Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 2

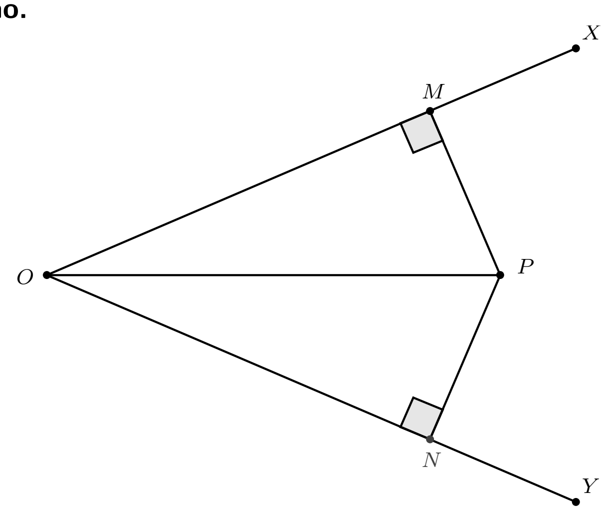
Prof. Cícero Thiago

Aula 16

Pontos Notáveis 2: Incentro

Teorema 1. Seja $\angle XOY$ um ângulo dado e P um ponto em seu interior. Então, a distância de P a XO é igual à distância de P a YO se, e somente se, o ponto P pertence à bissetriz.

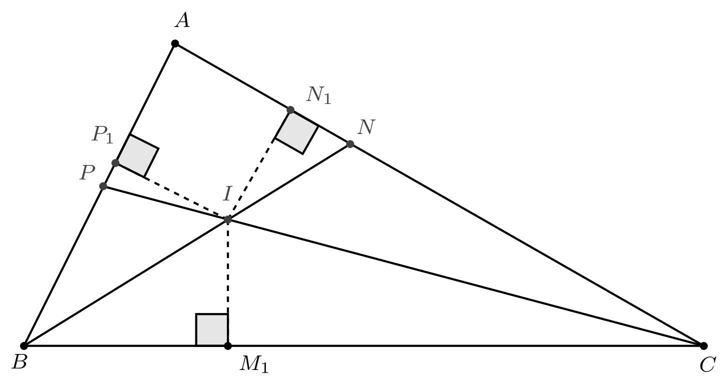
Demonstração.



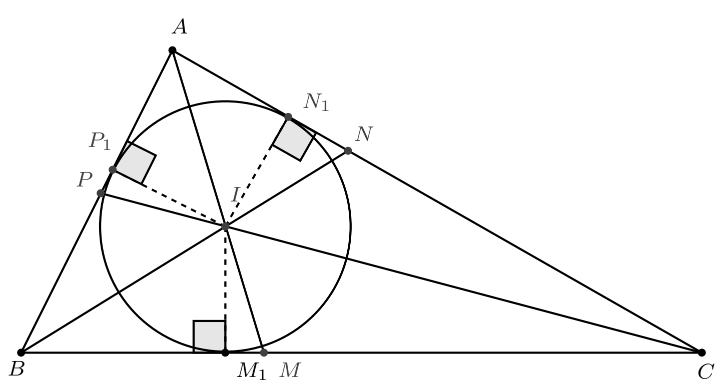
Suponhamos inicialmente que o ponto P pertence à bissetriz. Então $\angle XOP = \angle YOP$. Sejam M e N os pés das perpendiculares baixadas desde P sobre OX e OY, respectivamente. Podemos concluir, que $\Delta MOP \equiv \Delta NOP$, pelo caso **L.A.A.**, pois OP é lado comum, $\angle MOP = \angle NOP$ e $\angle OMP = \angle ONP = 90^\circ$. Portanto, $PM = PN$.

Reciprocamente, suponhamos agora que $PM = PN$. Pelo caso especial de congruência de triângulos, cateto-hipotenusa, os triângulos MOP e NOP são congruentes. Portanto, $\angle MOP = \angle NOP$, e assim, P pertence à bissetriz.

Provemos agora que as três bissetrizes de um triângulo ABC se intersectam num ponto chamado incentro, que é equidistante dos lados do triângulo.

