Polos Olímpicos de Treinamento

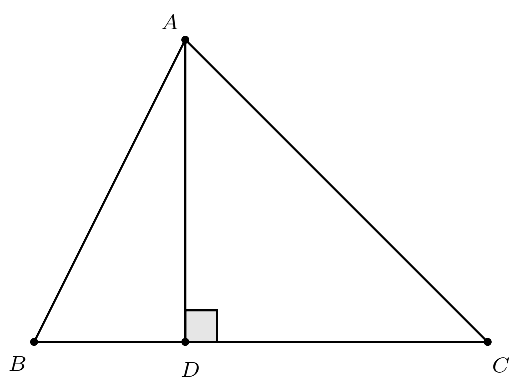
Curso de Geometria - Nível 2

Prof. Cícero Thiago

Aula 12

Relações entre áreas I

Teorema 1. (Fórmula tradicional.)



A área do triângulo ΔABC pode ser calculada por $[\Delta ABC] = \dfrac{BC \cdot AD}{2}$.

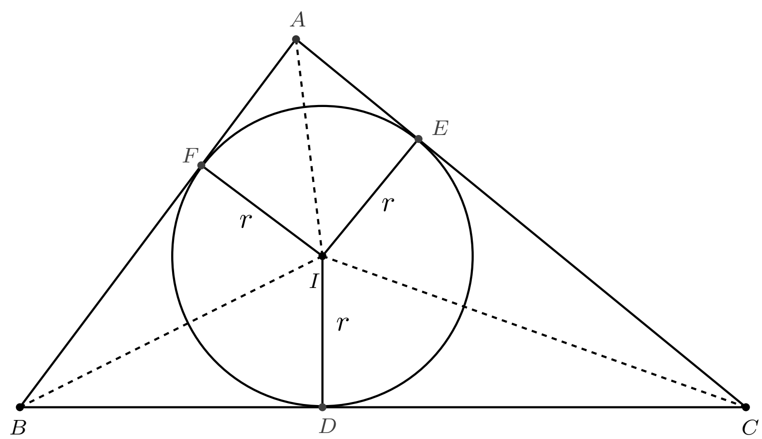
Teorema 2. (Área de um triângulo em função do raio da circunferência inscrita.)

Sejam a, b e c as medidas dos lados BC, CA e AB do triângulo ΔABC, respectivamente, e seja r a medida do raio da circunferência inscrita. Então, a área do triângulo ΔABC pode ser calculada por

$$[\Delta ABC] = p \cdot r,$$

em que $p = \dfrac{a + b + c}{2}$.

Demonstração.



$$[\Delta ABC] = [\Delta BIC] + [\Delta CIA] + [\Delta AIB] \Leftrightarrow$$

$$[\Delta ABC] = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} \Leftrightarrow$$

$$[\Delta ABC] = \left(\frac{a+b+c}{2}\right) \cdot r \Leftrightarrow$$

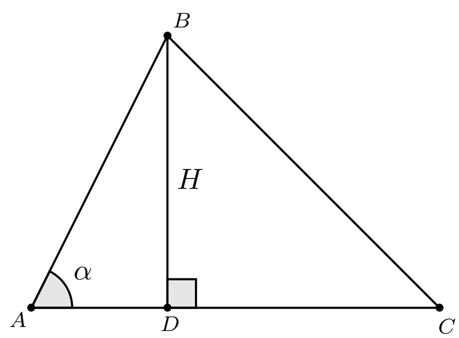
$$[\Delta ABC] = p \cdot r.$$

Teorema 3. (Fórmula trigonométrica da área de um triângulo.)

Sejam a, b e c as medidas dos lados BC, CA e AB do triângulo ΔABC, respectivamente. A área do triângulo ΔABC pode ser calculada por

$$[\Delta ABC] = \frac{b \cdot c \cdot sin\angle A}{2} = \frac{a \cdot c \cdot sin\angle B}{2} = \frac{a \cdot b \cdot sin\angle C}{2}.$$

Demonstração. Vamos demonstrar uma das igualdades. As outras são análogas.



