Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 3

Prof. Rodrigo Pinheiro

Aula 1

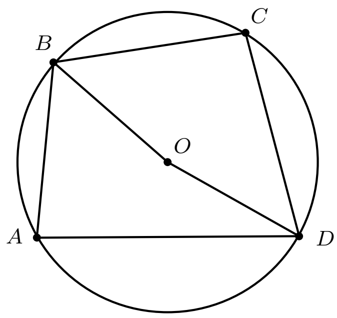
Quadriláteros Inscritíveis

Um quadrilátero é dito inscritível se, e somente se, existe uma circunferência que passa pelos seus quatro vértices.

Teorema 1. Um quadrilátero é inscritível se, e somente se, tiver a soma de dois ângulos opostos iguais a $180°$.

Demonstração.

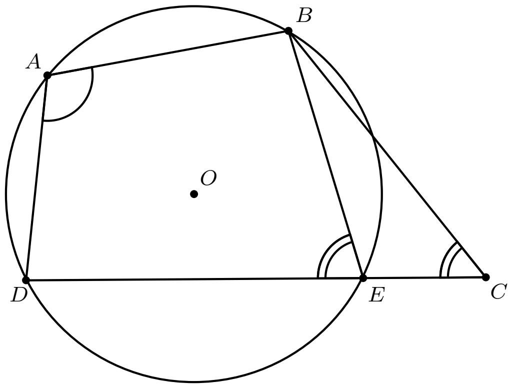
($\Rightarrow$) Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível em uma circunferência de centro O.



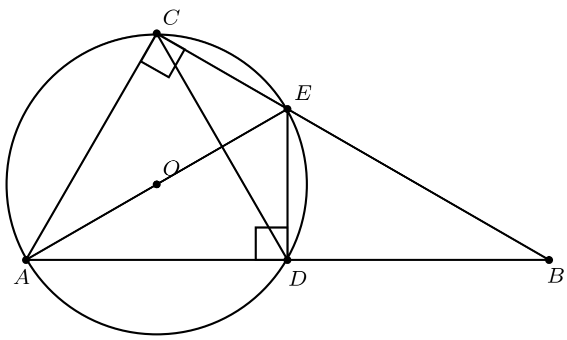
Pela propriedade de ângulo central, temos que: $\angle BAD = \dfrac{B\overset{\frown}{C}D}{2}$ e $\angle BCD = \dfrac{B\overset{\frown}{A}D}{2}$. Como $B\overset{\frown}{C}D + B\overset{\frown}{A}D = 360°$, temos então que:

$$\angle BAD + \angle BCD = 180°$$

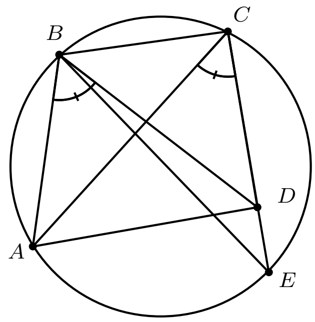
($\Leftarrow$) Seja $ABCD$ um quadrilátero onde $\angle BAC + \angle BCD = 180°$. E suponha que $ABCD$ não é inscritível. Construímos a circunferência circunscrita ao triângulo ABD, e definimos o ponto E a interseção da reta CD com a circunferência (ver figura). Observe que este ponto pode ser exterior ou interior (mostrado na figura) à circunferência. Como $ABED$ é um quadrilátero inscritível, já demonstramos que $\angle BAD + \angle BED = 180°$, concluímos que $\angle BED = \angle BCD$. Mas isso é um absurdo, pois em um triângulo o ângulo externo tem que ser sempre maior que os outros dois não adjacentes a ele, o que não acontece no $\triangle BEC$.



