Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 3

Prof. Rodrigo Pinheiro

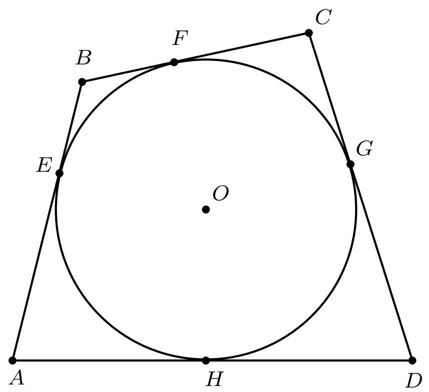
Aula 3

Quadriláteros Circunscritíveis

Um quadrilátero é dito circunscritível se, e somente se, existe uma circunferência que tangencia internamente todos os lados do quadrilátero.

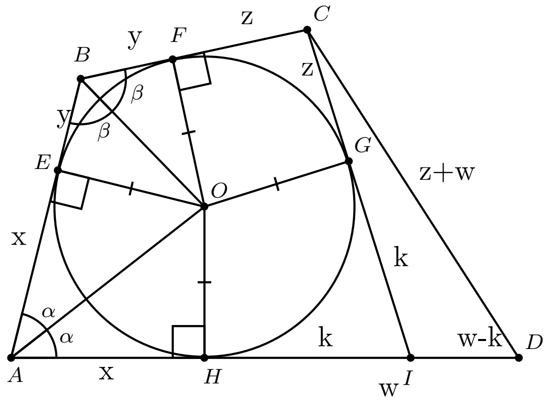
Teorema 1. (Teorema de pitot) Mostre que um quadrilátero pode ser circunscrito a uma circunferência se, e somente se, a soma de dois lados opostos for igual à soma dos outros dois lados.

Solução. ($\Rightarrow$) Suponha que o quadrilátero $ABCD$ seja circunscrito a uma circunferência, e os pontos de tangência da circunferência com os lados sejam E, F, G, H, como mostra a figura abaixo.



Pelo problema anterior, vemos que: $AH = AE$; $BE = BF$; $CF = CG$; $GD = HD$. Portanto, $AE + BE + CG + GD = BF + CF + +HD + AH$, isto implica dizer que: $AB + CD = BC + AD$.

($\Leftarrow$) Suponha que $ABCD$ seja um quadrilátero tal que $AB + CD = BC + AD$ e não seja circunscritível.



Sejam AO e BO as bissetrizes internas dos ângulos $\angle DAB$ e $\angle ABC$. Tomamos E, F e H como sendo os pés das alturas de O aos lados AB, BC e AD, respectivamente. Pelo caso especial de congruência temos que $\triangle AOH \equiv \triangle AOE$ e $\triangle BOE \equiv \triangle BOF$, assim sendo, $AE = AH = x$ e $BE = BF = y$. Defina $CF = z$ e $HD = w$. Pela hipótese, temos que:

$$(x + y) + CD = (y + z) + (x + w) \Rightarrow CD = z + w$$

Como CD não é tangente à circunferência pois, caso contrário, o quadrilátero seria circunscritível. Tomamos G tal que CG seja tangente a circunferência e defina $CG \cap AD = I$, perceba que pelo problema anterior, temos: $CG = CF = z$ e $GI = HI = k$. Dessa maneira, $ID = w - k$, mas analisando o triângulo CID isso é um absurdo pois $CI + ID = CD$ e CID é um triângulo. Então se a soma dos lados opostos de um quadrilátero forem iguais, então ele será circunscritível.

Problema 1. Seja $ABCDEF$ um hexágono circunscritível a uma circunferência. Mostre que $AB + CD + EF = AF + BC + DE$.