Seja $\angle A = \alpha$. Temos que

$$[\Delta ABC] = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{a \cdot H}{2}.$$

Por outro lado, no triângulo ΔABD, temos $\sin\alpha = \dfrac{H}{c} \Leftrightarrow H = c \cdot \sin\alpha$, então

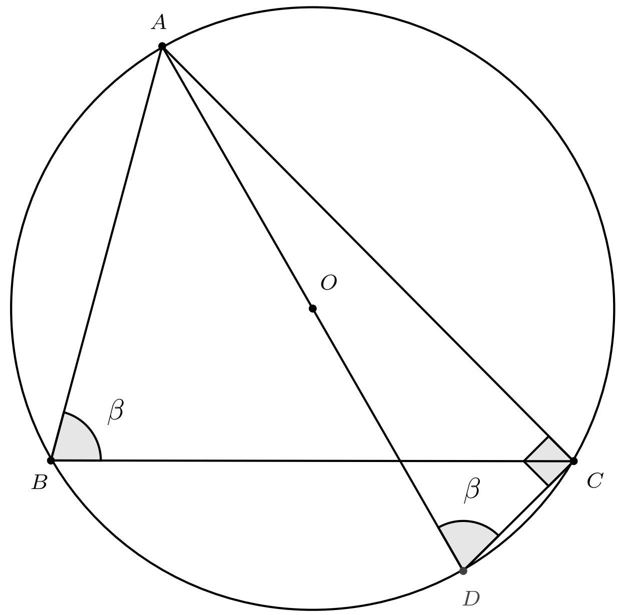
$$[\Delta ABC] = \frac{a \cdot c \cdot \sin\alpha}{2}.$$

Teorema 4. (Área de um triângulo em função do raio da circunferência circunscrita.)

Sejam a, b e c as medidas dos lados BC, CA e AB do triângulo ΔABC, respectivamente, e seja R o raio da circunferência circunscrita. Então, a área do triângulo $[\Delta ABC]$ pode ser calculada por

$$[\Delta ABC] = \frac{abc}{4R}.$$

Demonstração.



Sejam a, b e c as medidas dos lados BC, CA e AB do triângulo ΔABC, respectivamente. Temos que

$$[\Delta ABC] = \frac{a \cdot c \cdot \sin \beta}{2}.$$

Por outro lado, seja AD um diâmetro então, no ΔACD, temos que

$$\sin \beta = \frac{b}{2R}.$$

Portanto,

$$[\Delta ABC] = \frac{abc}{4R}.$$

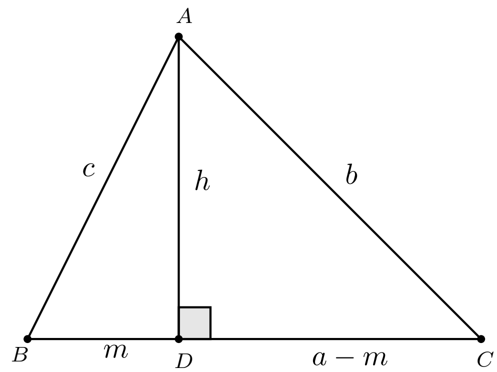
Teorema 5. (Fórmula de Heron.)

Sejam a, b e c as medidas dos lados BC, CA e AB do triângulo ΔABC, respectivamente. Então, a área do triângulo ΔABC pode ser calculada por

$$[\Delta ABC] = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)},$$

em que $p = \dfrac{a + b + c}{2}$.

Demonstração.



Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos ΔABD e ΔACD, temos:
1. $c^2 = m^2 + h^2$.
2. $b^2 = (a - m)^2 + h^2$.
De (2), temos:

$$b^2 = (a - m)^2 + h^2 \Leftrightarrow$$

$$b^2 = a^2 - 2am + m^2 + h^2 \Leftrightarrow$$

$$b^2 = a^2 - 2am + c^2 \Leftrightarrow$$

$$m = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Substituindo em (1), temos:

$$c^2 = \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2 + h^2 \Leftrightarrow$$

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$h^2 = \left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) \cdot \left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) \Leftrightarrow$$

$$h^2 = \left(\frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) \cdot \left(\frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a}\right) \Leftrightarrow$$

$$4a^2h^2 = [(a + c)^2 - b^2] \cdot [(b^2 - (a - c)^2] \Leftrightarrow$$

$$4a^2h^2 = (a + c + b) \cdot (a + c - b) \cdot (b + a - c) \cdot (b + c - a) \Leftrightarrow$$

$$4a^2h^2 = (a + b + c) \cdot (b + c - a) \cdot (a + c - b) \cdot (a + b - c) \Leftrightarrow$$

$$4a^2h^2 = 2p \cdot (2p - 2a) \cdot (2p - 2b) \cdot (2p - 2c) \Leftrightarrow$$

$$\frac{a^2h^2}{2} = p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c) \Leftrightarrow$$

