Polos Olímpicos de Treinamento

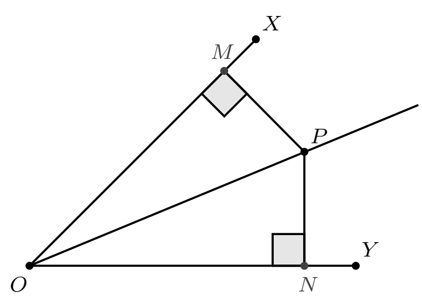
Curso de Geometria - Nível 2

Prof. Cícero Thiago

Aula 18

Circunferências ex - inscritas

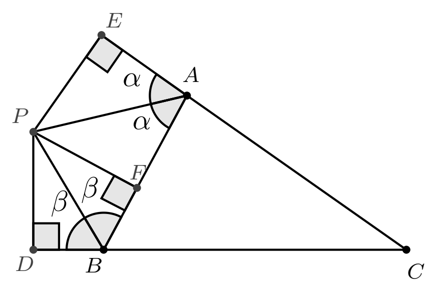
Teorema 1. Seja $\angle XOY$ um ângulo dado e P um ponto em seu interior. Então, a distância de P a XO é igual a distância de P a YO se, e somente se, o ponto P pertence a bissetriz.
Demonstração.



Suponhamos inicialmente que o ponto P pertence à bissetriz. Então, $\angle XOP = \angle YOP$. Sejam M e N os pés das perpendiculares baixadas desde P sobre OX e OY, respectivamente. Podemos concluir, que $\Delta MOP \equiv \Delta NOP$, pelo caso **L.A.A.**. Portanto, $PM = PN$.
Reciprocamente, suponhamos agora que $PM = PN$. Pelo caso especial de congruência de triângulos, cateto - hipotenusa, os triângulos MOP e NOP são congruentes. Portanto, $\angle MOP = \angle NOP$ e, assim, P pertence à bissetriz.

Teorema 2. As bissetrizes externas de quaisquer dois ângulos de um triângulo são concorrentes com a bissetriz interna do terceiro ângulo.

Demonstração.



No triângulo ABC traçamos as bissetrizes externas dos ângulos $\angle A$ e $\angle B$ os quais se intersectam em P. Do teorema 1, como P pertence à bissetriz externa do ângulo $\angle A$, então $PE = PF$. Além disso, P pertence à bissetriz externa do ângulo $\angle B$, então $PF = PD$. Como $PD = PE$, pelo teorema 1, concluímos que P pertence à bissetriz do ângulo $\angle C$. Dessa forma, se P equidista dos três lados do triângulo ABC e é um ponto no exterior do triânglo então P é o centro de uma das três circunferências ex - inscritas do trângulo ABC. A circunferência com centro I_a e raio r_a é uma das três circunferências ex - inscritas que representaremos apenas por (I_a, r_a). Analogamente são definidas as circunferências (I_b, r_b) e (I_c, r_c). Os pontos I_a, I_b e I_c são os ex - incentros. Cada circunferência ex - inscrita toca um dos lados do triâgulo internamente e os outros dois externamente, ou seja, toca no prolongamento. Na figura a seguir, observe que pela propriedade de segmentos tangentes a uma circunferência, vulgarmente conhecido com **Teorema do bico**, temos que $BL = BG$, além disso

$$BL + BG = (BC + CL) + (AG + AB)$$

$$= BC + CE + AE + AB = a + b + c = 2p.$$

Portanto, as tangentes traçadas por B à circunferência (I_b, r_b) tem medida p. Dessa forma é fácil ver que

