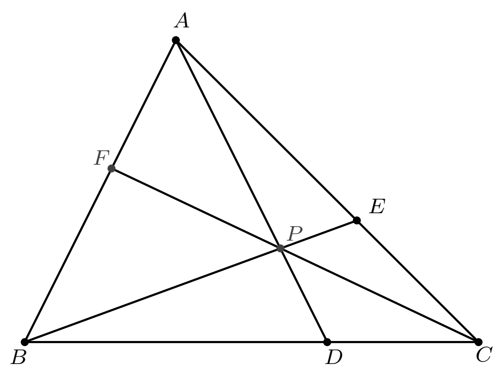
Teorema de Ceva e Teorema de Menelaus.

Teorema 1. (Ceva) Sejam D, E e F pontos sobre os lados BC, AC e AB, respectivamente, do triângulo ΔABC. Os segmentos AD, BE e CF intersectam - se em um ponto P se, e somente se, $\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$.

Demonstração.
$\Rightarrow$



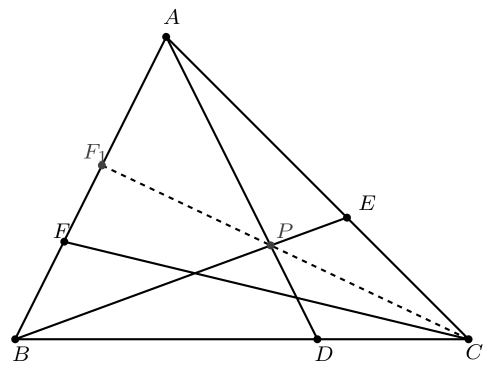
Defina $K = [ABC],\ K_A = [PBC],\ K_B = [PCA]$ e $K_C = [PAB]$.

Temos que

$$\frac{BD}{CD} = \frac{[\Delta ABD]}{[\Delta ACD]} = \frac{[\Delta BPD]}{[\Delta CPD]} = \frac{[\Delta ABD] - [\Delta BPD]}{[\Delta ACD] - [\Delta CPD]} = \frac{[\Delta APB]}{[\Delta ACP]} = \frac{K_C}{K_B}.$$

De maneira análoga, $\frac{CE}{EA} = \frac{K_A}{K_C}$ e $\frac{AF}{FB} = \frac{K_B}{K_A}$. Assim, $\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{K_C}{K_B} \cdot \frac{K_A}{K_C} \cdot \frac{K_B}{K_A} = 1$.

$\Leftarrow$ Sejam D, E e F pontos sobre os lados BC, CA e AB tais que $\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$ mas AD, BE e CF não são concorrentes. Seja F_1 sobre AB tal que AD, BE e CF_1 são concorrentes em P. Assim, $\dfrac{BD}{CD} \cdot \dfrac{CE}{EA} \cdot \dfrac{AF_1}{F_1B} = 1$. Dessa forma, $\dfrac{AF}{FB} = \dfrac{AF_1}{F_1B} \Leftrightarrow F = F_1$.



Exercícios resolvidos

1. Prove que as medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto que se chama baricentro.

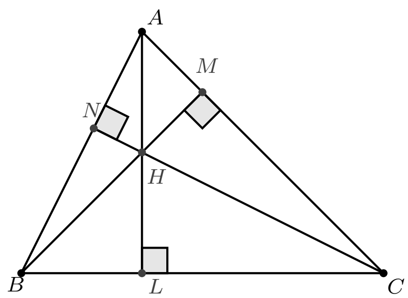
   Solução.
   Sejam M, N e R os pontos médios de AC, BC e BA, respectivamente. Então
   $$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{CN}{NB} \cdot \frac{BR}{RA} = 1,$$
   ou seja, AN, BM e CR são concorrentes.