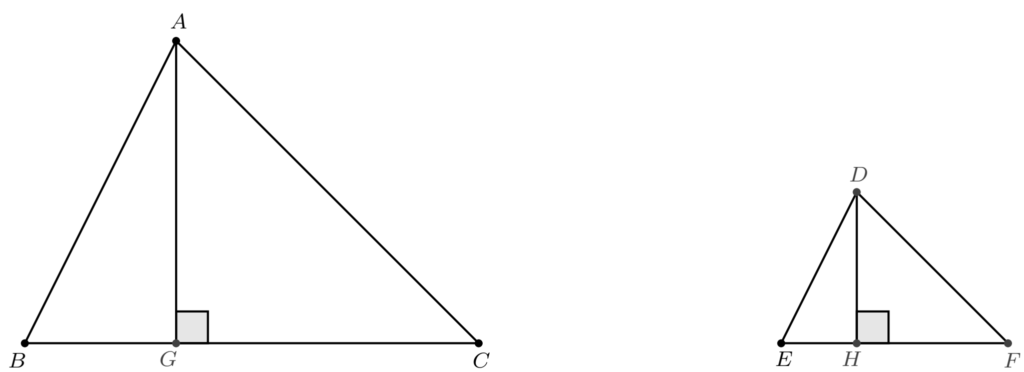
$$[\Delta ABC]^2 = p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c) \Leftrightarrow$$
$$[\Delta ABC] = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}.$$

Teorema 6. (Relação entre as áreas de triângulos semelhantes.)

Sejam ΔABC e ΔDEF dois triângulos semelhantes tais que $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF} = k$, então $\dfrac{[\Delta ABC]}{[\Delta DEF]} = k^2$.

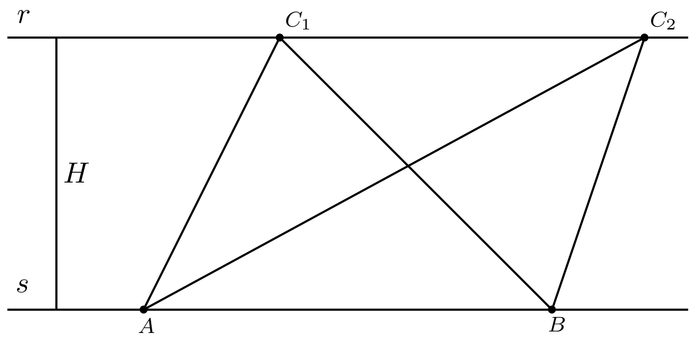
Demonstração.
Se $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ com $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AG}{DH} = k$, então

$$\frac{[\Delta ABC]}{[\Delta DEF]} = \frac{\dfrac{BC \cdot AG}{2}}{\dfrac{EF \cdot DH}{2}} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AG}{DH} = k \cdot k = k^2.$$



Teorema 7. Sejam r e s retas paralelas. Sejam A e B pontos distintos sobre a reta s e C_1 e C_2 pontos distintos sobre a reta r. Então, $[\Delta ABC_1] = [\Delta ABC_2]$.

Demonstração. O resultado é imediato pois $[\Delta ABC_1] = [\Delta ABC_2] = \dfrac{AB \cdot H}{2}$.



Teorema 8. (Usando áreas para calcular razão de segmentos.)
Seja ABC um triângulo e D, E e F pontos sobre os lados BC, CA e AB tais que AD, BE e CF são concorrentes no ponto P. Defina $K = [ABC]$, $K_A = [PBC]$, $K_B = [PCA]$ e $K_C = [PAB]$. Como $K = K_A + K_B + K_C$, então

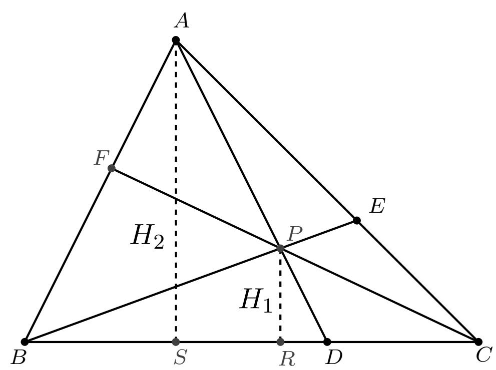
(a)

$$\frac{BD}{DC} = \frac{K_C}{K_B}, \ \frac{CE}{EA} = \frac{K_A}{K_C} \text{ e } \frac{AF}{FB} = \frac{K_B}{K_A}.$$

(b)

$$\frac{AP}{PD} = \frac{K_B + K_C}{K_A}, \ \frac{BP}{PE} = \frac{K_A + K_C}{K_B} \text{ e } \frac{CP}{PF} = \frac{K_A + K_B}{K_C}$$

Demonstração.



