Polos Olímpicos de Treinamento

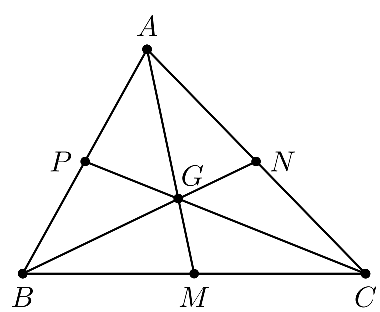
Curso de Geometria - Nível 2

Prof. Cícero Thiago

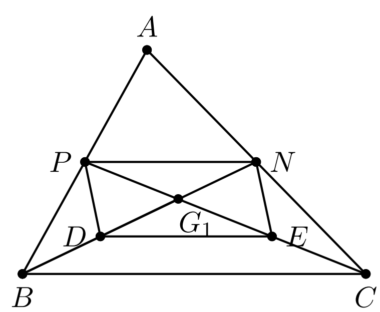
Aula 15

Pontos Notáveis 1: Baricentro

Propriedade 1. As três medianas de um triângulo intersectam - se num mesmo ponto, chamado **baricentro**, que divide cada uma das medianas em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra.



Demonstração.



Sejam N e P os pontos médios dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, D e E os pontos médios de BG_1 e CG_1, respectivamente. Então,

$$NP \parallel BC \text{ e } NP = \frac{BC}{2}$$

e

$$DE \parallel BC \text{ e } DE = \frac{BC}{2}$$

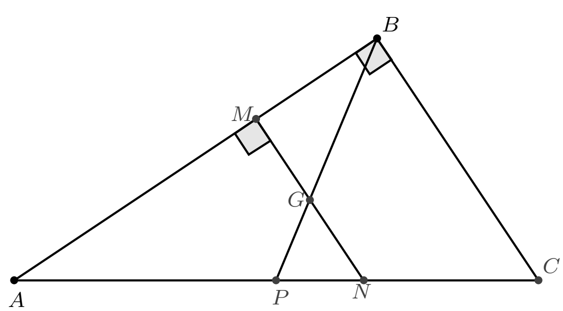
portanto, $PDEN$ é uma paralelogramo. Com isso, $BD = DG_1 = G_1N$, $CE = EG_1 = G_1P$, então $BG_1 = 2G_1N$ e $CG_1 = 2G_1P$. De maneira análoga, as medianas AM e BN intersectam - se em um ponto G_2 tal que $AG_2 = 2G_2M$ e $BG_2 = 2G_2N$. Encontramos, então, dois pontos distintos G_1 e G_2, no interior do segmento BN que o dividem na mesma razão, o que é uma contradição logo, $G_1 = G_2 = G$. Portanto, as três medianas intersectam - se em um mesmo ponto G que chamaremos de baricentro.

Exercícios Resolvidos

1. (OBM) Seja N o ponto do lado AC do triângulo ABC tal que $AN = 2NC$ e M o ponto do lado AB tal que MN é perpendicular a AB . Sabendo que $AC = 12$ cm e que o baricentro G do triângulo ABC pertence ao segmento MN, determine o comprimento do segmento BG.
OBS: Baricentro é o ponto de interseção das medianas do triângulo.

Solução.

Se BP é uma mediana do triângulo então $AP = CP = 6$ e $PN = 2$. Como G é o baricentro do triângulo então $\dfrac{PG}{GB} = \dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{PN}{NC} = \dfrac{1}{2}$, assim, pela recíproca do teorema de Tales, GN é paralelo a BC e $\angle B = 90°$. Como o triângulo ABC é retângulo então $AP = CP = BP = 6$. Com isso, $BG = 4$ e $GP = 2$.



2. (Bulgária) Seja ΔABC um triângulo isósceles ($AC = BC$) tal que A_1, B_1 e C_1 são os pontos médios de BC, AC e AB, respectivamente. Os pontos A_2 e B_2 são os simétricos de A_1 e B_1 com relação ao lado AB. Seja M a interseção de CA_2 e A_1C_1 e seja N a interseção de CB_2 e B_1C_1. Seja P a interseção de AN e BM, prove que $AP = BP$.

Solução. Como $CC_1 \parallel A_1A_2$ e $CC_1 = A_1A_2$, temos que $CC_1A_2A_1$ é um paralelogramo. Então, $A_1M = C_1M$. Mas $A_1B_1C_1B$ é também um paralelogramo e, portanto, a interseção BM e AC é B_1. Então, P está sobre a mediana BB_1. Analogamente, P está sobre a mediana AA_1. No triângulo isósceles ABC as medianas AA_1 e BB_1 possuem o mesmo comprimento. Portanto, $AP = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3}BB_1 = BP$.