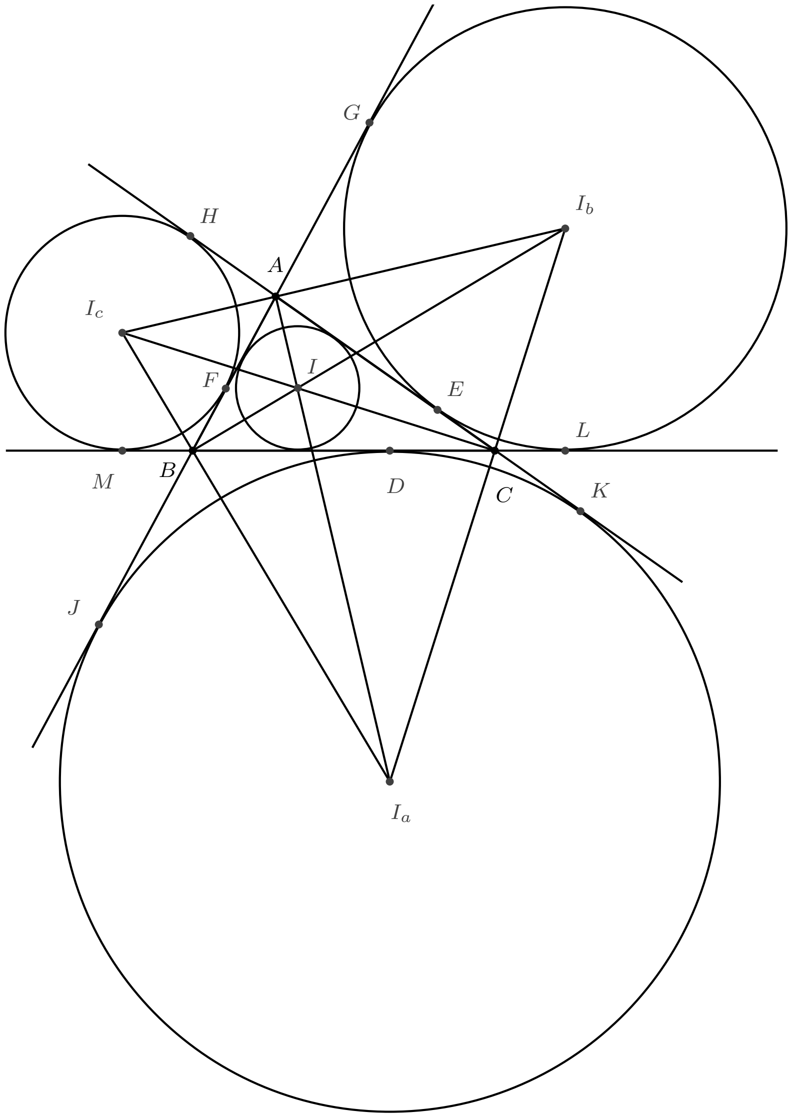
$$AJ = AK = BG = BL = CH = CM = p.$$

Além disso, $CL = BL - BC = p - a$. Então,

$$BM = BF = CL = CE = p - a,$$

$$CK = CD = AH = AF = p - b,$$

$$AG = AE = BJ = BD = p - c.$$

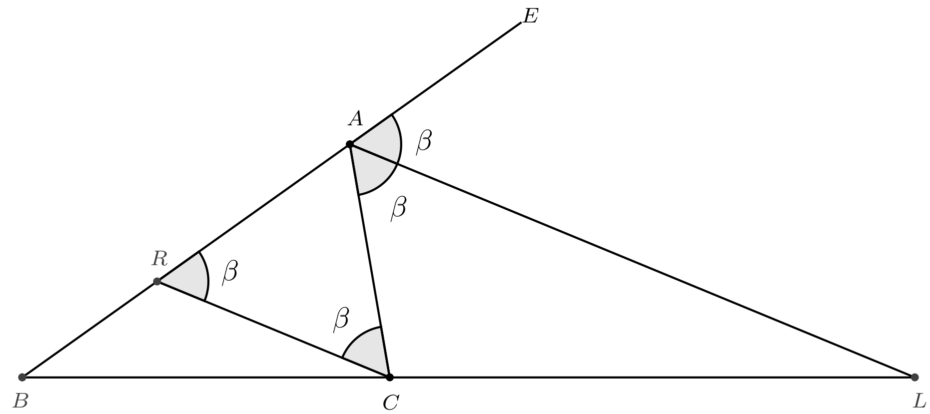


Teorema 3. (Bissetriz externa) A bissetriz externa AL do ângulo $\angle A$ de um triângulo ABC divide externamente o lado oposto BC na razão $\dfrac{AB}{CA}$, ou seja,

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{CA}$$

em que L é o ponto de intersecção da bissetriz externa com o lado BC.