(a) Temos que

$$\frac{BD}{CD} = \frac{[\Delta ABD]}{[\Delta ACD]} = \frac{[\Delta BPD]}{[\Delta CPD]} = \frac{[\Delta ABD] - [\Delta BPD]}{[\Delta ACD] - [\Delta CPD]} = \frac{[\Delta APB]}{[\Delta ACP]} = \frac{K_C}{K_B}.$$

Da mesma maneira demonstra - se que $\dfrac{CE}{EA} = \dfrac{K_A}{K_C}$ e $\dfrac{AF}{FB} = \dfrac{K_B}{K_A}$.

(b) Temos que

$$\Delta ADS \sim \Delta PDR \Rightarrow$$
$$\frac{AD}{PD} = \frac{H_2}{H_1} = \frac{[\Delta ABC]}{[\Delta BPC]} = \frac{K_A + K_B + K_C}{K_A} \Leftrightarrow$$
$$\frac{AP}{PD} = \frac{K_B + K_C}{K_A}.$$

Da mesma maneira demonstra - se que $\dfrac{BP}{PE} = \dfrac{K_A + K_C}{K_B}$ e $\dfrac{CP}{PF} = \dfrac{K_A + K_B}{K_C}$.

Teorema 9. (Área de quadrilátero convexo qualquer.)

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo qualquer tal que θ é o menor ângulo entre as diagonais. Então, $[\Delta ABCD] = \dfrac{AC \cdot BD \cdot \sin\theta}{2}$.

Demonstração.
Temos que

$$[ABCD] = [\Delta APD] + [\Delta BPC] + [\Delta CPD] + [\Delta DPA] \Rightarrow$$
$$[ABCD] = \frac{PA \cdot PD \cdot \sin\theta}{2} + \frac{PA \cdot PB \cdot \sin\theta}{2} + \frac{PB \cdot PC \cdot \sin\theta}{2} + \frac{PC \cdot PD \cdot \sin\theta}{2} \Rightarrow$$
$$[ABCD] = \frac{(PA \cdot PD + PA \cdot PB + PB \cdot PC + PC \cdot PD)\sin\theta}{2} \Rightarrow$$
$$[ABCD] = \frac{(PA + PC)(PB + PD)\sin\theta}{2} \Rightarrow [ABCD] = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\theta}{2}.$$

Exercícios Resolvidos

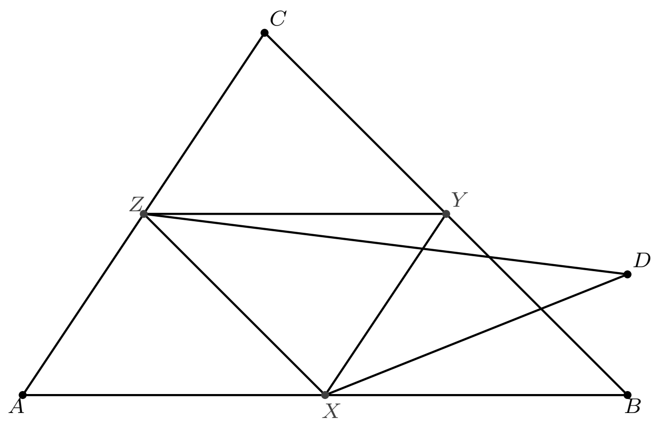
1. (Olimpíada de Maio) ABC é um triângulo equilátero. N é o ponto do lado AC tal que $AC = 7AN$, M é o ponto do lado AB tal que MN é paralelo a BC e P o ponto do lado BC tal que MP é paralelo a AC. Determine o valor de $\dfrac{\text{área}(MNP)}{\text{área}(ABC)}$.

