Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 3

Prof. Rodrigo Pinheiro

Aula 2

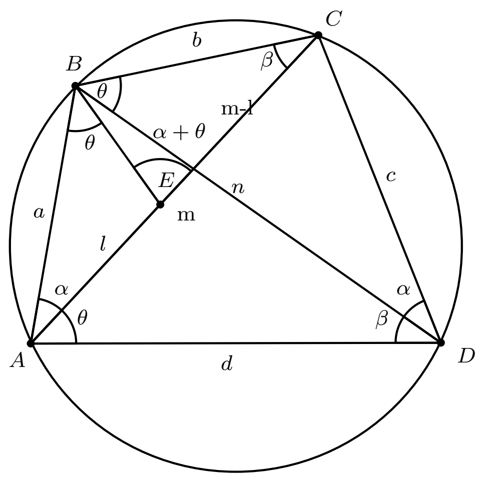
Quadriláteros Inscritíveis II

Nesta aula, trataremos de três teoremas muito utilizados em problemas de quadriláteros inscritíveis. Os teoremas são:

1. Teorema de ptolomeu (Problema 1)
2. Teorema de Simson-Wallace (Problema 12)
3. Teorema da borboleta (Problema 18)

Problema 1. (Teorema de Ptolomeu) Prove que em todo quadrilátero inscritível, o produto dos comprimentos de suas diagonais é igual a soma dos produtos dos comprimentos de seus lados opostos.

Solução. Dado o quadrilátero $ABCD$ de lados a, b, c,d e diagonais m e n, demonstraremos que: $a.c + b.d = m.n$.



Traçamos BE tal que $\angle ABE = \angle DBC = \theta$. Se $AE = l \rightarrow EC = m - l$. Perceba que os triângulos ABE e DBC possuem os mesmo ângulos, ou seja, são semelhantes, podemos então tirar que:

$$\frac{l}{c} = \frac{a}{n} \rightarrow a.c = n.l$$

Da mesma forma, temos que os triângulos EBC e ABD são semelhantes pois possuem os mesmos ângulos, portanto:

$$\frac{b}{n} = \frac{m-l}{d} \rightarrow b.d = n.(m-l)$$

Somando as duas relações encontradas, temos que:

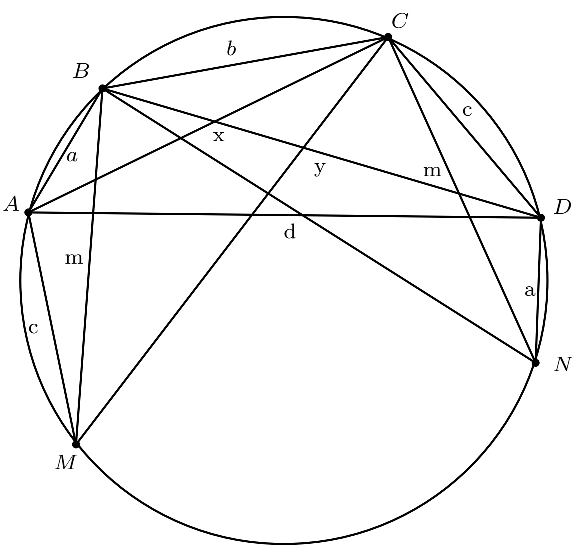
$$a.c + b.d = n.l + n.(m-l) \rightarrow a.c + b.d = m.n$$

Problema 2. Seja P um ponto sobre o arco BC do círculo circunscrito ao triângulo equilátero ABC. Prove que $PA = PB + PC$.
Solução. Como o quadrilátero $ABPC$ é inscritível, pelo teorema de ptolomeu temos que:

$$PA.BC = PB.AC + PC.AB$$

Só que, $AB = BC = CA$ pois ABC é equilátero, portanto $PA = PB + PC$.

Problema 3. Demonstre que em todo quadrilátero inscritível, a razão dos comprimentos das diagonais é igual a razão da soma dos produtos dos lados que concorrem nos extremos de cada diagonal respectivamente.
Solução.