Problema 1. Seja ABC um triângulo retângulo em C e CD a bissetriz interna de C. A perpendicular a AB por D encontra BC em E. Mostre que AD=DE.
Solução. No quadrilátero $ADEC$, observe que $\angle ADE + \angle ACE = 180°$. Logo, $ADEC$ é inscritível, de modo que $\angle AED = \angle EAD = 45°$. Então o triângulo ADE é isósceles e, portanto, $AD = DE$.

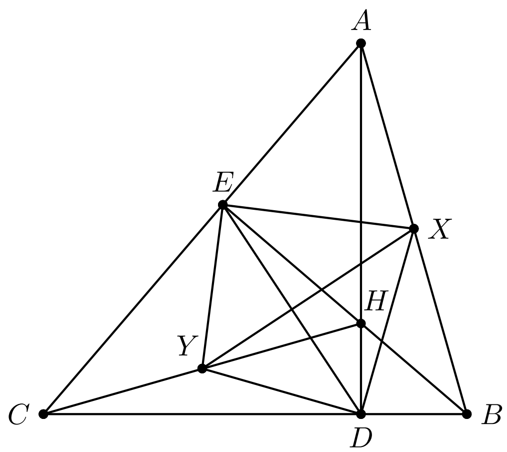


Teorema 2. Um quadrilátero $ABCD$ é inscritível se, e somente se, o ângulo que uma diagonal forma com um lado for igual ao ângulo que a outra diagonal forma com o lado oposto.
Demonstração. Digamos $\angle ABD = \angle ACD$. Assuma que a circunferência passa pelos pontos A, B, C e não contém D. Perceba que D pode estar no interiro da circunferência ou no exterior, faremos a solução para o caso em que ele está na região interna, o outro caso é análogo. Então, supondo que D pertence à região interior da circunferência, tomamos E como sendo a interseção da reta CD com a circunferência. Pela propriedade de ângulo inscrito, temos $\angle ABE = \angle ACE$, mas pela condição $\angle ABD = \angle ACD$, temos que $\angle ABD = \angle ABE$, então D pertence à circunferência.



Problema 2. (Extraído de [1]) As alturas AD e BE do triângulo ABC se encontram no ortocentro H. Os pontos médios de AB e CH são X e Y, respectivamente. Prove que XY é perpendicular a DE.

Solução.



Observe que os quadriláteros $CDHE$ e $ABDE$ são inscritíveis pois, $\angle HDC + \angle HEC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ e $\angle ADB = \angle AEB$. Como em um triângulo retângulo, o ponto médio da hipotenusa é seu circuncentro, então X e Y são os circuncentros das circunferências circunscritas aos quadriláteros $ABDE$ e $CDHE$, respectivamente. Portanto

$$XD = XE \quad \text{e} \quad YD = YE \quad \Rightarrow \quad \triangle XDY \equiv \triangle XEY \quad \text{(caso LLL)},$$

isto implica dizer que o triângulo EXD é isósceles e XY é bissetriz em relação à base, então também é altura e portanto XY é perpendicular a DE.

Problema 3. (Extraído de [1])Seja ABC um triângulo tal que $\angle BAC = 60^\text{o}$. Dado um ponto D sobre BC, sejam O_1 e O_2 os circuncentros dos triângulos ABD e ACD, respectivamente, M a interseção de BO_1 e CO_2 e N o circuncírculo de DO_1O_2. Mostre que, ao variar D, MN passa por um ponto fixo.

Solução.

Seja ω o circuncírculo do triângulo ABC. Afirmamos que $M \in \omega$. De fato,

$$\begin{aligned}
\angle BMC &= 180^\circ - \angle CBM - \angle BCM \\
&= (90^\circ - \angle DBO_1) + (90^\circ - \angle DCO_2) \\
&= \angle BAD + \angle DAC \\
&= \angle BAC.
\end{aligned}$$