   Solução. É fácil ver que $CPMN$ é um paralelogramo e, com isso, área$(MNP) = \dfrac{1}{2} \cdot$ área$(CPMN)$. Além disso, $\dfrac{\text{área}(AMN)}{\text{área}(ABC)} = \dfrac{1}{49}$ e $\dfrac{\text{área}(BMP)}{\text{área}(ABC)} = \left(\dfrac{6}{7}\right)^2 = \dfrac{36}{49}$.
   Portanto,

   $$\frac{\text{área}(PMN)}{\text{área}(ABC)} = \frac{1 - \frac{1}{49} - \frac{36}{49}}{2} = \frac{6}{49}.$$

2. São dados 1000 pontos no plano não colineares tais que se três deles determinam um triângulo então sua área é menor ou igual a 1. Prove que todos os pontos estão em um triângulo de área menor ou igual a quatro.

Solução.



Como existe um número finito de triângulos que podem ser construídos usando os 1000 pontos então, escolhemos aquele de área máxima que chamaremos de ΔXYZ. Seja ΔABC o triângulo tal que X, Y e Z são os pontos médios de BC, CA e AB, respectivamente, então $[\Delta ABC] = 4[\Delta XYZ] \leq 4$. Seja D, um ponto no conjunto dos 1000 pontos dados, no exterior do triângulo ΔABC então $[\Delta XYZ] < [\Delta XZD]$, o que contradiz a escolha de ΔABC. Portanto, todos os pontos estão no interior do triângulo ΔABC.

3. (Coréia) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e seja P o ponto de interseção das diagonais. Prove que

$$[\Delta PAB] + [\Delta PCD] = [\Delta PBC] + [\Delta PDA]$$

se, e somente se, P é o ponto médio de AC ou BD.

Solução. Observe que $[\Delta PAB] \cdot [\Delta PCD] = [\Delta PBC] \cdot [\Delta PDA] = \dfrac{1}{4} \cdot PA \cdot PB \cdot PC \cdot PD \cdot \sin P$. Os números $[\Delta PAB]$, $[\Delta PCD]$ e $[\Delta PBC]$, $[\Delta PDA]$ tem a mesma soma e o mesmo produto, então $[\Delta PAB] = [\Delta PBC]$ e $[\Delta PCD] = [\Delta PDA]$ ou $[\Delta PAB] = [\Delta PDA]$ e $[\Delta PBC] = [\Delta PCD]$, ou seja, P é o ponto médio de AC ou BD.

4. (OCM) Os lados de um triângulo são expressos, em cm, por três inteiros consecutivos e sua área, em cm^2, é dada por um inteiro. Prove que o menor lado do triângulo é ímpar.

Solução.

Sejam $x-1,\ x,\ x+1$ os lados do triângulo. Pela fórmula de Heron, a área do triângulo é

$$\begin{aligned}[\Delta ABC] &= \sqrt{\frac{3x}{2}\cdot\frac{(x+2)}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{(x-2)}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{3x^2(x^2-4)}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{3x^2(x^2-4)}.\end{aligned}$$

Como $[\Delta ABC] \in \mathbb{Z}$, devemos ter $3x^2(x^2-4)$ par, o que nos diz que x deve ser par. Portanto, o menor lado do triângulo, que é $x-1$, deve ser ímpar.

5. (Hong Kong) Seja ABC um triângulo e sejam X, Y e Z pontos sobre os lados AB, BC e CA, respectivamente, tais que $\dfrac{AX}{XB} = \dfrac{4}{5}$, $\dfrac{BY}{YC} = \dfrac{6}{7}$ e $\dfrac{CZ}{ZA} = \dfrac{8}{9}$. Se a área do triângulo ΔABC é 1989, determine a área do triângulo ΔXYZ.

Solução.

$$\begin{aligned}\frac{[\Delta XYZ]}{1989} &= 1 - \left(\frac{[\Delta AXZ]}{1989} + \frac{[\Delta BXY]}{1989} + \frac{[\Delta CYZ]}{1989}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{17} + \frac{5}{9}\cdot\frac{6}{13} + \frac{7}{13}\cdot\frac{8}{17}\right) \\ & 1 - \frac{1482}{1989},\end{aligned}$$

Portanto, a área do triângulo ΔXYZ é $1989 - 1482 = 507$.

