Polos Olímpicos de Treinamento

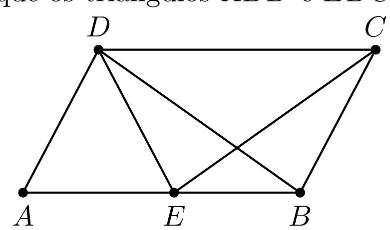
Curso de Geometria - Nível 2

Prof. Cícero Thiago

Aula 13

Revisão I

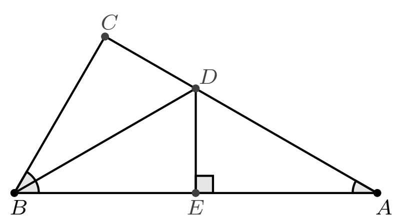
Problema 1. Na figura abaixo tem - se $AD = DE$, $\angle A = \angle DEC$ e $\angle ADE = \angle BDC$. Mostre que os triângulos ABD e EDC são congruentes.



Solução. Como $\angle ADE = \angle BDC$ então $\angle ADB = \angle EDC$. Portanto, $\Delta ABD \equiv \Delta EDC$ pelo caso ALA.

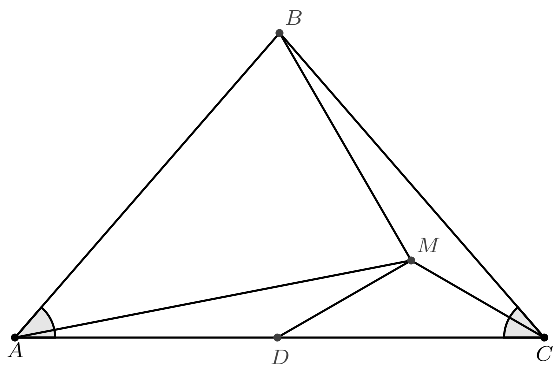
Problema 2. (OCM) Um triângulo ABC é tal que $\angle C = 2\angle A$ e $AC = 2BC$. Prove que este triângulo é retângulo.

Solução. Seja CD a bissetriz interna do ângulo $\angle C$. Então, $\angle BCD = \angle DCA = \angle DAC$ e o triângulo CDA é isósceles. Trace a altura DE deste triângulo. Observe que $CE = \dfrac{AC}{2} = BC$. Daí, os triângulos BCD e ECD são congruentes, pelo caso LAL, de onde concluímos que $\angle CBD = \angle CED = 90^\circ$, e o triângulo ABC é retângulo em B.



Problema 3. Seja ABC um triângulo isósceles, com $AB = BC$ e $\angle ABC = 82°$. Seja M um ponto no interior do triângulo tal que $AM = AB$ e $\angle MAC = 11°$. Ache a medida do ângulo $\angle MCB$.

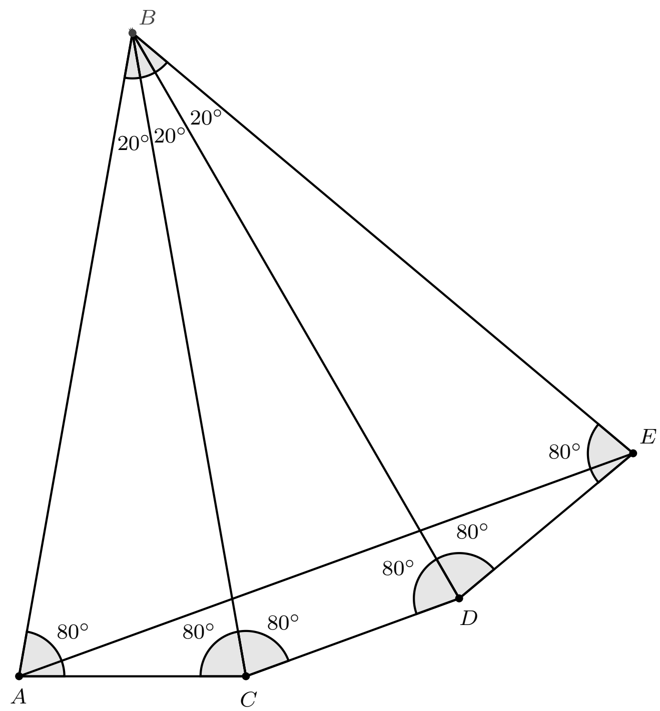
Solução.