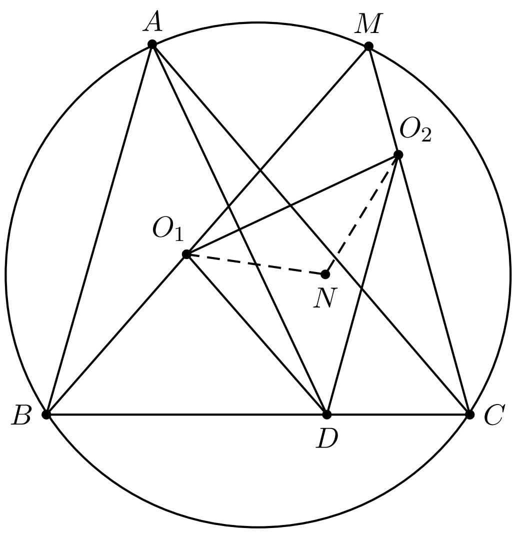
Isso garante também que os pontos M, O_1, N e O_2 são concíclicos, pois

$$\begin{aligned}
\angle O_1MO_2 + O_1NO_2 &= \angle BMC + 2\angle O_1DO_2 \\
&= \angle BMC + 2(180^\circ - \angle BDO_1 - \angle CDO_2) \\
&= \angle BMC + 2(180^\circ - \angle DBO_1 - \angle DCO_2) \\
&= \angle BMC + 2\angle BMC \\
&= 180^\circ.
\end{aligned}$$

Mas então MN é a bissetriz do ângulo $\angle BMC$, uma vez que

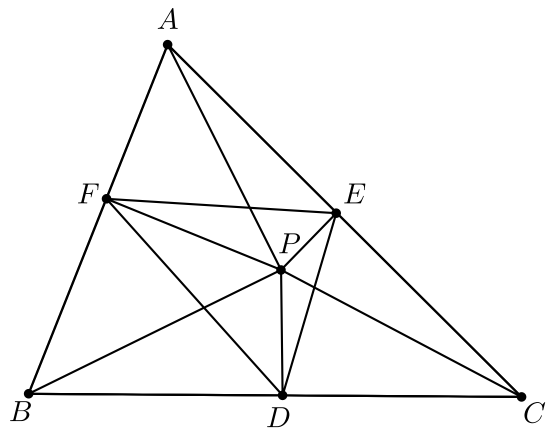
$$\begin{aligned}
&\angle BMN = \angle O_1MN = \angle O_1O_2N = 30^\circ \\
\text{e } &\angle CMN = \angle O_2MN = \angle O_2O_1N = 30^\circ.
\end{aligned}$$

Assim, MN passa pelo ponto médio do arco BC da circunferência ω.



Problema 4. (Extraído de [1]) Mostre que todo triângulo acutângulo ABC possui um ponto P em seu interior tal que os pés das perpendiculares baixadas de P aos lados de ABC são os vértices de um triângulo equilátero.

Solução.



Sejam D, E, F os pés das perpendiculares baixadas de P aos lados BC, CA, AB, respectivamente. Vamos encontrar condições necessárias e suficientes para que o triângulo DEF seja equilátero.

Necessidade. Suponha DEF equilátero. Temos

$$\begin{aligned}\angle BPC &= \angle BAC + \angle PBA + \angle PCA \\ &= \angle BAC + \angle PBF + \angle PCE \\ &= \angle BAC + \angle PDF + \angle PDE \\ &= \angle BAC + 60^\circ,\end{aligned}$$

onde na penúltima passagem utilizamos que os quadriláteros $BDPF$ e $CEPD$ são cíclicos. De maneira análoga, temos

$$\angle APB = \angle ACB + 60^\circ \quad \text{e} \quad \angle CPA = \angle CBA + 60^\circ$$

e portanto P é a interseção de três circunferências (especificamente, três arcos capazes), que se intersectam em um ponto, pois

$$(\angle BAC + 60^\circ) + (\angle ACB + 60^\circ) + (\angle CBA + 60^\circ) = 360^\circ.$$

Suficiência. Seja P a interseção dos três arcos capazes descritos acima. Pelas mesmas razões, temos