Exercícios Propostos

1. No triângulo ABC, os pontos L, M e N estão sobre BC, CA e AB respectivamente, e AL, BM e CN são concorrentes no ponto P.
(a) Encontre o valor numérico de

$$\frac{PL}{AL} + \frac{PM}{BM} + \frac{PN}{CN}$$

(b) Encontre o valor numérico de

$$\frac{AP}{AL} + \frac{BP}{BM} + \frac{CP}{CN}$$

2. (Ibero) Se AD, BE e CF são três cevianas concorrentes no circuncentro O do triângulo ABC, demonstre que
$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{R}.$$

3. (AIME) Num triângulo ABC, A_1, B_1 e C_1 estão sobre os lados BC, CA e AB, respectivamente. Dado que AA_1, BB_1 e CC_1 são concorrentes no ponto O, e que $\dfrac{AO}{OA_1} + \dfrac{BO}{OB_1} + \dfrac{CO}{OC_1} = 92$. Encontre o valor de $\dfrac{AO}{OA_1} \cdot \dfrac{BO}{OB_1} \cdot \dfrac{CO}{OC_1}$.

4. Em um ΔABC, AD, BE e CF são concorrentes no ponto P tal que $AP = PD = 6$, $EP = 3$, $PB = 9$ e $CF = 20$. Qual é a área do ΔABC?

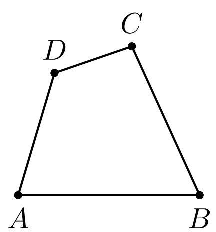
5. Em um triângulo ABC, sejam S o ponto médio da mediana correspondente ao vértice A e Q o ponto de interseção de BS com o lado AC. Demonstrar que $BS = 3QS$.

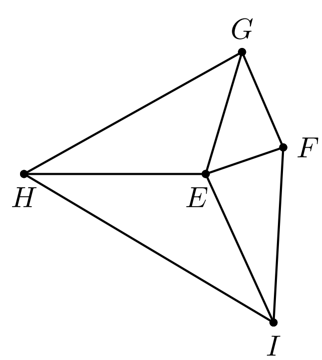
6. Três segmentos C_1A_2, C_2B_1 e A_1B_2 com extremos sobre os lados do triângulo ABC são paralelos aos lados e passam pelo ponto P. Prove que as áreas dos triângulos $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$ são iguais.

7. (OBM) É dado um quadrilátero convexo $ABCD$. Sejam E, F, G e H os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente. Determine a posição de um ponto P de forma que os quadriláteros $PHAE$, $PEBF$, $PFCG$ e $PGDH$ tenham a mesma área.

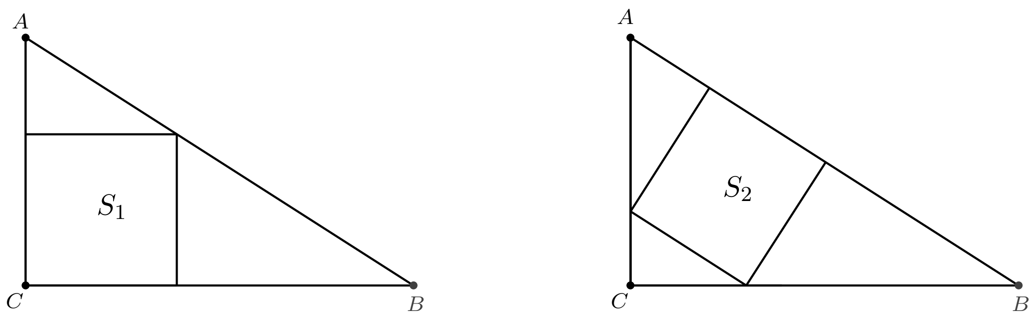
8. Seja $ABCDE$ um pentágono convexo (não necessariamente regular) tal que os triângulos ABC, BCD, CDE, DEA e EAB tem área 1. Qual a área do pentágono?

9. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e EH, EI, EF e EG são segmentos paralelos e iguais a AB, BC, CD e DA, como mostra a figura abaixo. Determine a razão entre as áreas dos triângulos $HIFG$ e $ABCD$.