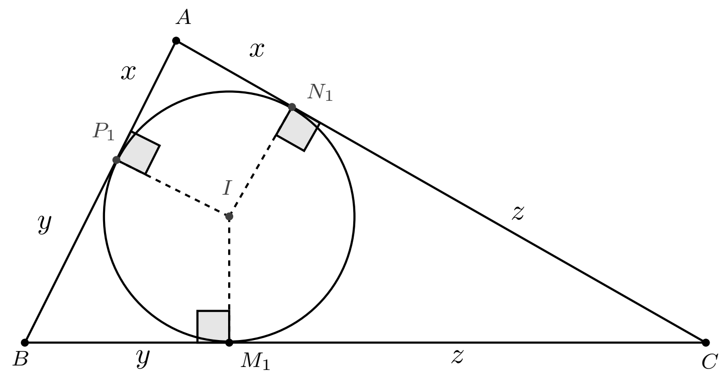


Sejam BN e CP as bissetrizes relativas aos vértices B e C, respectivamente, e I o seu ponto de interseção. Como o ponto I pertence às bissetrizes BN e CP, então $IM_1 = IP_1$ e $IM_1 = IN_1$, em que M_1, N_1, P_1 são os pés das perpendiculares baixadas desde I sobre os lados BC, CA e AB, respectivamente. Como $IP_1 = IN_1$, então, pela proposição anterior, I pertence à bissetriz do ângulo $\angle A$. Portanto, as três bissetrizes passam por um mesmo ponto chamado incentro que será o centro da circunferência inscrita no triângulo pois I equidista dos lados do triângulo. Além disso, M_1, N_1 e P_1 são os pontos de tangência do círculo com os lados BC, CA e AB, respectivamente.



Teorema 2. Seja ABC um triângulo tal que $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$. Sejam M_1, N_1 e P_1 os pontos de tangência com os lados BC, CA e AB, respectivamente. Então, $AN_1 = AP_1 = p - a$, $BM_1 = BP_1 = p - b$ e $CM_1 = CN_1 = p - c$, em que $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Demonstração.



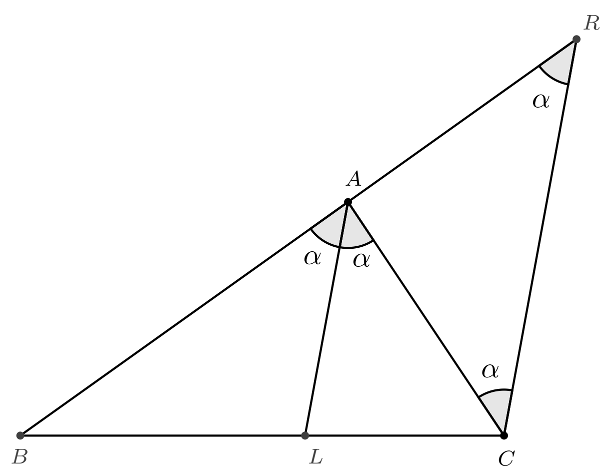
Temos que $y + z = a$, $x + z = b$ e $x + y = c$. Resolvendo o sistema encontramos $x = p - a$, $y = p - b$ e $z = p - c$.

Teorema 3. (Bissetriz interna) A bissetriz interna AL do ângulo $\angle A$ de um triângulo ABC divide internamente o lado oposto BC na razão $\dfrac{AB}{CA}$, ou seja,

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{CA}$$

em que L é o ponto de intersecção da bissetriz interna com o lado BC.

Demonstração.



Seja R a intersecção da paralela à bissetriz AL traçada pelo ponto C. É fácil ver que $\angle BAL = \angle CAL = \angle ACR = \angle ARC$, com isso, $AR = AC$. Pelo teorema de Tales temos que

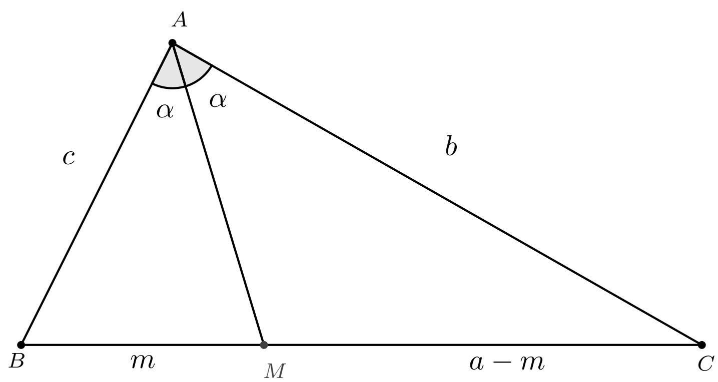
$$\frac{AB}{AR} = \frac{BL}{LC}.$$

Como $AR = AC$, então

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}.$$

Teorema 4. Seja ABC um triângulo tal que $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ e seja AM a bissetriz relativa ao ângulo $\angle A$, com M em BC. Então, $BM = \dfrac{a \cdot c}{b + c}$.

Demonstração.