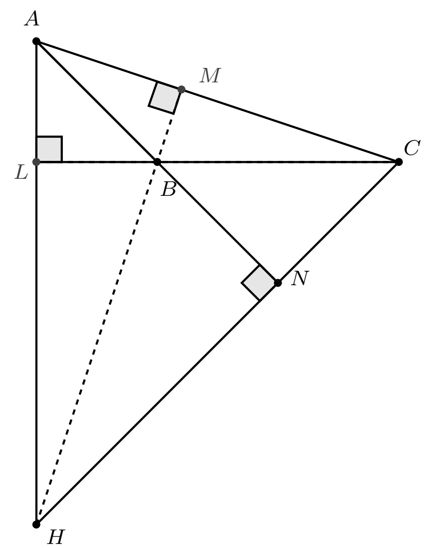
2. Prove que as bissetrizes internas de um triângulo são concorrentes em um ponto que se chama incentro.

   Solução.
   Sejam X, Y e Z os pés das bissetrizes relativas aos lados BC, AC e AB, respectivamente. Pelo teorema das bissetrizes internas temos que
   $$\frac{AY}{YC} \cdot \frac{CX}{XB} \cdot \frac{BZ}{ZA} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CA}{AB} \cdot \frac{BC}{CA} = 1,$$
   ou seja, AX, BY e CZ são concorrentes.

3. Prove que as alturas de um triângulo são concorrentes em um ponto que se chama ortocentro.

Solução.





Sejam AL, BM e CN as alturas do triângulo ΔABC. É fácil ver que

$$\Delta ANC \sim \Delta AMB \Rightarrow \frac{AN}{MA} = \frac{AC}{AB} \text{ (I)}$$

$$\Delta BLA \sim \Delta BNC \Rightarrow \frac{BL}{NB} = \frac{AB}{BC} \text{ (II)}$$

$$\Delta CMB \sim \Delta CLA \Rightarrow \frac{CM}{LC} = \frac{BC}{AC} \text{ (III).}$$

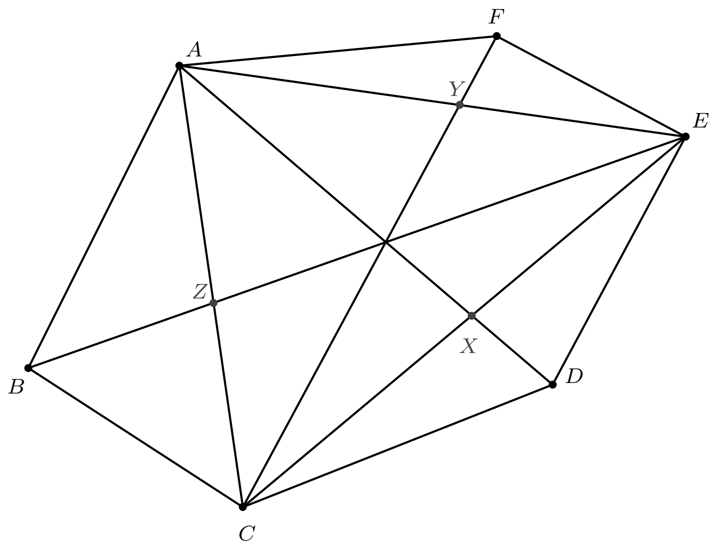
Multiplicando (I), (II) e (III) temos que

$$\frac{AN}{MA} \cdot \frac{BL}{NB} \cdot \frac{CM}{LC} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} = 1,$$

ou seja, as alturas são concorrentes.

4. Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo tal que cada uma das diagonais AD, BE e CF dividem o hexágono em duas regiões de áreas iguais. Prove que AD, BE e CF são concorrentes.

Solução.



Sejam X a intersecção de AD e CE, Y a intersecção de AE e CF e Z é a intersecção de AC e BE. Denotaremos por $[MNP]$ a área do triângulo ΔMNP, e seja K a área do hexágono $ABCDEF$. É fácil ver que

$$\frac{CX}{XE} = \frac{[ACX]}{[AXE]} = \frac{[CDX]}{[DEX]} = \frac{[ACX] + [CDX]}{[AXE] + [DEX]} = \frac{[ACD]}{[ADE]} = \frac{\frac{K}{2} - [ABC]}{\frac{K}{2} - [AEF]}.$$

