Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 2

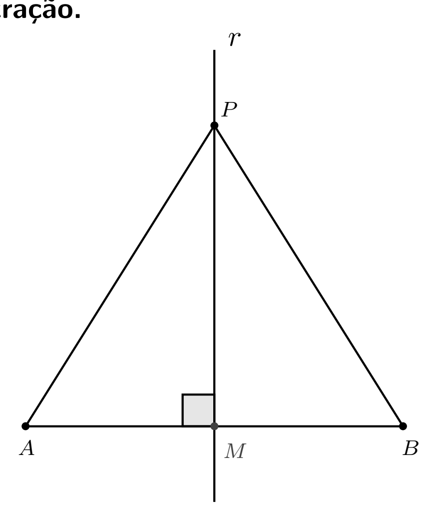
Prof. Cícero Thiago

Aula 17

Pontos Notáveis 3: Circuncentro e Ortocentro

Teorema 1. Sejam A, B e P três pontos distintos no plano. Temos que $PA = PB$ se, e somente se, o ponto P pertence à mediatriz do segmento AB.

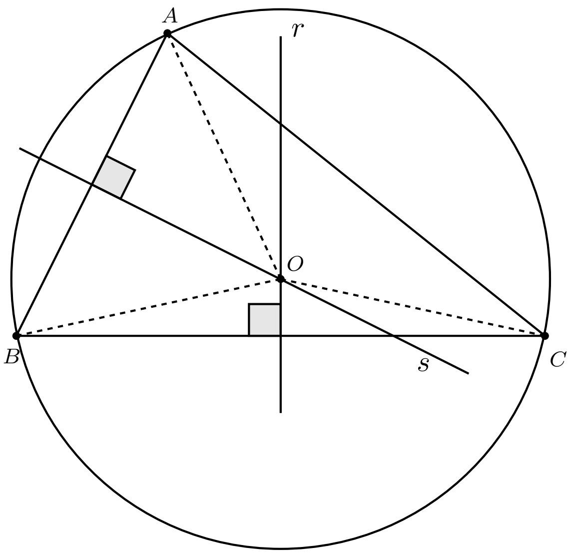
Demonstração.



Sejam M o ponto médio de AB e r a sua mediatriz. Suponha inicialmente que P pertence à mediatriz. Com isso $AM = MB$ e r é perpendicular à AB. É fácil ver que os triângulos ΔAMP e ΔBMP são congruentes pelo caso **L.A.L.** e, com isso, $PA = PB$.
Reciprocamente, suponha agora, que $PA = PB$, com isso ΔABP é isósceles de base AB. Tracemos a mediana relativa ao lado AB. É fácil ver que os triângulos ΔAMP e ΔBMP são congruentes pelo caso **L.L.L.** e, com isso, $\angle AMP \equiv \angle BMP = 90°$, ou seja, P está sobre a mediatriz.

Teorema 2. As três mediatrizes de um triângulo ABC se intersectam num ponto chamado circuncentro que é o centro da circunferência circunscrita.

Demonstração.