Problema 2. Dado um quadrilátero convexo $ABCD$ tal que AB e CD se intersectam em P e BC e AD intersectam-se em Q. Prove que o quadrilátero $ABCD$ é circunscritível se, e somente se, uma das seguintes condições é verdadeira:

$$AB + CD = BC + AD,\ AP + CQ = AQ + CP,\ BP + BQ = DP + DQ$$

Solução. $(\Rightarrow)$ Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscritível. Então provaremos que todas as condições são válidas. Sejam K, L, M e N os pontos de tangêcnia do círculo inscrito com os lados AB, BC, CD e DA. Então

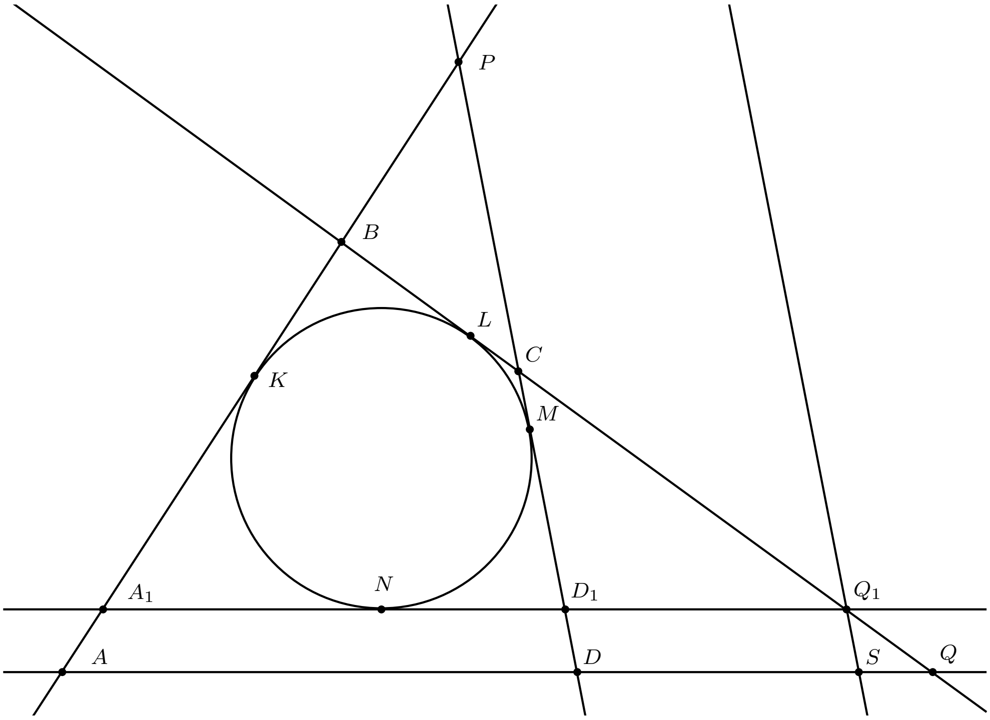
$$AB + CD = AK + BK + CM + DM = AN + BL + CL + DN = BC + AD$$

$$AP + CQ = AK + PK + QL - CL = AN + PM + QN - CM = AQ + CP$$

$$BP + BQ = AP - AB + BC + CQ = (AP + CQ) + (BC - AB) = AQ + CP + CD - AD = DP + DQ$$

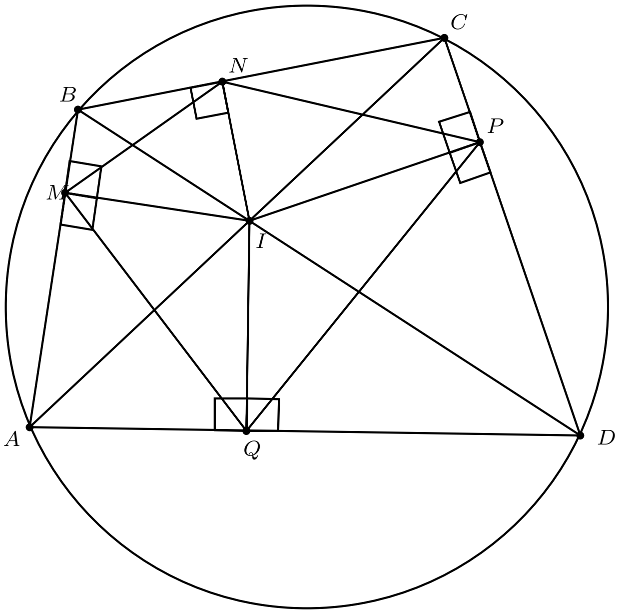
$(\Leftarrow)$ Suponhamos agora que $BP + BQ = DP + DQ$. Tomemos o círculo que é tangente aos lados AB, BC e CD. Assuma que a reta AD não é tangente ao círculo. Tomamos