De maneira análoga,

$$\frac{EY}{YA} = \frac{\frac{K}{2} - [CDE]}{\frac{K}{2} - [ABC]}$$

e

$$\frac{AZ}{ZC} = \frac{\frac{K}{2} - [AFE]}{\frac{K}{2} - [CDE]}.$$

Portanto,

$$\frac{CX}{XE} \cdot \frac{EY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZC} = \frac{\frac{K}{2} - [ABC]}{\frac{K}{2} - [AEF]} \cdot \frac{\frac{K}{2} - [CDE]}{\frac{K}{2} - [ABC]} \cdot \frac{\frac{K}{2} - [AFE]}{\frac{K}{2} - [CDE]} = 1.$$

Pela recíproca do teorema de Ceva no triângulo ΔACE temos que AX, CY e EZ são concorrentes e, com isso, AD, BE e CF são concorrentes.

5. Seja ΔABC um triângulo e sejam P e Q pontos sobre os lados AB e AC, respectivamente, tais que $PQ \parallel BC$. Prove que PC, QB e a mediana AM, com M em BC, são concorrentes.

Solução.

Como $PQ \parallel BC$, então

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \Leftrightarrow \frac{AP}{PB} \cdot \frac{QC}{AQ} = 1 \text{ (I)}.$$

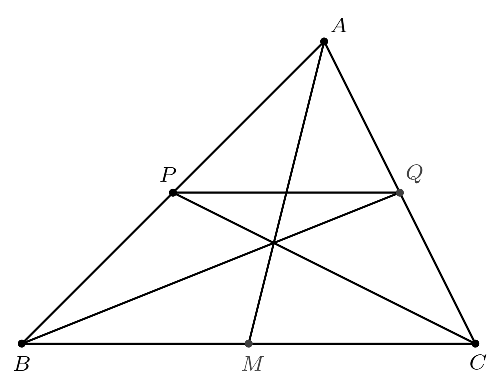
Como AM é um mediana então $BM = MC$, assim

$$\frac{BM}{MC} = 1 \text{ (II)}.$$

Multiplicando (I) e (II), temos

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{QC}{AQ} \cdot \frac{BM}{MC} = 1.$$

Pela recíproca do teorema de Ceva temos que AM, QB e PC são concorrentes.



Exercícios propostos

1. Sejam D, E e F os pontos de contato da circunferência inscrita com os lados BC, CA e AB, respectivamente, do triângulo ABC. Prove que AD, BE e CF são concorrentes em um ponto que se chama **Ponto de Gergonne**.

2. Sejam l e l_1 duas retas paralelas dadas no plano. Usando apenas régua encontre o ponto médio do segmento AB que está na reta l.

3. (Coréia) Seja ABC um triângulo com $AB \neq AC$, seja V a intersecção da bissetriz do ângulo $\angle A$ com BC e seja D pé da altura relativa ao vértice A. Se E e F são as intersecções dos círculos circunscritos aos triângulos ΔAVD com CA e AB, respectivamente, mostre que AD, BE e CF são concorrentes.

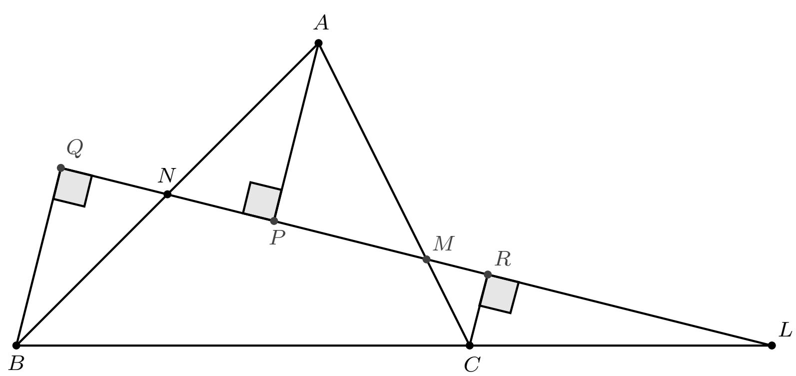
4. Seja P um ponto no interior de um triângulo. As bissetrizes de $\angle BPC$, $\angle CPA$ e $\angle APB$ intersectam BC, CA e AB em X, Y e Z, respectivamente. Prove que AX, BY e CZ são concorrentes.