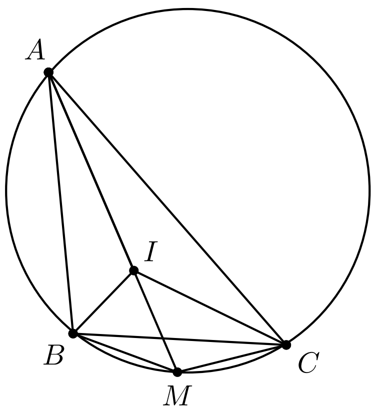
$$\begin{aligned}\angle FDE &= \angle FDP + \angle EDP \\ &= \angle FBP + \angle ECP \\ &= \angle BPC - \angle BAC \\ &= 60^\circ.\end{aligned}$$

Isso conclui a prova.

Problema 5. (Extraído de [1])Sejam ABC um triângulo de circuncírculo ω e incentro I. Se M é o ponto médio do arco menor BC de ω, Prove que:

$$MB = MI = MC.$$

Solução.



Temos

$$\begin{aligned}\angle MBI &= \angle MBC + \angle CBI \\ &= \angle MAC + \angle CBI \\ &= \frac{\angle BAC + \angle ABC}{2}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\angle MIB &= \angle BAI + \angle ABI \\ &= \frac{\angle BAC + \angle ABC}{2},\end{aligned}$$

de modo que $MB = MI$. Analogamente, $MC = MI$.

Problema 6. (Extraído de [1]) Seja ABC um triângulo com todos os seus ângulos agudos, de alturas AD, BE e CF (com D em BC, E em AC e F em AB). Seja M o ponto médio do segmento BC. A circunferência circunscrita ao triângulo AEF corta a reta AM em A e X. A reta AM corta a reta CF em Y. Seja Z o ponto de encontro entre as retas AD e BX.
Demonstrar que as retas YZ e BC são paralelas.

Solução. Note inicialmente que $AFHE$ é inscritível, pois $\angle AEH = \angle AFH = 90^{\circ}$. Daí, $\angle AXH = 90^{\circ}$.

Seja A' o ponto sobre a semi-reta $\overrightarrow{AM}$ tal que $AM = MA'$. O quadrilátero $ABA'C$ é um paralelogramo, donde

$$\begin{aligned}\angle A'BH &= \angle A'BC + \angle CBH \\ &= \angle ACB + (90^\circ - \angle ACB) \\ &= 90^\circ \\ &= \angle A'XH,\end{aligned}$$

ou seja, o quadrilátero $BHXA'$ é inscritível. Mas $BHCA'$ também é inscritível, já que

$$\angle BHC + \angle BA'C = (180^\circ - \angle BAC) + \angle BAC = 180^\circ.$$

Dessa forma, os pontos B, H, X, C são concíclicos, donde

$$\angle XBM = \angle XBC = \angle XA'C = \angle BAM \tag{1}$$

Seja T a interseção entre as retas AB e XH. Note que H é também o ortocentro do triângulo ATY, uma vez que $TX \perp AY$ e $YF \perp AT$. Daí,

$$AH \perp TY \implies TY \parallel BC.$$

Se mostrarmos que $Z \in TY$, o problema estará terminado. Seja então Z' interseção entre AD e TY. Vamos mostrar que $Z = Z'$. Ora, como