Exercícios Propostos

Problema 1. Uma reta r passa pelo baricentro de um triângulo ABC deixando o vértice A em um semiplano e os vértices B e C no outro semiplano determinado por r. As projeções de A, B e C sobre a reta r são M, N e P, respectivamente. Prove que $AM = BN + CP$.

Problema 2. (OBM) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, onde N é o ponto médio de DC, M é o ponto médio de BC, e O é a interseção entre as diagonais AC e BD. Mostre que O é o baricentro do triângulo AMN se, e somente se, $ABCD$ é um paralelogramo.

Problema 3. (Portugal) No triângulo ABC as medianas dos lados AB e AC são perpendiculares. Sabendo que $AB = 6$ e $AC = 8$, determine BC.

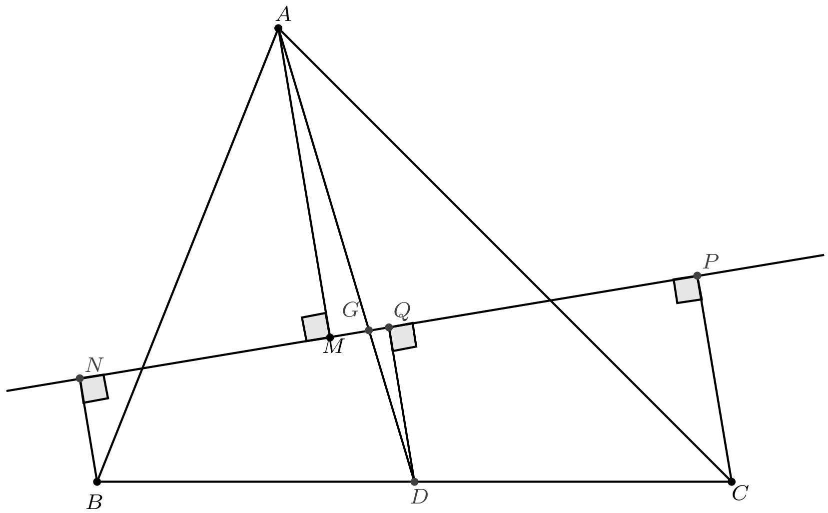
Problema 4. (Estônia) As medianas relativas aos vértices A e B do triângulo ABC são perpendiculares. Prove que AB é o menor lado do triângulo ABC.

Problema 5. (OCM) Seja ABC um triângulo tal que as medianas BM e CN, que se cortam em G, são iguais. Prove que o triângulo ABC é isósceles.

Problema 6. Prove que a soma dos quadrados das distâncias de um ponto P aos vértices de um triângulo ABC é mínima quando P é o baricentro do triângulo.

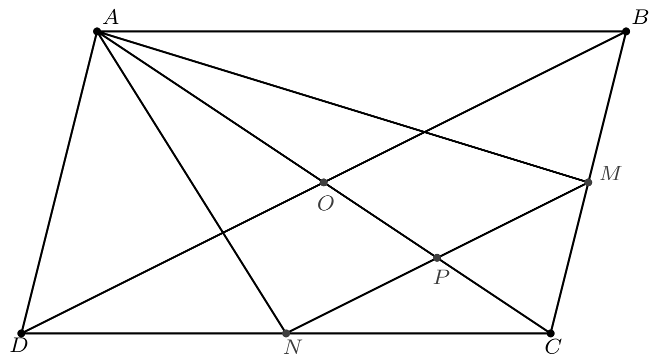
Soluções

1. Seja AD um mediana e Q o ponto médio de NP. Então, DQ é a base média do trapézio $NBCP$ assim $DQ \parallel BN$ e $DQ = \frac{BN + CP}{2}$. Como G é o baricentro do triângulo ABC então $AG = 2GD$. É fácil ver que $\Delta AMG \sim \Delta GQD$, então $\frac{AM}{2} = DQ$. Portanto, $AM = BN + CP$.



2. ($\Rightarrow$) Suponha que $ABCD$ é um paralelogramo, então $AO = OC$ e $BO = BD$. Se M e N são os pontos médios de BC e CD então $MN \parallel BD$ e $MN = \frac{BD}{2}$. É fácil concluir que P é o ponto de médio de OC então $MP \parallel BO$, $MP = \frac{BO}{2}$, $NP \parallel DO$ e $NP = \frac{DO}{2}$. Portanto, $NP = PM$ e $AO = 2OP$, ou seja, O é o baricentro de AMN.