Usando o teorema da bissetriz interna temos que

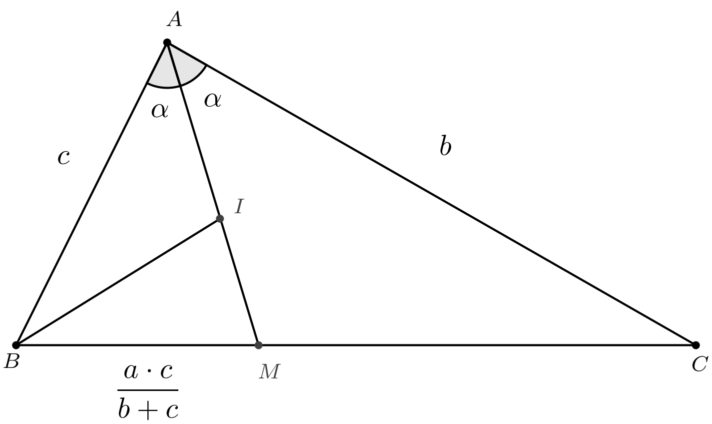
$$\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CM} \Leftrightarrow \frac{c}{m} = \frac{b}{a - m} \Leftrightarrow m = \frac{a \cdot c}{b + c}.$$

Teorema 5. Seja ABC um triângulo tal que $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, AM a bissetriz relativa ao ângulo $\angle A$, com M em BC, e seja I o incentro. Então, $\dfrac{AI}{IM} = \dfrac{b + c}{a}$.

Demonstração.

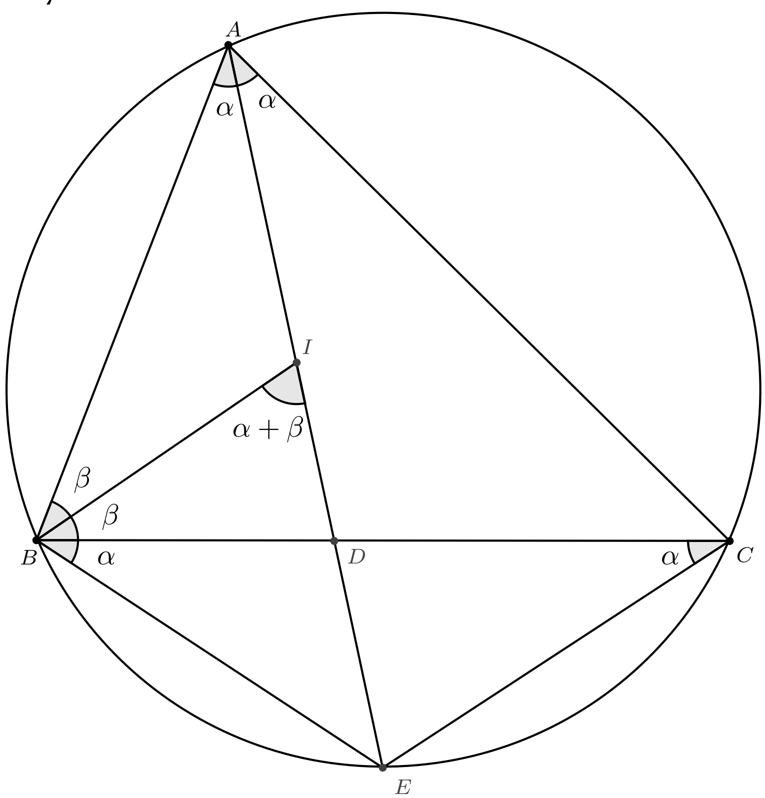
Aplicando o teorema da bissetriz interna no triângulo BAM temos que

$$\frac{AI}{IM} = \frac{AB}{BM} \Leftrightarrow \frac{AI}{IM} = \frac{b + c}{a}.$$



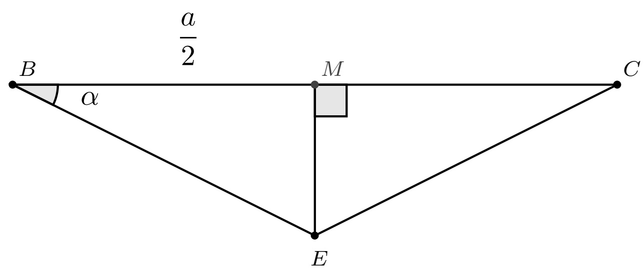
Teorema 6. Seja ABC um triângulo e I seu incentro. Seja E o ponto de interseção de AI com a circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Então $IE = IB = IC$.

Demonstração.