Demonstração.



Seja R a intersecção da paralela à bissetriz AL traçada pelo ponto C. É fácil ver que $\angle EAL = \angle CAL = \angle ACR = \angle ARC$, com isso, $AR = AC$. Pelo teorema de Tales temos que

$$\frac{AB}{AR} = \frac{BL}{LC}.$$

Como $AR = AC$, então

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}.$$

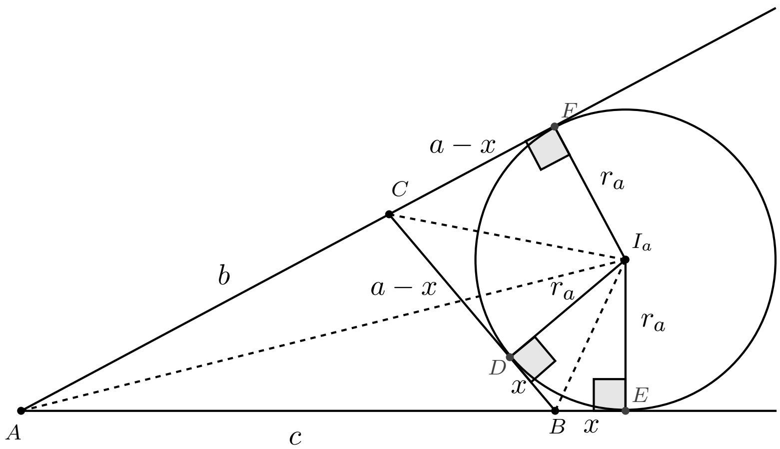
Teorema 4. (Área de um triângulo em função do raio de uma circunferência ex - inscrita.)

Sejam a, b e c as medidas dos lados BC, CA e AB do triângulo ΔABC, respectivamente, e sejam r_a, r_b e r_c os raios das circunferências ex - inscritas relativas aos lados a, b e c, respectivamente. Então, a área do triângulo ΔABC pode ser calculada por

$$[\Delta ABC] = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c),$$

em que $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Demonstração.



Pela propriedade dos segmentos tangentes, temos que $DB = BE = x$ e $DC = CF = a - x$. Então,

$$[\Delta ABC] = [\Delta AI_aE] + [\Delta AI_aF] - 2[\Delta BCI_a] \Leftrightarrow$$

$$[\Delta ABC] = \frac{(c + x) \cdot r_a}{2} + \frac{(b + a - x) \cdot r_a}{2} - 2 \cdot \frac{a \cdot r_a}{2} \Leftrightarrow$$

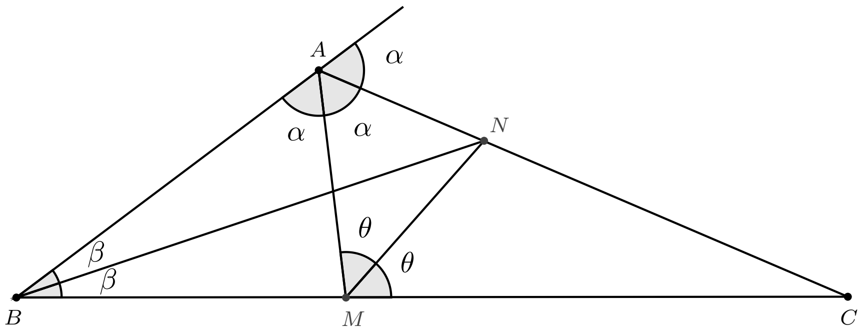
$$[\Delta ABC] = \frac{r_a}{2} \cdot (a + b + c - 2a) = \frac{r_a}{2} \cdot (2p - 2a) = r_a(p - a).$$