($\Leftarrow$) Suponha que O é o baricentro do triângulo AMN então $NP = PM$ e $AO = 2OP$. Se M e N são os pontos médios de BC e CD então $MN \parallel BD$ e $MN = \frac{BD}{2}$. É fácil concluir que P é o ponto de médio de OC então $OP = PC$, $MP \parallel BO$, $MP = \frac{BO}{2}$, $NP \parallel DO$ e $NP = \frac{DO}{2}$. Daí, $AO = OC$ e $DO = OB$, ou seja, $ABCD$ é um paralelogramo.



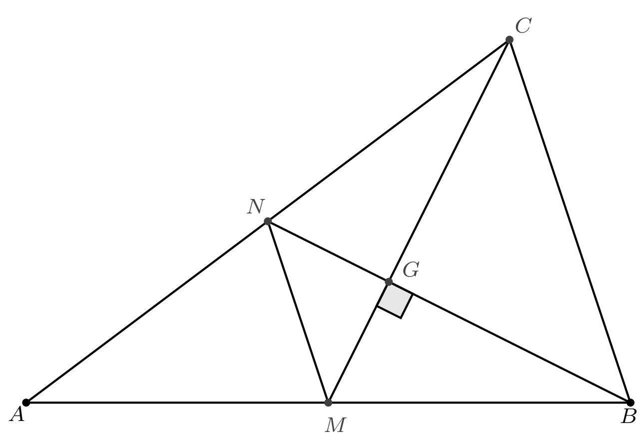
3. Sejam M e N os pontos médios de AB e AC, respectivamente, e G o ponto de encontro das medianas MC e NB. Aplicando o teorema de Pitágoras BGM e CNG, temos:

$$GM^2 + 4GN^2 = GM^2 + GB^2 = BM^2 = 3^2 = 9$$

e

$$4GM^2 + GN^2 = GC^2 + GN^2 = CN^2 = 4^2 = 16.$$

Deste modo, $5GM^2 + 5GN^2 = 9 + 16 = 25$, logo $NM = \sqrt{5}$. Portanto, $BC = 2\sqrt{5}$.

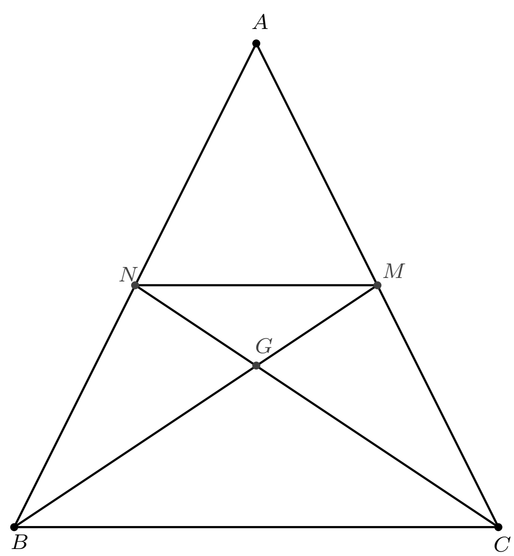


4. Seja M o baricentro do triângulo $A_1B_1C_1$. Seja A_2 um ponto sobre a reta MA tal que $B_1A_1C_1A_2$ é um paralelogramo. Os pontos B_2 e C_2 são construídos analogamente. Como $A_1C_1 \parallel A_1B_1 \parallel C_1B_2$ então os pontos A_2, C_1 e B_2 são colineares e C_1 é o ponto médio de

A_2B_2. O mesmo é verdade para os pontos A_2, B_1 e C_2 e C_2, A_1 e B_2. Vamos mostrar que $A_2 = A$, $B_2 = B$ e $C_2 = C$, o que resolve o problema. Assuma que $A_2 \neq A$ e A está entre A_2 e M. Então C_2 está entre C e M, B está entre B_2 e M e consequentemente A_2 está entre A e M, que é uma contradição.

5. As medianas intersectam - se no ponto M e a mediana que parte do vértice C intersecta AB no ponto F. Então, F é o ponto médio da hipotenusa do triângulo retângulo ABM, ou seja, $AB = 2FM$. Como M divide a mediana CF na razão $2:1$, então $AB = CM$. O maior ângulo do triângulo AMC é o ângulo obtuso AMC, portanto AC é o maior lado deste triângulo. Assim, $AC > MC = AB$. De maneira análoga $BC > AB$.

6. Seja $BM = CN = m$. Como G é o baricentro de ABC, temos $GM = \dfrac{m}{3} = GN$ e $BG = \dfrac{2m}{3} = CG$. Daí, segue que os triângulos BGN e CGM são congruentes (pelo caso LAL), de modo que $BN = CM$. Logo, $AB = 2 \cdot BN = 2 \cdot CM = AC$, e o triângulo ABC é isósceles.