$$\angle HZ'Y = \angle HXY = 90^\circ,$$

o quadrilátero $HXYZ'$ é inscritível e portanto

$$\angle XZ'Y = \angle XHY = \angle FAX = \angle BAM. \tag{2}$$

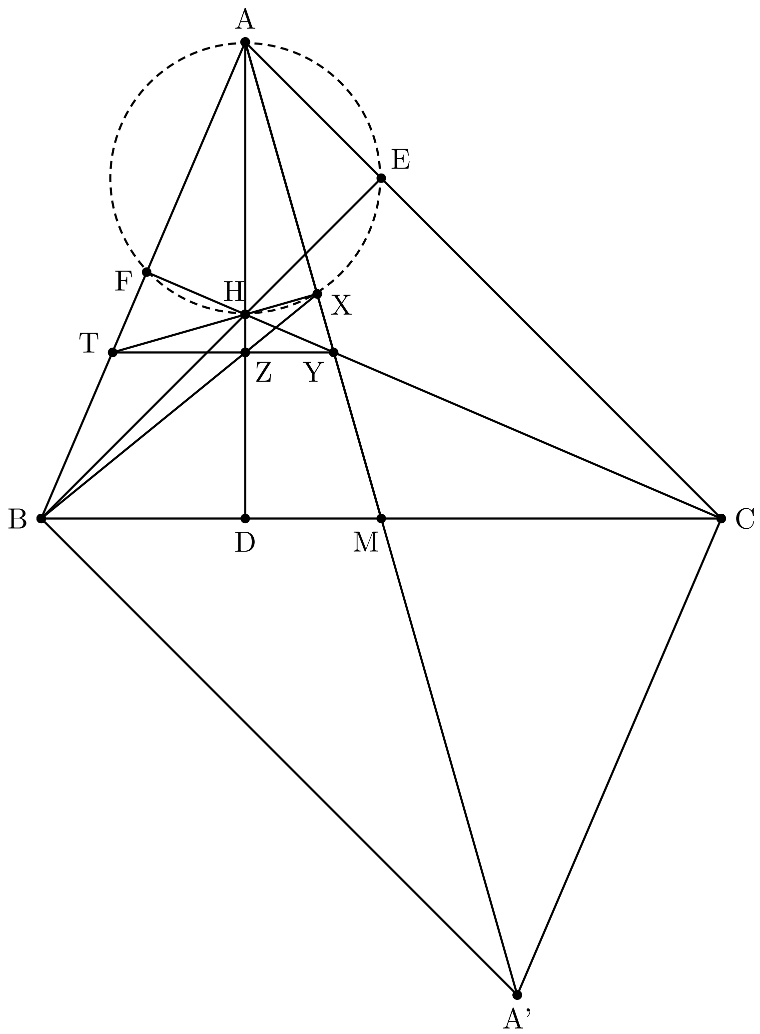
Das relações (1) e (2), segue que

$$\angle XZ'Y = \angle XBM,$$

ou seja, que os pontos B, Z' e X são colineares. Mas então

$$Z' \in AD \cap BX = Z \implies Z = Z',$$

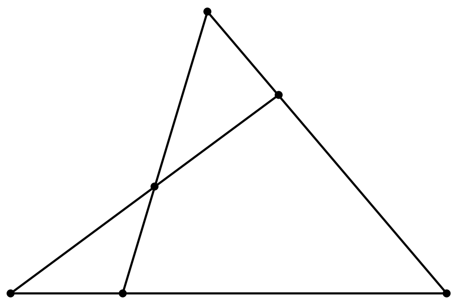
como queríamos.


A
E
F
H
X
T
Z
Y
B
D
M
C
A'

Problemas Propostos

Problema 7. Seja P o centro do quadrado construído externamente sobre a hipotenusa AC do triângulo retângulo ABC. Prove que BP bissecta o ângulo ABC.

Problema 8. (IME-97) Quatro retas se interceptam formando quatro triângulos conforme figura abaixo. Prove que os círculos circunscritos aos quatro triângulos possuem um ponto em comum.



Problema 9. (IME-93) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo inscrito num círculo e seja I o ponto de intersecção de suas diagonais. As projeções ortogonais de I sobre os lados AB, BC, CD e DA são, respectivamente, M, N, P e Q. Prove que o quadrilátero $MNPQ$ é circuscritível a um círculo com centro em I.

Problema 10. No triângulo ABC, $\angle C = 90°$. Seja O o seu circuncentro e AH a altura relativa ao lado BC. Sabendo que $\angle BAH = 10°$, calcule $\angle BOH$.

