s$, ou seja, P possui a mesma potência com relação Γ_1, Γ_2 e Γ_3. Portanto, P está sobre a reta t.



Exercícios propostos

1. Em um triângulo ABC, a bissetriz do ângulo A e a mediana relativa a BC intersectam este lado em pontos distintos O e M, respectivamente. O círculo circunscrito ao triângulo AOM intersecta os lados AB e AC em E e F, respectivamente. Prove que $BE = CF$.

2. Seja BD a bissetriz do ângulo B do triângulo ABC. Se o círculo circunscrito ao triângulo BDC intersecta AB em E e o círculo circunscrito ao triângulo ABD intersecta BC em F, prove que $AE = CF$.

3. Um triângulo acutângulo ABC está inscrito numa circunferência de centro O. As alturas do triângulo são AD, BE e CF. A reta EF intersecta a circunferência em P e Q.

(a) Prove que OA é perpendicular a PQ.
(b) Se M é o ponto médio de BC, prove que $AP^2 = 2AD.OM$.

4. Seja C um ponto sobre o semicírculo de diâmetro AB e seja D o ponto médio do arco AC. Se E é a projeção de D sobre BC e F é a interseção de AE com o semicírculo, prove que BF bissecta o segmento DE.

5. Seja P um ponto no interior de um círculo tal que existem três cordas que passam por P e tem o mesmo comprimento. Prove que P é o centro do círculo.

6. Sejam Γ_1 e Γ_2 círculos concêntricos, com Γ_2 no interior de Γ_1. Partindo de um ponto A pertencente a Γ_1, é desenhada uma tangente AB à Γ_2 ($B \in \Gamma_2$). Seja C o segundo ponto de interseção de AB com Γ_1, e D o ponto médio de AB. Um reta passando por A intersecta Γ_2 em E e F de tal maneira que as mediatrizes de DE e CF se intersectam em um ponto M sobre AC. Determine a razão $\dfrac{AM}{MC}$.

7. (IMO) Seja ABC um triângulo com circuncentro O. Sejam P e Q pontos no interior dos lados CA e AB, respectivamente. Sejam K, L e M os pontos médios dos segmentos BP, CQ e PQ, respectivamente, e seja Γ o círculo que passa por K, L e M. Se PQ é tangente a Γ, prove que $OP = OQ$.

8. (IMO) Um círculo de centro O passa pelos vértices A e C de um triângulo ABC e intersecta os segmentos AB e BC novamente em pontos distintos K e N, respectivamente. Os círculos circunscritos aos triângulos ABC e KBN se intersectam em exatamente 2 pontos distintos B e M. Prove que $\angle OMB = 90°$.

Bibliografia

1. Problemas de las olimpiadas matematicas del Cono Sur (I^a a IV^a)
Fauring - Wagner - Wykowski - Gutierrez - Pedraza - Moreira

2. Olimpíadas Cearenses de Matemática - Ensino Fundamental - 1981 - 2005
Emanuel Carneiro, Francisco Antônio M. de Paiva e Onofre Campos

3. Potência de um ponto em relação a uma circunferência
Eduardo Wagner
Revista do professor de matemática - Número 45

4. Mathematical Olympiad Challenges
Titu Andreescu e Razvan Gelca

5. Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses - For senior section - Vol. 1
Xu Jiagu

6. Tópicos de Matemática Elementar - Volume 2
Antonio Caminha Muniz Neto