É fácil ver que $\angle BAE = \angle CAE = \angle CBE = \angle BCE$ e, portanto, $BE = CE$. Além disso, pela propriedade do ângulo externo, $\angle BIE = \alpha + \beta$. Portanto, $\angle BIE = \angle IBE$ e $BE = IE$.

Observe agora uma parte da figura acima.

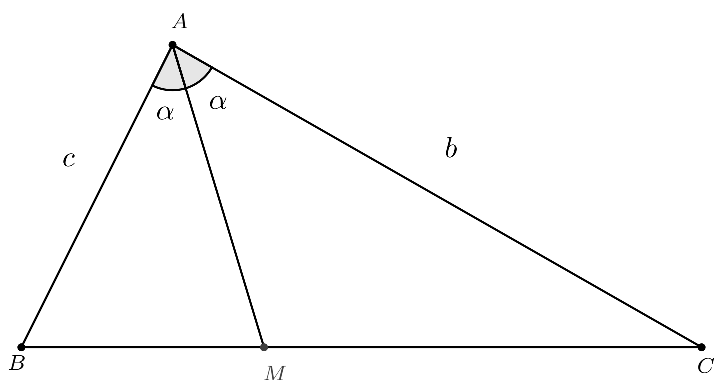


Temos que

$$\cos \alpha = \frac{BM}{BE} \Leftrightarrow BE = \frac{a}{2\cos \alpha} = CE = IE.$$

Teorema 7. Seja ABC um triângulo tal que $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ e seja AM a bissetriz relativa ao ângulo $\angle A$, com M em BC. Além disso, $\angle BAM = CAM = \alpha$. Então $AM = \dfrac{2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha}{b + c}$.

Demonstração.



É fácil ver que $[ABC] = [BAM] + [CAM]$. Então,

$$\frac{b \cdot c \cdot \sin 2\alpha}{2} = \frac{c \cdot AM \cdot \sin \alpha}{2} + \frac{b \cdot AM \cdot \sin \alpha}{2} \Leftrightarrow$$

$$AM = \frac{2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha}{b + c}.$$

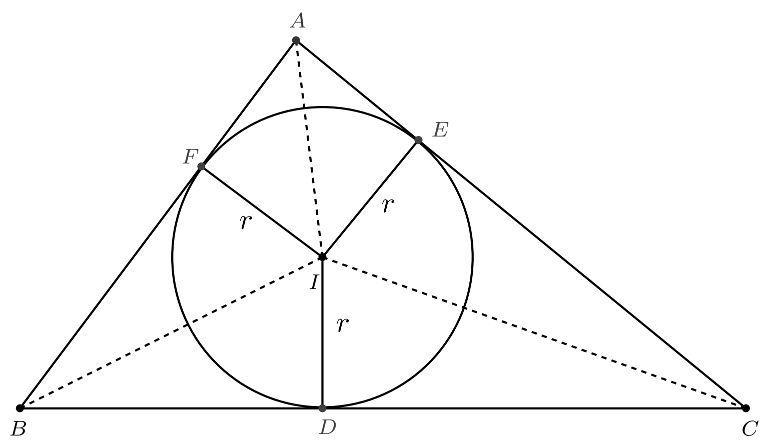
Teorema 8. (Área de um triângulo em função do raio da circunferência inscrita.)

Sejam a, b e c as medidas dos lados BC, CA e AB do triângulo ΔABC, respectivamente, e seja r a medida do raio da circunferência inscrita. Então, a área do triângulo ΔABC pode ser calculada por

$$[\Delta ABC] = p \cdot r,$$

em que $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

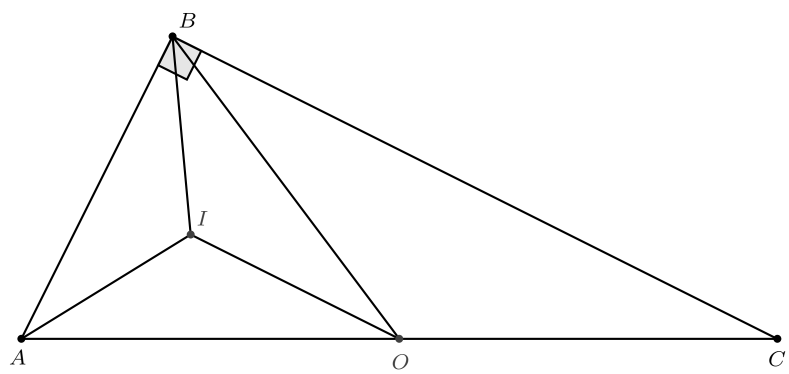
Demonstração.



$$[\Delta ABC] = [\Delta BIC] + [\Delta CIA] + [\Delta AIB] \Leftrightarrow$$
$$[\Delta ABC] = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} \Leftrightarrow$$
$$[\Delta ABC] = \left(\frac{a+b+c}{2}\right) \cdot r \Leftrightarrow$$
$$[\Delta ABC] = p \cdot r.$$

Problema 1. (OBM) O triângulo ABC é retângulo em B. Sejam I o centro da circunferência inscrita em ABC e O o ponto médio do lado AC. Se $\angle AOI = 45^\circ$, quanto mede, em graus, o ângulo $\angle ACB$?