Problema 11. Num triângulo ABC, $\angle BAC = 100°$, $AB = AC$. Um ponto D é escolhido sobre o lado AC de tal modo que $\angle ABD = \angle CBD$. Prove que $AD + BD = BC$.

Problema 12. Sobre os lados AB, BC e AC do triângulo ABC, respectivamente, escolhemos M, N e P quaisquer. Mostre que as circunferências circunscritas aos triângulos AMP, BNM e CPN concorrem em um ponto O comum às três circunferências.

Problema 13. Sejam E e F pontos sobre os lados AB e BC, respectivamente, do quadrado $ABCD$ tais que $EB = CF$. Se $\angle EDF = 27°$, determine a soma $\angle FAB + \angle ECB$.

Problema 14. (Leningrado) No quadrilátero $ABCD$, $AB = CD$. Sejam M e N os pontos médios dos lados AB e CD, respectivamente e P o ponto de encontro das mediatrizes de BC e AD. Prove que P também está sobre a mediatriz de MN.

Problema 15. Seja ABC um triângulo tal que $\angle BAC = 60°$. Mostre que o circuncentro, ortocentro, incentro de ABC, ex-incentro de ABC relativo ao lado BC e os pontos B, C são concíclicos.

Problema 16. (São Petersburgo 1996) Seja ABC um triângulo tal que $\angle BAC = 60°$. Seja também O um ponto no interior de ABC para o qual $\angle AOB = \angle BOC = 120°$. Se D, E são os pontos médios dos lados AB, AC, prove que A, D, E, O são concíclicos.

Problema 17. (Teste Cone Sul Brasil 2005) Seja P um ponto do arco menor AB da circunferência circunscrita ao quadrado $ABCD$. Os segmentos AC e PD se intersectam em Q e AB e PC em R. Mostre que QR é a bissetriz do ângulo $\angle PQB$.

Problema 18. (IMO 2002) Sejam S uma circunferência de centro O, BC um diâmetro de S, A um ponto sobre S tal que $\angle AOB < 120°$ e D o ponto médio do arco AB que não contém C. Se a reta paralela a DA passando por O intersecta AC em I e a mediatriz de OA intersecta S em E e F, prove que I é o incentro do triângulo CEF.

Problema 19. (Irlanda 1997) Dado um ponto M interior ao triângulo equilátero ABC, sejam D, E e F os pés das perpendiculares traçadas de M aos lados BC, CA e AB, respectivamente. Encontre o lugar geométrico dos pontos M para os quais $\angle FDE = 90°$.

Problema 20. (Rússia 1999) No triângulo ABC de circuncírculo ω, pontos D e E são escolhidos sobre o segmento AC de modo que

$$AB = AD \quad \text{e} \quad BE = EC,$$

com E entre A e D. Se F é o ponto médio do arco BC de ω, mostre que os pontos B, D, E, F são concíclicos.

Problema 21. Seja ABC um triângulo de circuncentro O e ortocentro H tal que $\angle BAC = 60°$ e $AB > AC$. Sejam também BE, CF as alturas relativas aos lados CA, AB, respectivamente, e M, N pontos sobre os segmentos BH, HF, respectivamente, tais que $BM = CN$. Determine o valor da expressão

$$\frac{HM + HN}{HO}.$$

Problema 22. Num triângulo ABC, tomamos pontos X, Y sobre os lados AB, BC, respectivamente. Se AY e CX se intersectam em Z e

$$AY = YC \quad \text{e} \quad AB = ZC,$$

mostre que os pontos B, X, Z, Y são concíclicos.

Referências

[1] S. B. Feitosa, B. Holanda, Y. Lima and C. T. Magalhães, Treinamento Cone Sul 2008. Fortaleza, Ed. Realce, 2010.

[2] Afined, Geometría, Una visión de la planimetría. Lima, Ed. Lumbreras, 2005.