Teorema 2. Se uma reta intersecta as retas BC, CA e AB de um triângulo ABC nos pontos L, M e N, respectivamente, então

$$\frac{CL}{BL} \cdot \frac{BN}{NA} \cdot \frac{AM}{MC} = 1.$$

Inversamente, se L, M e N são pontos sobre os lados BC, CA e AB do triângulo ABC tais que $\frac{CL}{BL} \cdot \frac{BN}{NA} \cdot \frac{AM}{MC} = 1$, então L, M e N são colineares.

Demonstração. $\Rightarrow$



Sejam AP, BQ e CR as perpendiculares traçadas a partir de A, B e C, respectivamente, à reta em que se encontram L, M e N. É fácil ver que os triângulos retângulos APN e

BQN são semelhantes, assim como os triângulos retângulos QBL e RCL. Então

$$\frac{BN}{AN} = \frac{BQ}{AP} \text{ e } \frac{CL}{BL} = \frac{RC}{QB}.$$

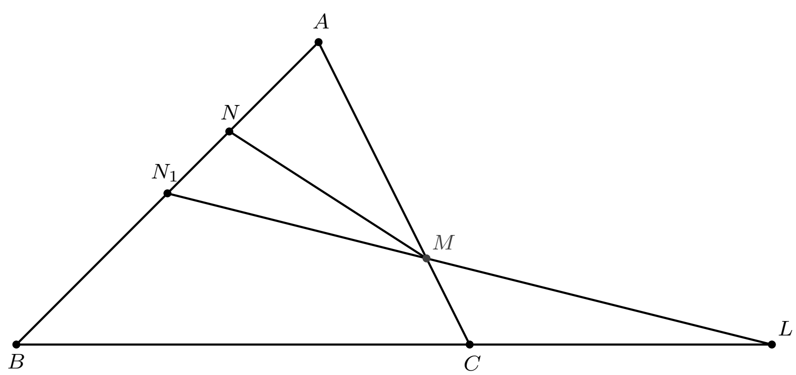
Por outro lado, os triângulos retângulos APM e CRM também são semelhantes. De modo que

$$\frac{AM}{CM} = \frac{AP}{CR}.$$

Portanto,

$$\frac{BN}{AN} \cdot \frac{CL}{BL} \cdot \frac{AM}{CM} = \frac{BQ}{AP} \cdot \frac{RC}{QB} \cdot \frac{AP}{CR} = 1.$$

$\Leftarrow$



Suponha, de maneira falsa, que $\dfrac{CL}{BL} \cdot \dfrac{BN}{NA} \cdot \dfrac{AM}{MC} = 1$ e os pontos L, M e N não são colineares. Prolongue LM até intersectar AB em N_1. Pelo que foi provado acima temos que $\dfrac{CL}{BL} \cdot \dfrac{BN_1}{N_1A} \cdot \dfrac{AM}{MC} = 1$, assim

$$\frac{BN_1}{N_1A} = \frac{BN}{NA} \Leftrightarrow N = N_1.$$

Dessa forma, L, M e N são colineares.