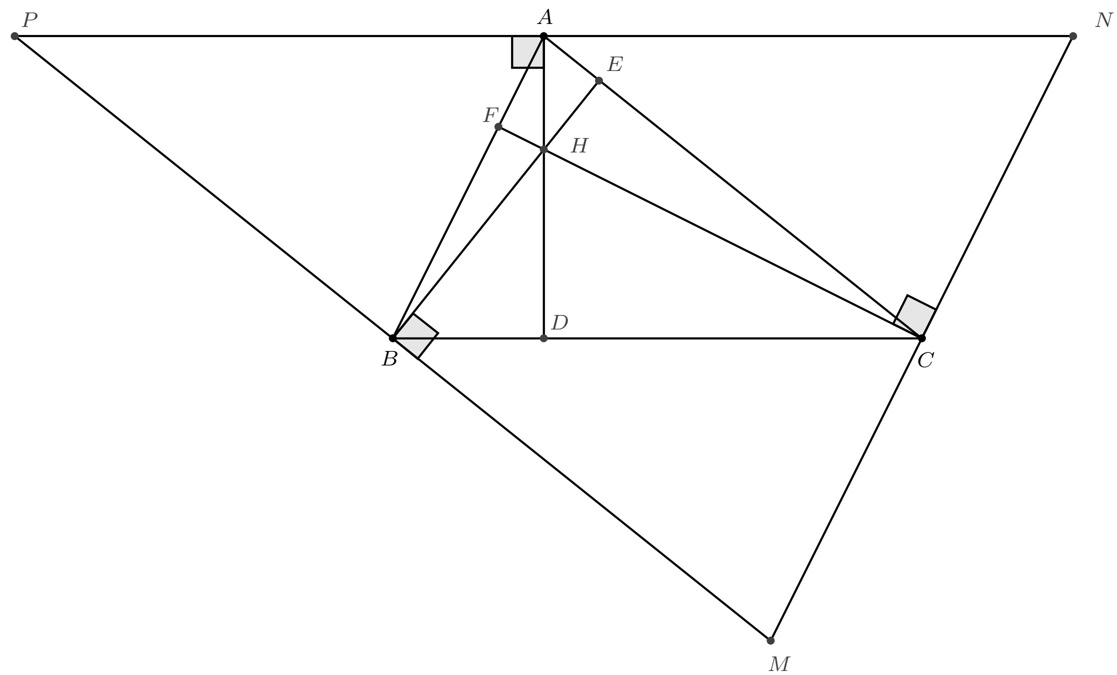


Sejam r e s as mediatrizes relativas aos lados BC e AB, respectivamente, e seja O o ponto de interseção das duas mediatrizes. Pelo teorema 1, temos que $BO = CO$ e $BO = AO$. Então, $CO = AO$ e, também pelo teorema 1, O deve estar sobre a mediatriz relativa ao lado AC.

Além disso o circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC pois é equidistante dos três vértices do triângulo.

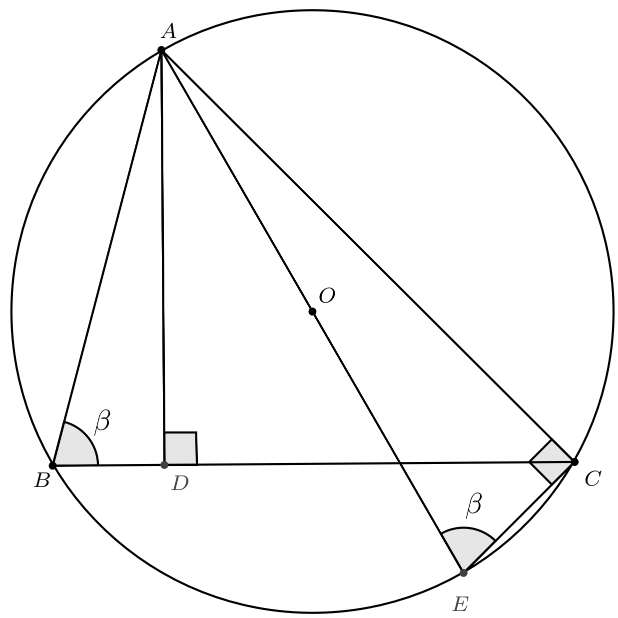
Teorema 3. As três alturas de um triângulo ABC se intersectam num ponto chamado ortocentro.

Demonstração.



Inicialmente tracemos pelos vértices A, B e C, retas paralelas aos lados BC, CA e AB, respectivamente, que determinam o triângulo MNP. Já sabemos que as três mediatrizes de um triângulo se intersectam em seu circuncentro. É fácil perceber que A, B e C são os pontos médios dos segmentos NP, MP e MN, respectivamente, pois $PACB$, $NABC$ e $ABMC$ são paralelogramos e, portanto, os lados opostos de um paralelogramo são iguais. Tracemos as mediatrizes dos segmentos MP, MN e PN que irão se intersectar no ponto H. Mas as mediatrizes do triângulo MNP são as alturas do triângulo ABC. Portanto, provamos que as três alturas de um triângulo ABC se intersectam em um ponto que será chamado de ortocentro.