Dado um quadrilátero $ABCD$ inscritível com lados a, b, c, d, e diagonais x e y, mostraremos que:

$$\frac{x}{y} = \frac{a.d + b.c}{a.b + c.d}$$

Seja M um ponto sobre a circunferência tal que $m(\overset{\frown}{AM}) = m(\overset{\frown}{CD})$, portanto $AM = CD = c$. E seja N tal que $m(\overset{\frown}{DN}) = m(\overset{\frown}{AB})$, portanto $DN = AB = a$. Assim sendo, temos

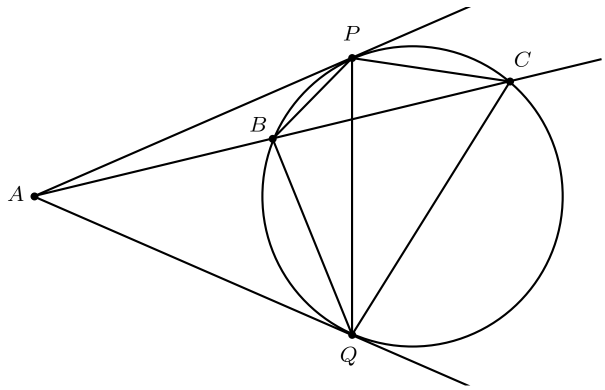
também que $BM = CN = m$ e $MC = BN = AD = d$, aplicando o teorema de ptolomeu nos quadriláteros $MABC$ e $NBCD$, temos:
Quadrilátero $MABC$: $m.x = a.d + b.c$
Quadrilátero $NBCD$: $m.y = a.b + c.d$
Dividindo as duas relações, obtemos:

$$\frac{x}{y} = \frac{a.d + b.c}{a.b + c.d}$$

Problema 4. Em uma circunferência, sejam A, B, C e D pontos consecutivos tal que $m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{BC}) = m(\overset{\frown}{CD})$ e $AD = 2.AB$. Calcule $m(\overset{\frown}{CD})$.

Problema 5. Em um quadrilátero $ABDE$, seja L um ponto em BD, tal que $ABLE$ é um quadrilátero inscritível, $\angle BEA = \angle LED$, $LD = 2.BL = 8$, $DE = 2.LE$ e $AB.LE = 40$. Calcule AE.

Problema 6. Segundo a figura, $BP.CQ = 10$; P e Q são pontos de tangência. Calcule $BC.PQ$.



Problema 7. Segundo a figura, $m(\overset{\frown}{CA}) = m(\overset{\frown}{AM}) = m(\overset{\frown}{BD}) = m(\overset{\frown}{MD}) = 120°$, $m(\overset{\frown}{CN}) = m(\overset{\frown}{NB})$, $AB = a$ e $CN.(CN + AB) = b$. Calcule BD em função de a e b.

Problema 8. Demonstre que se um ponto P está sobre o círculo circunscrito ao quadrado $ABCD$, então:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PB + PD}{PA + PC}$$

Problema 9. Um hexágono está inscrito em um círculo. Cinco de seus lados medem 81 e o sexto, denotado por AB mede 31. Calcule a soma das medidas das três diagonais que podem ser traçadas a partir do vértica A.

Problema 10. Marcamos quatro pontos A, B, C e D sobre a borda de uma piscina circular de raio R. As distâncias entre A e C e entre A e B são iguais a $50m$. O tempo que um nadador leva para ir de D até C, de D até A e de D até B, com a mesma velocidade constante são proporcionais a 1, 5, e 7, respectivamente. Determine R.

Problema 11. (Teorema de Carnot) Seja O o circuncentro do triângulo ABC. Sejam K_a, K_b e K_c as distâncias de O aos lados de ABC. Prove que:

$$K_a + K_b + K_c = R + r$$

onde R e r são os raios dos círculos circunscrito e inscrito ao triângulo.

Problema 12. (Reta de Simson-Wallace) Seja Θ a circunferência circunscrita ao triângulo ABC e P um ponto sobre Θ. Sejam X, Y e Z as projeções ortogonais de P sobre as retas suportes de BC, CA e AB, respectivamente. Então X, Y e Z são colineares, e a reta que contém esses pontos é chamada de Reta de Simson-Walace. A recíproca também é verdadeira: Se as projeções ortogonais de um ponto P sobre os lados de um triângulo são colineares, então o ponto P encontra-se sobre a circunferência circunscrita ao triângulo.
Solução. Observe que os quadriláteros $PXCY$, $PYAZ$ e $PZBX$ possuem dois ângulos retos opostos cada um, então eles são cíclicos. Portanto:

$$\begin{aligned} \angle PXY &= \angle PCY \texttt{(Quadrilátero cíclico PXCY)} \\ &= \angle PCA \texttt{(Colinearidade de } A\texttt{, } C\texttt{, } Y\texttt{)} \end{aligned}$$

Analogamente, $\angle PXZ = \angle PBA$. Agora, X, Y e Z são colineares se, e somente se, $\angle PXY = \angle PXZ$, onde pelas equações acima ocorre se, e somente se, $\angle PCA = \angle PBA$. Em outra palavras, se, e somente se, A, B, C e P são cíclicos.