Analogamente,

$$[\Delta ABC] = r_b(p - b) = r_c(p - c),$$

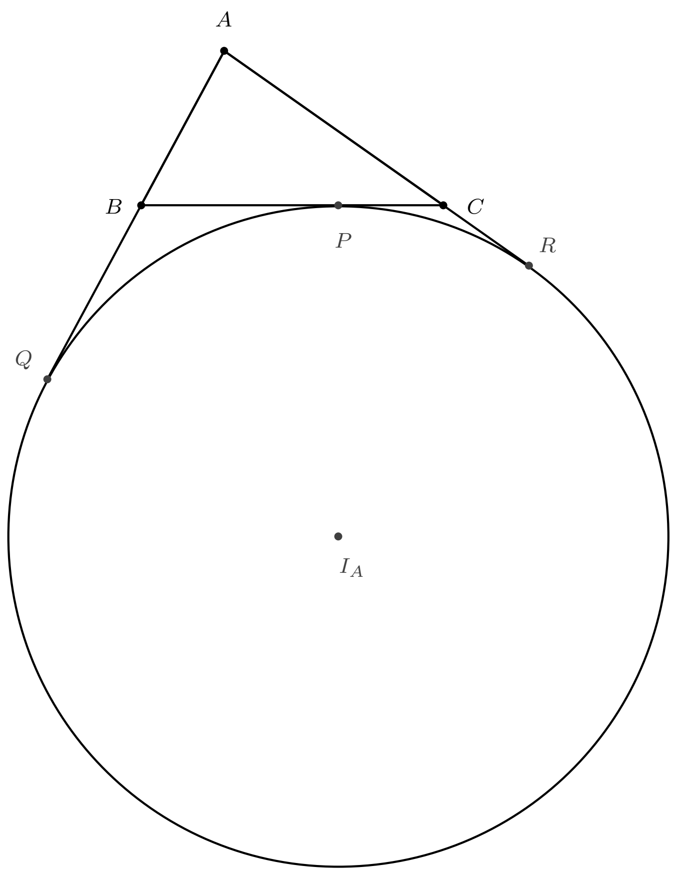
Problema 1. Sejam ABC um triângulo, M o pé da bissetriz interna do ângulo A e N o pé da bissetriz interna do ângulo $\angle B$. Suponha que MN seja bissetriz do ângulo $\angle AMC$. Calcule a medida do ângulo $\angle A$.

Solução.
É fácil ver que N é um dos ex - incentros do triângulo ABC pois é a interseção da bissetriz externa do ângulo $\angle AMB$ e da bissetriz interna do ângulo $\angle B$. Logo, AN é bissetriz externa do ângulo A. Portanto, $\angle A = 120°$.



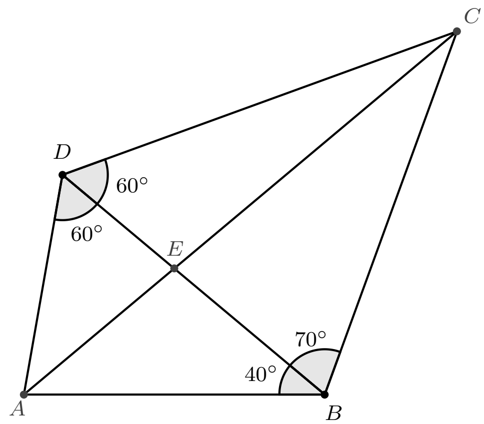
Problema 2. (OBM) Um triângulo ABC, de lados $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$, tem perímetro $2p$. Uma circunferência tangencia o lado BC e os prolongamentos dos lados AB e AC nos pontos P, Q e R, respectivamente. O comprimento AR é igual a:
(a) $p - a$ (b) $p - b$ (c) $p - c$ (d) p (e) $2p$

Solução.