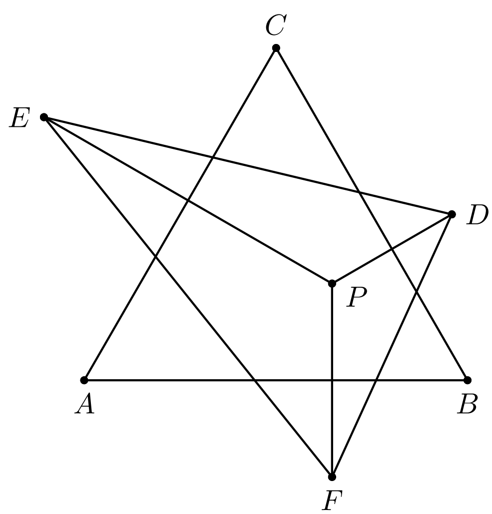




10. (AIME) Quadrados S_1 e S_2 são inscritos em um triângulo retângulo ABC, como mostrado na figura abaixo. Determine $AC + CB$ se área$(S_1) = 441$ e área$(S_2) = 440$.



11. Seja P um ponto no interior de um triângulo equilátero ABC, e sejam D, E e F os simétricos de P em relação aos lados BC, CA e AB, respectivamente. Qual é maior, a área do triângulo ABC ou a área do triângulo DEF?



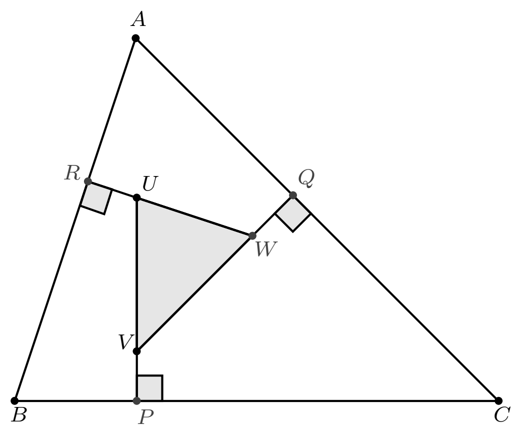
12. (Portugal) Seja $[\Delta ABC]$ um triângulo retângulo em A. Considere um ponto E sobre a hipotenusa e traça - se a partir desse ponto uma paralela ao cateto AC. Seja a interseção desta paralela com o cateto AB. Prove que

$$\frac{BD}{DE} + \frac{DE}{BD} = \frac{BC^2}{2S},$$

sendo S a área do triângulo ΔABC.

13. (Portugal) Os lados AB, BC e AC do triângulo representado na figura medem, respectivamente, 7, 11 e 8. Traçam - se WR, UP e VQ, perpendiculares aos lados.

Sabendo que UW mede 2, determine a razão entre a área do triângulo ΔUVW e a área do triângulo ΔABC.



14. (OBM) $ABCD$ é um quadrilátero convexo e inscritível e M é um ponto sobre o lado CD, tal que o triângulo ADM e o quadrilátero $ABCM$ têm a mesma área e o mesmo perímetro. Prove que $ABCD$ tem dois lados de comprimentos iguais.

15. Os pontos médios das diagonais AC, CE, EA, BD, DF e FB do hexágono convexo $ABCDEF$ são vértices de um novo hexágono. Calcular a relação entre as áreas do dois hexágonos.

16. (Mandelbrot) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $AB = 12$, $BC = 6$ e $CD = 20$. Suponha que $ABCD$ possui uma circunferência inscrita que é tangente ao lado BC em seu ponto médio. Qual é a área do quadrilátero $ABCD$?

Bibliografia

1. Coleção Elementos da Matemática, vol.2 - Geometria Plana
Marcelo Rufino de Oliveira e Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro.

2. Olimpíadas Cearenses de Matemática, Ensino Médio, 1981 - 1985
Emanuel Carneiro, Francisco Antônio M. de Paiva e Onofre Campos.

3. Olimpíadas de Matemática, Categoria B, 10°, 11° e 12° anos, vol.1
Jorge Picado e Paulo Eduardo Oliveira.

4. Tópicos de Matemática Elementar, vol.2, Geometria Euclidiana Plana
Antonio Caminha Muniz Neto.

5. Area y Volumen, en la geometria elemental.
José Araujo, Guilermo Keilhauer, Norma Pietrocola e Valeri Vavilov.

6. Which Way did the Bicycle Go? And other intriguing mathematical mysteries
Joseph D. E. Konhauser, Dan Velleman e Stan Wagon.

7. 360 Problems for Mathematical Contests
Titu Andreescu e Dorin Andrica.

8. Áreas para achar razões de segmentos
Cícero Thiago e Marcelo Mendes.
Revista Eureka 25

9. Mathematical Olympiad Treasures
Titu Andreescu e Bogdan Enescu˙

10. Mandelbrot Morsels
Sam Vandervelde.