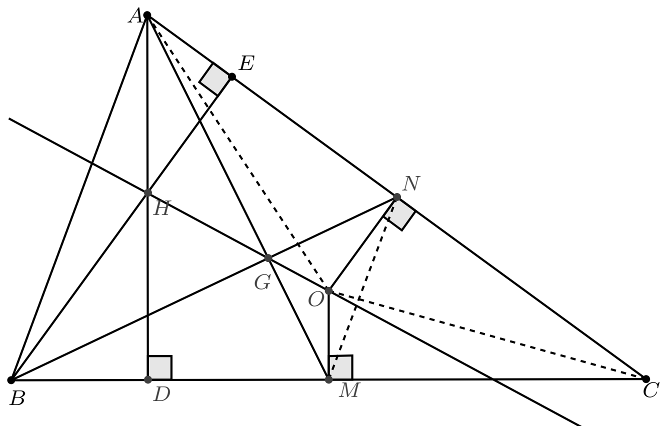
Teorema 4. Seja O o centro da circunferência circunscrita ao triângulo acutângulo ABC e seja D a projeção de A sobre BC então $\angle DAB = \angle OAC$.
Demonstração.



Seja AE um diâmetro. Além disso, $\angle ABC = \angle AEC$. Portanto, $\angle BAD = \angle EAC$.

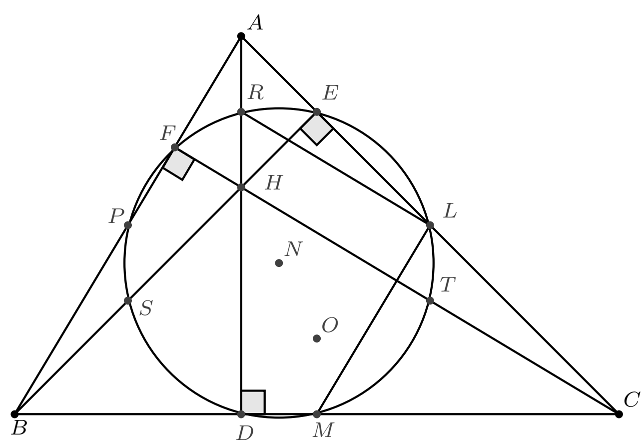
Teorema 5. O ortocentro, o baricentro e o circuncentro de um triângulo, não equilátero, são colineares. A reta determinada por esses pontos é chamada de **Reta de Euler**.

Demonstração.
Sejam M e N os pontos médios de BC e AC, respectivamente. Então, $MN \parallel AB$ e $MN = \dfrac{AB}{2}$. O teorema 4 garante que $\angle BAD = \angle OAC$. Como O é o circuncentro então $OA = OC$ e, com isso, $\angle OAC = \angle OCA$. O quadrilátero $MCNO$ é inscritível então $\angle OCA = \angle NCO = \angle OMN$ e $\angle MON = 180° - \angle ACB$. Além disso, o quadrilátero $DCEH$ também é inscritível e, com isso, $\angle DHE = 180° - \angle ACB$. Como $\angle DHE = \angle AHB$ concluímos que o triângulo AHB é semelhante ao triângulo MNO e, com isso, $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{AH}{OM} = 2$. Temos que $\angle HAG = \angle GMO$ pois AH é paralelo a OM e, como G é o baricentro, $\dfrac{AG}{GM} = 2$. Portanto, o triângulo AHG é semelhante ao triângulo GMO e, com isso, $\angle HGA = \angle MGO$ provando então que H, G e O estão alinhados e $HG = 2GO$.