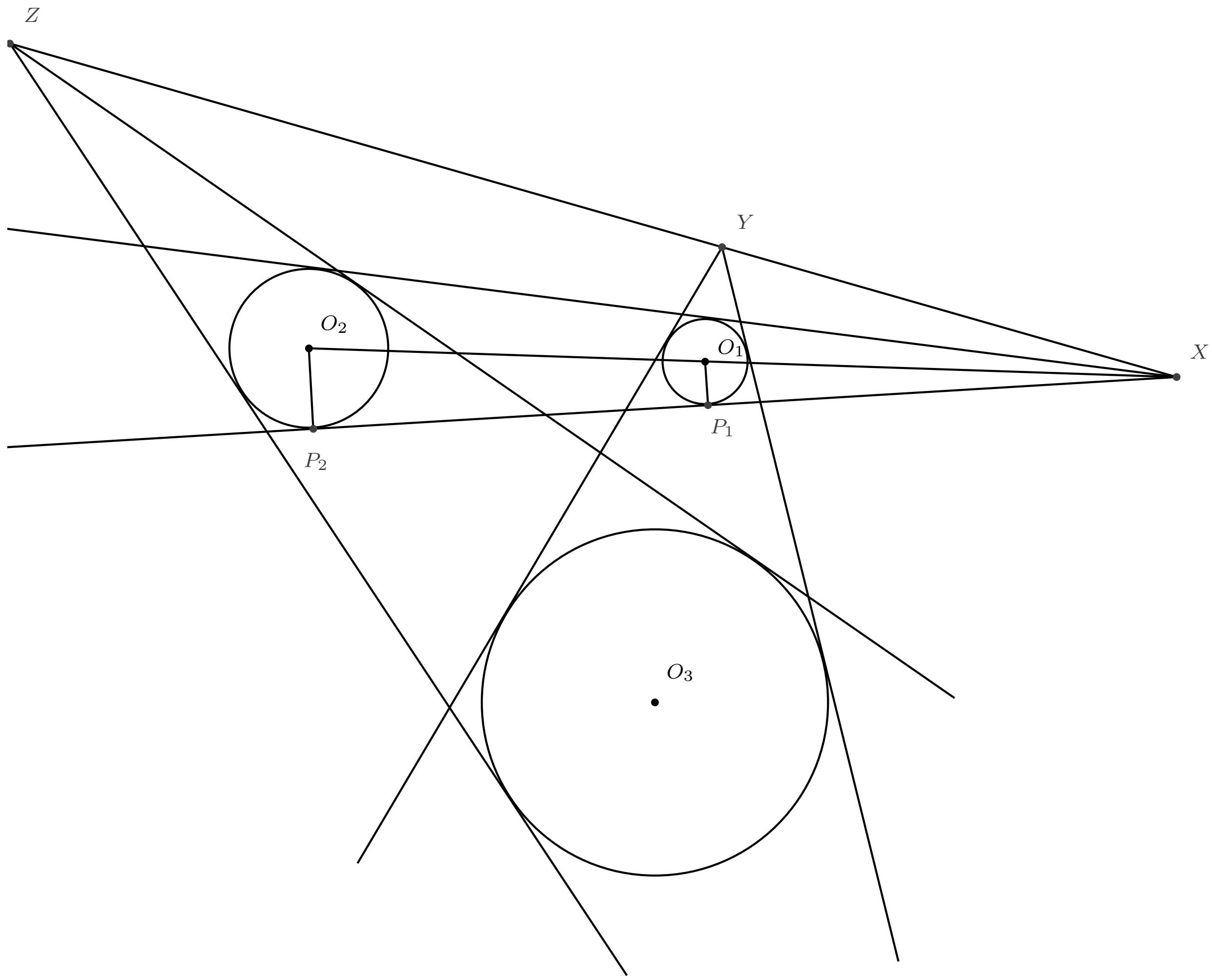
Exercícios resolvidos

1. Dadas três circunferências C_1, C_2 e C_3 de centros O_1, O_2 e O_3 e raios r_1, r_2 e r_3, respectivamente. Seja X a intersecção das tangentes comuns externas de C_1 e C_2, Y a intersecção das tangentes comuns externas de C_1 e C_3 e, finalmente, Z a intersecção das tangentes comuns externas de C_2 e C_3. Prove que X, Y e Z são colineares.

   Solução. É fácil verificar que X, O_1 e O_2 são colineares. Assim, $\Delta XO_1P_1 \sim \Delta XO_2P_2$ e, com isso, $\dfrac{O_1X}{O_2X} = \dfrac{O_1P_1}{O_2P_2} = \dfrac{r_1}{r_2}$. Analogamente, $\dfrac{O_3Y}{O_1Y} = \dfrac{r_3}{r_1}$ e $\dfrac{O_2Z}{O_3Z} = \dfrac{r_2}{r_3}$. Portanto,

$$\frac{O_1X}{O_2X} \cdot \frac{O_3Y}{O_1Y} \cdot \frac{O_2Z}{O_3Z} = 1.$$

Pela recíproca do teorema de Menelaus concluímos que X, Y e Z são colineares. Este resultado é conhecido como teorema de Monge.