A_1D_1 paralelo a AD tal que A_1D_1 é tangente ao círculo. Seja Q_1 a interseção de BC e A_1D_1 e S sobre AQ tal que Q_1S é paralelo a D_1D. Já que $BP + BQ = DP + DQ$ e $BP + BQ_1 = D_1P + D_1Q_1$, segue que $QS + SQ_1 = QQ_1$, absurdo pela desigualdade triangular, logo AD é tangente ao círculo também, portanto, $ABCD$ é circunscritível.



Problema 3. (IME) Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência. Seja I o ponto de encontro das diagonais AC e BD; M, N, P e Q são as projeções ortogonais de I sobre os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente. Prove que o quadrilátero $MNPQ$ é um quadrilátero circunscritível a uma circunferência com centro em I.

Solução. Como $ABCD$ é inscritível, temos que $\angle ABD = \angle ACD$. Observe que os quadriláteros $MBNI$ e $NCPI$ são inscritíveis, pois a soma dos ângulos opostos é 180°. Sendo assim, vemos que $\angle MBI = \angle MNI$ e $\angle PCI = \angle PNI$, como $\angle MBI = \angle PCI$, temos que $\angle MNI = \angle PNI$, portanto NI é bissetriz de MNP. Analogamente, MI é bissetriz de $\angle QMN$, QI é bissetriz de $\angle MQP$ e PI é bissetriz de $\angle QPN$, portanto, I é o ponto de encontro das bissetrizes do quadrilátero $MNPQ$, porntanto este é circunscritível.



Problema 4. (Seleção para a Olimpíada do Cone Sul - 98) No triângulo ABC, temos $BC = 2.AC$. Seja M o ponto médio de BC. A reta passando por M e tangente à circunferência inscrita em ABC encontra o lado AB no ponto N. Mostre que $\frac{AN}{AB} = \frac{1}{3}$.

Problema 5. (OIM - 1994/2) Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível. Suponha que existe uma semicircunferência com centro em AB, tangente aos outros três lados do quadrilátero.

- Demonstrar que $AB = AD + BC$.
- Calcular, em função de $x = AB$ e $y = CD$, a área máxima que pode alcançar um quadrilátero satisfazendo as condições do enunciado.

Problema 6. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Mostre que $ABCD$ é circunscritível se, e somente se, as circunferências inscritas nos triângulos ABC e CDA tocam a diagonal AC em um ponto comum.

Problema 7. Dizemos que um quadrilátero é bicêntrico se ele for inscritível e circunscritível simultaneamente. Mostre que a área de um quadrilátero bicêntrico pode ser calculada por $[ABCD] = \sqrt{abcd}$, onde a, b, c e d são os seus lados.

Problema 8. (Romênia - 1999) No quadrilátero convexo $ABCD$, as bissetrizes dos ângulos A e C encontram-se no ponto I. Mostre que $ABCD$ é circunscritível se, e somente se, $[AIB] + [CID] = [AID] + [BIC]$, onde $[XYX]$ denota a área do triângulo XYZ.

Problema 9. $ABCD$ é um quadrilátero convexo inscrito em um círculo de centro O, e com diagonais perpendiculares. Prove que a linha quebrada AOC divide o quadrilátero em duas partes de mesma área.

Problema 10. (USAMO - 91/5) Seja D um ponto arbitrário sobre o lado AB de um dado triângulo ABC e seja E um ponto de interseção do segmento CD com a tangente externa comum aos círculos inscritos nos triângulos ACD e BCD. Mostre que o ponto E descreve o arco de uma circunferência quando D varia sobre o lado AB.