É fácil ver que $\angle MAB = 38°$. Como $AM = AB$, então $\angle ABM = \angle AMB = 71°$. Dessa forma, $\angle MBC = 11°$. Seja D o ponto sobre o segmento AC tal que $AD = BM$. Assim, $\Delta MBC \equiv \Delta DAM$ pelo caso LAL. Portanto, $MD = MC$ e $\angle BCM = \angle AMD = \alpha$. Pela propriedade do ângulo externo temos que $\angle MDC = 11° + \alpha$ e, como $MD = MC$ então $11° + \alpha = 49° - \alpha \Leftrightarrow \alpha = \angle MCB = 19°$.

Problema 4. Seja ABC um triângulo isósceles de base AC tal que $\angle B = 20°$. Prove que $AB < 3AC$.

Solução. Inicialmente construa os triângulos BCD e DBE congruentes ao triângulo ABC como feito na figura abaixo. Dessa forma é fácil ver que o triângulo ABE é equilátero. Então, $AE = AB$. É fácil verificar, usando a desigualdade triangular, que $AC+CD+DE > AE$. Como os triângulos BCD, DBE e ABC são congruentes então $AC = CD = DE$. Portanto, $AB < 3AC$.



Problemas propostos

1. Sobre os lados de um triângulo ABC constroem - se externamente os triângulos equiláteros BCD, CAE e ABF. Prove que os segmentos AD, BE e CF são congruentes.

2. Mostre que a hipotenusa de um triângulo retângulo é maior que a semi - soma dos catetos.

3. (Torneio das Cidades) Se a, b e c são os comprimentos dos lados de um triângulo, prove que $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$.

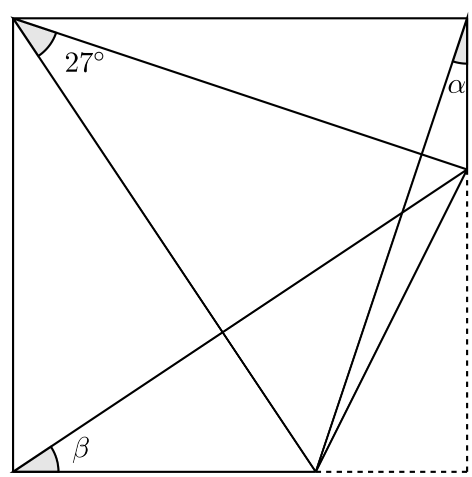
4. Seja ABC um triângulo tal que $\angle ABC = 2\angle BCA$, ademais, seja D o ponto do lado BC tal que AD é bissetriz do ângulo $\angle CAB$ e $CD = AB$. Calcule as medidas dos ângulos do triângulo ABC.

5. Seja ABC um triângulo isósceles de base AC tal que $\angle B = 20°$. Prove que $AB >$

$2AC$.

6. Seja ABC um triângulo tal que $\angle A = 20°$. Sejam D e E pontos sobre os lados AC e AB, respectivamente, tais que $\angle AED = 40°$ e $ED = DC = BC$, determine a medida do ângulo $\angle B$.

7. (OBM) O canto de um quadrado de cartolina foi cortado com uma tesoura. A soma dos comprimentos dos catetos do triângulo recortado é igual ao comprimento do lado do quadrado. Qual o valor da soma dos ângulos α e β marcados na figura abaixo?



8. Seja ABC um triângulo retângulo em C com $AC < BC$. Sejam D o ponto do lado AC e seja K o ponto do segmento BD tais que $\angle KAD = \angle AKD = \angle ABC$. Calcule $\dfrac{BK}{CD}$.