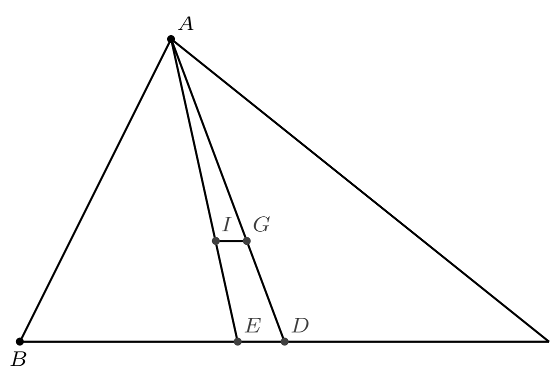
Solução.
Como ABC é um triângulo retângulo, então $AO = BO = CO$. Se $\angle ABI = \angle AOI = 45^\circ$ e $\angle BAI = \angle OAI$, então $\Delta ABI \equiv \Delta AOI$ (ALA). Com isso, $AB = AO = BO$ e, portanto, triângulo ABO é equilátero. Assim, $\angle ACB = 30^\circ$.



Problema 2. Em um triângulo não equilátero, a reta que passa pelo baricentro e pelo incentro é paralela a um dos lados do triângulo. Demonstre que os lados do triângulo estão em progressão aritmética.

Solução.
Como IG é paralelo a BC então podemos aplicar o teorema de Tales. Assim,

$$\frac{AI}{IE} = \frac{AG}{GD} \Leftrightarrow \frac{b+c}{a} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow b + c = 2a.$$



Exercícios propostos

1.

2. (IMO Shortlist) Seja ABC um triângulo tal que $AB + BC = 3AC$. Sejam I o seu incentro e D e E os pontos de tangência da circunferência inscrita com os lados AB e BC, respectivamente. Além disso, sejam K e L os simétricos de D e E com relação ao incentro I. Prove que o quadrilátero $ACKL$ é inscritível.

3. (Teste de seleção do Brasil para IMO) Seja I o incentro do triângulo ABC e D o ponto de interseção de AI com o círculo circunscrito de ABC. Sejam E e F os pés das perpendiculares baixadas a partir de I sobre BD e CD, respectivamente. SE $IE + IF = \dfrac{AD}{2}$, determine o ângulo BAC.

4. (IMO) O prolongamento da bissetriz AL do triângulo acutângulo ABC encontra o círculo circunscrito em N. Por L traçam - se perpendiculares LK e LM aos lados AB e AC, respectivamente. Prove que a área do triângulo ABC é igual à área do quadrilátero $AKNM$.

5. Num triângulo ABC tem - se $AB = BC$, e D é um ponto sobre a base AC tal que o raio do círculo inscrito no triângulo ABD é igual ao raio do círculo tangente ao segmento DC e aos prolongamentos das retas BD e BC. Prove que o raio deste círculo é igual a $\dfrac{1}{4}$ da medida h de uma das alturas iguais do triângulo ABC.

6. Seja um quadrilátero $ABCD$ inscrito num círculo de tal forma que os prolongamentos dos lados AD e BC se encontram em Q e os prolongamentos de AB e CD, em P. Prove que as bissetrizes dos ângulos $\angle DQC = \angle APD$ são perpendiculares.

7. Do incentro de um triângulo retângulo, avista - se a metade da hipotenusa, isto é, o segmento que une um vértice ao ponto médio da hipotenusa, segundo um ângulo reto. Se $\dfrac{m}{n}$ é a fração irredutível que expressa a razão entre as medidas dos catetos deste triângulo, então $m + n$ é igual a:
   (a) 7 (b) 17 (c) 23 (d) 31 (e) 41

8. O círculo, de centro O, inscrito no triângulo ABC é cortado pela mediana AD nos pontos X e Y. Sabendo que $AC = AB + AD$, determine a medida do ângulo $\angle XOY$.

9. (OCM) Seja ABC um triângulo cuja medida dos lados são números inteiros e consecutivos. Além disso, o maior ângulo $\angle A$ é o dobro do menor ângulo. Determine a medida dos lados deste triângulo.