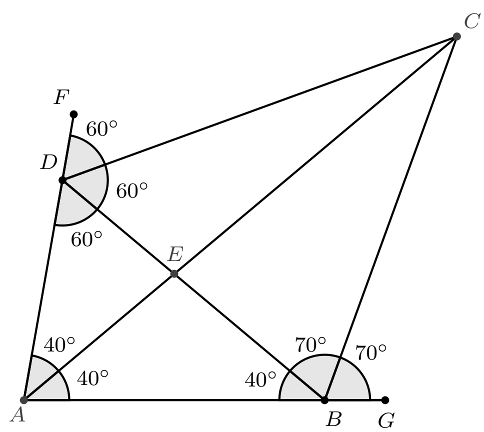


Pelo teorema 2 é fácil ver que $AR = AQ = p$. Portanto, a resposta é o item (b).

Problema 3. No quadrilátero $ABCD$ determine a medida do ângulo $\angle AED$.



Solução.



Na figura, $\angle FDC = 60°$ e $\angle GBC = 70°$. Então, BC e DC são bissetrizes externas dos ângulos $\angle ABD$ e $\angle ADB$. Dessa forma, AC é bissetriz interna do ângulo $\angle BAD$. Portanto, $\angle DAE = \angle BAE = 40°$. Finalmente, $\angle AED = 80°$.

Exercícios propostos

1. Num triângulo ABC tem - se $AB = BC$, e D é um ponto sobre a base AC tal que o raio do círculo inscrito no triângulo ABD é igual ao raio do círculo tangente ao segmento DC e aos prolongamentos das retas BD e BC. Prove que o raio deste círculo é igual a $\dfrac{1}{4}$ da medida h de uma das alturas iguais do triângulo ABC.

2. Prove que os três segmentos determinados por um vértice e pelo ponto de tangência

da circunferência ex - inscrita com o lado oposto a esse vértice são concorrentes em um ponto chamado ponto de Nagel.

3. (OBM) A medida do ângulo $\angle B$ de um triângulo ABC é $120°$. Sejam M um ponto sobre o lado AC e K um ponto sobre o prolongamento do lado AB, tais que BM é a bissetriz interna do ângulo $\angle ABC$ e CK é a bissetriz externa correspondente ao ângulo $\angle ACB$. O segmento MK intersecta BC no ponto P. Prove que $\angle APM = 30°$.

4. (Leningrado) Sejam AF, BG e CH as bissetrizes de um triângulo ABC que tem ângulo $\angle A$ medindo $120°$. Prove que o ângulo $\angle GFH$ mede $90°$.

5. (Belarus) Seja O o centro do círculo ex - inscrito do triângulo ABC oposto ao vértice A. Seja M o ponto médio de AC e seja P a interseção das retas MO e BC. Prove que se $\angle BAC = 2\angle ACB$, então $AB = BP$.

6. (IMO) Dado um triângulo ABC, o ponto J é o centro da circunferência ex-inscrita oposta ao vértice A. Esta circunferência ex-inscrita é tangente ao lado BC em M, e às retas AB e AC em K e L, respectivamente. As retas LM e BJ intersectam-se em F, e as retas KM e CJ intersectam-se em G. Seja S o ponto de interseção das retas AF e BC, e seja T o ponto de interseção das retas AG e BC. Prove que M é o ponto médio de ST.
(A circunferência ex-inscrita de ABC oposta ao vértice A é a circunferência tangente ao segmento BC, ao prolongamento do segmento AB no sentido de A para B e ao prolongamento do segmento AC no sentido de A para C.)

Bibliografia

1. Tópicos de Matemática Elementar - Vol. 2
Antonio Caminha Muniz Neto

2. Geometria
Radmila Bulajich Manfrino e José Antonio Gómez Ortega