7. Seja ABC um triângulo com $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$. Seja M o ponto médio de BC, G o baricentro do triângulo ABC e P um ponto qualquer. Usando que, a soma dos quadrados de dois dos lados de um triângulo é igual a duas vezes o quadrado da mediana relativa ao terceiro lado mais a metade do quadrado do terceiro lado (a demonstração desse resultado usa lei dos Cossenos e será provado na aula de relações métricas), no triângulo

PBC com mediana PM temos:

$$PB^2 + PC^2 = 2PM^2 + \frac{a^2}{2}. \text{ (I)}$$

O baricentro G é tal que $GA = 2GM$. Faça $GM = m$; $GA = 2m$ e tome H em AG tal que $GH = AH = m$. Assim, o triângulo HPM, com mediana PG satisfaz

$$PH^2 + PM^2 = 2PG^2 + \frac{1}{2}(2m)^2 = 2PG^2 + 2m^2 \text{ (II)}$$

e o triângulo APG com mediana PH satisfaz

$$PA^2 + PG^2 = 2PH^2 + \frac{1}{2}(2m)^2 = 2PH^2 + 2m^2. \text{ (III)}$$

Somando (I) e (III)

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PG^2 = 2PM^2 + \frac{a^2}{2} + 2PH^2 + 2m^2 =$$

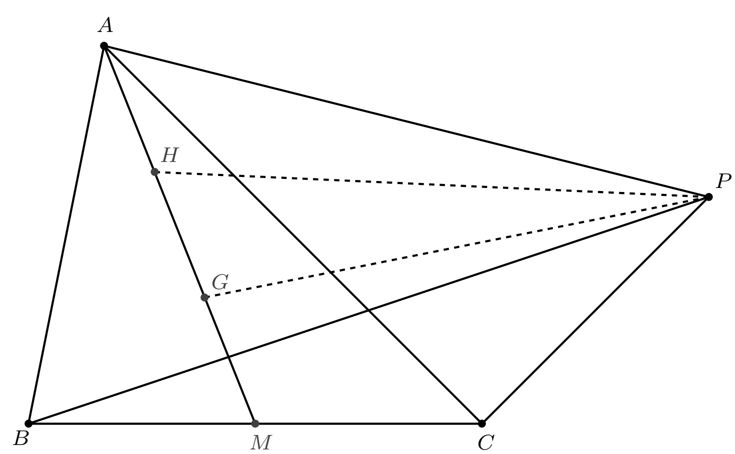
$$= 2(PM^2 + PH^2) + \frac{a^2}{2} + 2m^2 = \text{ por (II)}$$

$$2(2PG^2 + 2m^2) + \frac{a^2}{2} + 2m^2 =$$

$$4PG^2 + 6m^2 + \frac{a^2}{2}.$$

Portanto, $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PG^2 + 6m^2 + \dfrac{a^2}{2}$. (IV)

Como o triângulo a e m são constantes, $PA^2 + PB^2 + PC^2$ é mínimo quando $PG = 0$, ou seja, $P = G$ é o baricentro do triângulo ABC.



Bibliografia

1. Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses
For Junior Section, vol. 1
Xu Jiagu

2. Puntos Notables - Teoría - Demostraciones - Trazos Auxiliares
440 problemas resueltos e propuestos
Julio Orihuela Bastidas
Editorial Cuzcan

3. Geometría
Radmila Bulajich Manfrino e José Antonio Gómez Ortega
Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas

4. Tópicos de Matemática Elementar, vol. 2
Geometria Euclidiana Plana
Antonio Caminha Muniz Neto
SBM

5. Episodes in Nineteenth and Twentieth Euclidean Geometry
Ross Honsberger
MAA

6. Problems in Plane and Solid Geometry, vol. 1 - Plane Geometry
Viktor Prasolov

7. Advanced Euclidean Geometry
Alfred Posamentier

8. Lessons in Geometry
I. Plane Geometry
Jacques Hadamard
AMS

9. Hadamard's Plane Geometry
A Reader's Companion
Mark Saul
AMS

10. Coleção Elementos da Matemática
Geometria Plana, vol. 2
Marcelo Rufino de Oliveira e Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

11. Olimpíadas Cearenses de Matemática, Ensino Médio, 1981 - 2005
Emanuel Carneiro, Francisco Antônio M. de Paiva e Onofre Campos

12. Problemas de las Olimpiadas Matematicas del Cono Sur (I a IV)
Fauring - Wagner - Wykowski - Gutierrez - Pedraza - Moreira
Red Olímpica

13. Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 9 - Geometria Plana
Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo

14. Olimpiada Matemática Española
15000 problemas de diferentes Olimpiadas de Matemática en el mundo