Teorema 6. Os pés das alturas de um triângulo, os pontos médios do três lados e os pontos médios dos segmentos que ligam os vértices ao ortocentro estão sobre uma circunferência chamada **Circunferência dos** 9 **pontos**.

Demonstração. Queremos provar que M, L, P, D, E, F, R, S e T são concíclicos. É suficiente provar que R e D estão sobre a circunferência circunscrita ao triângulo MLP, pois o restante é análogo. Considere a circunferência Γ de diâmetro RM. É fácil ver que D pertence a Γ. Por outro lado, $RL \parallel HC$, $LM \parallel AB$ e $HC \perp AB$, o que implica que $\angle RLM = 90°$. Portanto, L (e por simetria P) pertence a Γ.

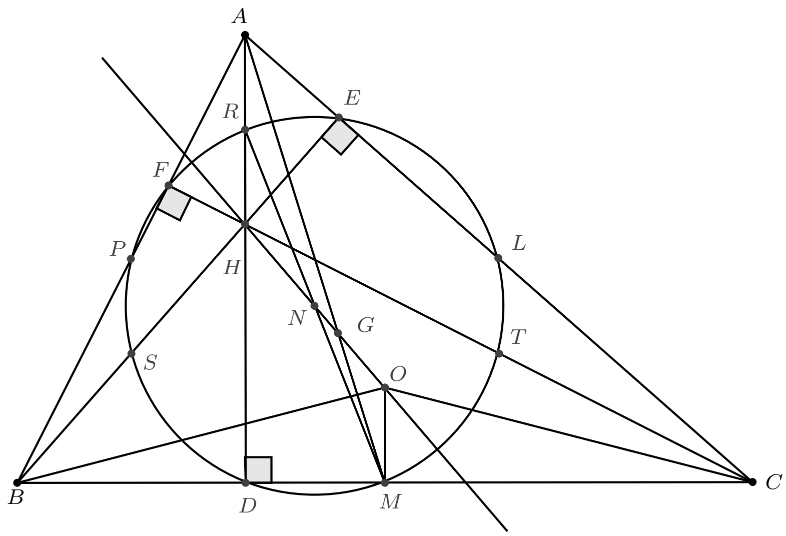


Teorema 7. O centro da circunferência dos 9 pontos é o ponto médio do segmento formado pelo ortocentro e pelo circuncentro.

Demonstração.

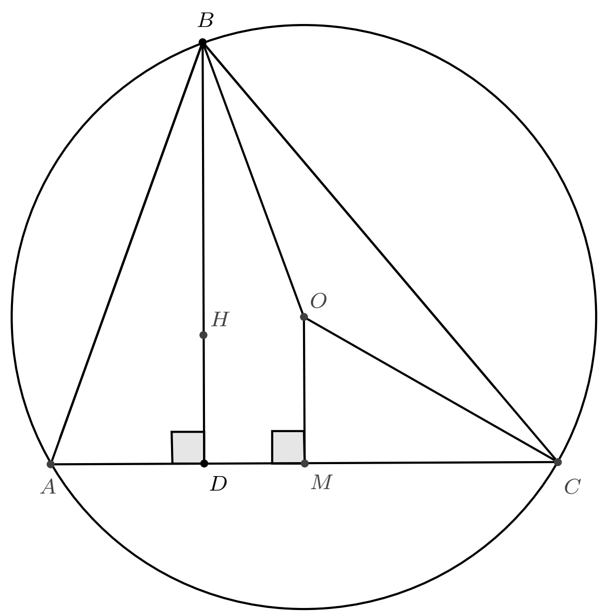
Seja RM um diâmetro da circunferência dos 9 pontos e seja N a interseção de RM e OH.

Como R é ponto médio de AH então $RH = OM$. Além disso, $AH \parallel OM$. Portanto, $\Delta RHN \equiv \Delta NOM$, $RN = NM$ e $HN = ON$.