2. Prove que as bissetrizes internas de dois ângulos de um triângulo isósceles e a bissetriz externa do terceiro ângulo do triângulo intersectam os lados opostos em três pontos colineares.

Solução.

No triângulo ABC, BM e CN são bissetrizes internas dos ângulos $\angle B$ e $\angle C$, respectivamente, e AL é a bissetriz externa do ângulo $\angle A$. Pelo teorema da bissetriz interna temos que

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC} \text{ e } \frac{BN}{NA} = \frac{BC}{AC}.$$

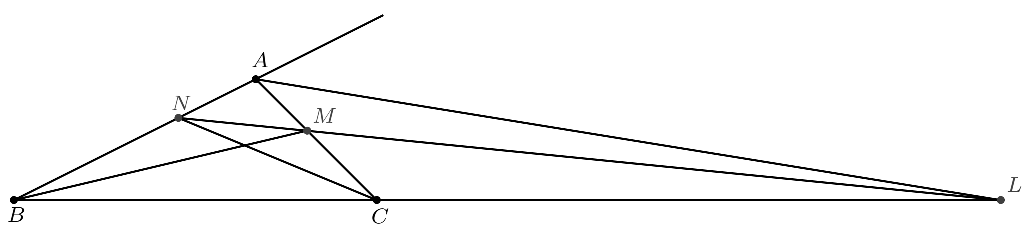
Além disso, pelo teorema da bissetriz externa temos que

$$\frac{CL}{BL} = \frac{AC}{AB}.$$

Assim,

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NA} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1.$$

Pela recíproca do teorema de Menelaus temos que N, M e L são colineares.



Exercícios propostos

1. Prove que as bissetrizes externas dos ângulos de um triângulo, não isósceles, intersectam os lados opostos em três pontos colineares.

2. O ortocentro de um triângulo ABC é o ponto médio da altura relativa ao vértice C. Prove que $\cos \angle C = \cos \angle A \cdot \cos \angle B$, em que $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ são os ângulos do triângulo ABC.

3. A bissetriz AD de um triângulo ABC divide o lado BC na razão $2 : 1$. Determine a razão em que a mediana CE divide a bissetriz.

4. (OBM) No triângulo ABC, D é ponto médio de AB e E ponto sobre o lado BC tal que $BE = 2 \cdot EC$. Sabendo que $\angle ADC = \angle BAE$, calcule o valor de $\angle BAC$.

5. (IMO) As diagonais AC e CE de um hexágono regular $ABCDEF$ são divididas internamente pelos pontos M e N, respectivamente, na razão $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{CN}{CE} = r$. Determine r se B, M e N são colineares.

6. Seja ABC um triângulo e sejam E e D pontos sobre o lado BC tal que $CE = ED = DB$. Seja F o ponto médio de AC e G o ponto médio de AB. Seja H a intersecção de EG e FD. Determine o valor de $\dfrac{EH}{HG}$.

7. (Cone Sul) Seja C uma circunferência de centro O, AB um diâmetro dela e R um ponto qualquer em C distinto de A e de B. Seja P a intersecção da perpendicular traçada por O a AR. Sobre a reta OP se marca o ponto Q, de maneira que QP é a metade de PO e Q não pertence ao segmento OP. Por Q traçamos a paralela a AB que corta a reta AR em T. Chamamos de H o ponto de intersecção das retas AQ e OT. Provar que H, R e B são colineares.

Bibliografia

1. Leccture Notes on Mathematical Olympiad Courses
For senior Section, vol. 1
Xu Jiagu

2. Advanced Euclidean Geometry
Alfred Posamentier

3. III Olimpiada Nacional Escolar de Matemática 2006
Jorge Tipe, John Cuya, Claudio Espinoza e Sergio Vera.

4. Explorations in Geometry
Bruce Shawyer

5. Coleção Elementos de Matemática, vol.2
Marcelo Rufino de Oliveira

6. The theorem of Menelaus
B. Orach
Quantum - May/Jun 2001

7. Problemas de Geometría - Planimetria
I. Shariguin