Problema 13. (Reta de Simson-Wallace Generalizado) Seja ABC um triângulo de circuncírculo ω. Dados um ponto D e um ângulo α, sejam X, Y, Z pontos sobre as retas AB, BC, CA tais que as retas DX, DY, DZ formam um ângulo α com as retas AB, BC, CA, respectivamente, na mesma orientação. Então X, Y, Z são colineares se, e somente se D pertence à circunferência ω.

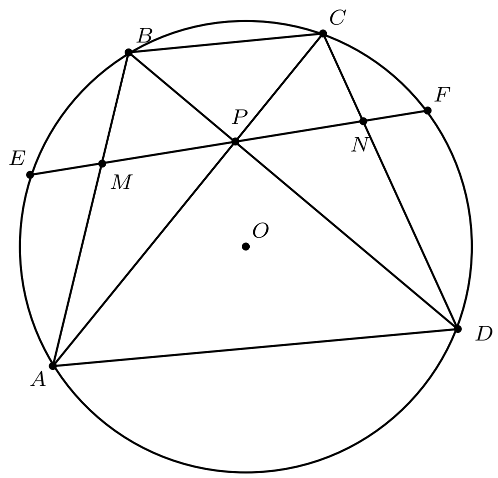
Problema 14. Sejam A, B, C, P, Q pontos sobre um círculo. Mostre que o ângulo formado entre as retas de Simson de P e Q em relação ao triângulo ABC é igual a metade do arco PQ.

Problema 15. Sejam A, B, C, D pontos sobre um círculo. Prove que a interseção da reta de Simson de A em relação a BCD com a reta de Simson de B em relação ACD pertence à reta que une C ao ortocentro de ABD.

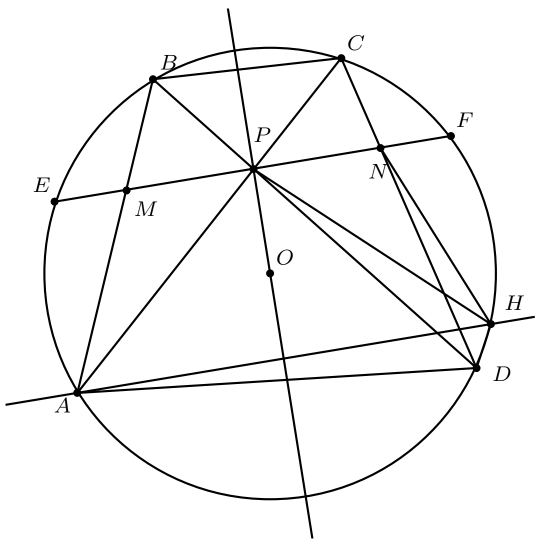
Problema 16. Se A, B, C, P, Q são cinco pontos sobre um círculo tal que PQ é um diâmetro, mostre que as retas de Simson de P e Q em relação à ABC intercepta em um ponto concíclico com os pontos médios dos lados do triângulo ABC.

Problema 17. Seja I o incentro do triângulo ABC, e D, E, F as projeções de I sbore BC, CA, AB, respectivamente. O círculo inscrito à ABC encontra os segmentos AI, BI, CI nos pontos M, N, P, respectivamente. Mostre que as retas de Simson de qualquer pontos sobre o incirculo em relação aos triângulos DEF e MNP são perpendiculares.

Problema 18. (Teorema da borboleta) Dada uma circunferência ω, sejam EF uma corda de ω e P o ponto médio de EF. Sejam também AC e BD cordas de ω passando por P. Se AB e CD intersectam EF em M e N, então P é o ponto médio de MN.



Solução. Como $EP = PF$, então a reta OP é perpendicar a EF. Traçamos AH perpendicular a OP. Portanto, $AQ = QH = m$, $AP = PH = l$ e $\angle PAH = \angle PHA = \alpha$. Como $EF//AH$, temos que $\angle APE = \angle HPF = \alpha$. Já que $ACHD$ é inscritível, então $\angle CAH = \angle CDH = \alpha$. Dessa forma, temos que o quadrilátero $NPDH$ é inscritível pois $\angle HPF = \angle NDH$, assim temos que $\angle PHN = \theta$, portanto $\triangle APM \equiv \triangle HPN$ pelo caso ALA. Isso implica dizer que $PM = NP$.



Problema 19. (Teorema da borboleta generalizado) Dadas uma circunferência ω de centro O e uma reta l, seja M a projeção de O sobre l. Sejam também r, s duas retas passando

por M que definem cordas AB e CD em ω. Se AD e BC intersectam l em X e Y, então M é o ponto médio do segmento XY.