Problema 1. Seja ABC um triângulo e sejam H o ortocentro e o O o circuncentro do triângulo. Se $\angle ABH = \angle HBO = \angle OBC$ e $BH = BO$ determine a medida do ângulo $\angle A$.

Solução.
Como O é o circuncentro então $OC = OB = BH$. Além disso, $BH = OC = 2OM$. Como o triângulo MOC é retângulo então $\angle MOC = 60°$. Assim, $\angle AOC = 120°$ e $\angle ABC = 60°$.



Problema 2. Seja H o ortocentro de um triângulo ABC, tal que $AC \neq BC$. O segmento que une os pontos médios de HC e AB intersecta a bissetriz de $\angle ACB$ no ponto N. Sabendo que o circuncentro do triângulo ABC pertence à reta que passa pelos pontos H e N, determine a medida do $\angle ACB$.

Solução.
Seja M o ponto médio de AB, L o ponto médio de HC, O o circuncentro do triângulo ABC e R o raio do círculo circunscrito ao triângulo ABC. É bem sabido que $OM = \frac{1}{2}HC = LC$. Como OM é paralelo a LC, então $OMLC$ é um paralelogramo. Por outro lado, a bissetriz do ângulo $\angle ACB$ é bissetriz também do ângulo $\angle OCH$, daí $\angle LNC = \angle NCO = \angle NCL$ e $NL = CL = LH$, o que implica $\angle HNC = 90°$, logo CN é altura e bissetriz do triângulo HOC, assim $HC = CO$ e, portanto, $\angle ACB = 60°$.

Problemas propostos

1. Seja ABC um triângulo tal que $\angle ABC = 50°$. Seja F um ponto qualquer sobre o lado AC. Se M e N são os ortocentros dos triângulos ABF e BFC, respectivamente, determine a medida do ângulo $\angle MFN$.

2. Seja ABC um triângulo tal que $\angle BAC = 40°$ e seja P um ponto sobre o lado AB tal que o ortocentro de ABC coincide com o circuncentro de PBC. Determine a medida do ângulo $\angle PCB$.

3. (ITA) Em um triângulo de vértices A, B e C, a altura, a bissetriz e a mediana, relativamente ao vértice C, dividem o ângulo $\angle BCA$ em quatro ângulos iguais. Se l é a medida do lado oposto ao vértice C, calcule:
(a) A medida da mediana em função de l.
(b) Os ângulos $\angle CAB$, $\angle ABC$ e $\angle BCA$.

4. Seja ABC um triângulo que não é isósceles. Os pontos O e H são, respectivamente, o circuncentro e o ortocentro e M o ponto médio de OH.
(a) Se ABC é um triângulo acutângulo e a bissetriz interna de $\angle BAC$ passa por M, determine a medida do ângulo $\angle BAC$.
(b) Se ABC é um triângulo obtusângulo e a bissetriz externa do ângulo $\angle BAC$ passa por M, determine a medida do ângulo $\angle BAC$.

5. (Torneio das cidades) AD, BE e CF são alturas de um triângulo ABC. K, M e N são os ortocentros dos triângulos AEF, BFD e CDE. Prove que KMN e DEF são triângulos congruentes.

6. Seja ABC um triângulo. Sobre os lados AB e AC são construídos no exterior do triângulo os quadrados $ABDE$ e $ACFG$. Prove que CD, BF e a altura relativa ao vértice A são concorrentes.

7. (OBM) Sejam H, I e O o ortocentro, o incentro e o circuncentro do triângulo ABC, respectivamente. A reta CI corta o circuncírculo de ABC no ponto L, distinto de C. Sabe-se que $AB = IL$ e $AH = OH$. Determine os ângulos do triângulo ABC.

8. (Irã) Em um triângulo ABC temos que $\angle A = 60°$. Seja D um ponto que varia sobre o lado BC. Sejam O_1 o circuncentro de ABD e O_2 o circuncentro de ACD. Seja M a interseção de BO_1 e CO_2 e N o circuncentro de DO_1O_2. Prove que MN passa por um ponto fixo.