Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 3

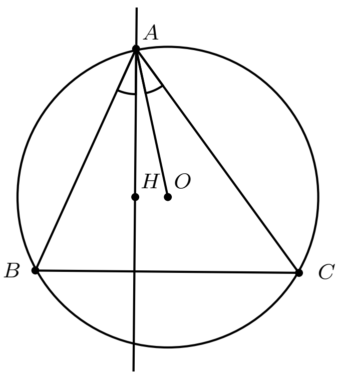
Prof. Rodrigo Pinheiro

Aula 4

Propriedades do ortocentro

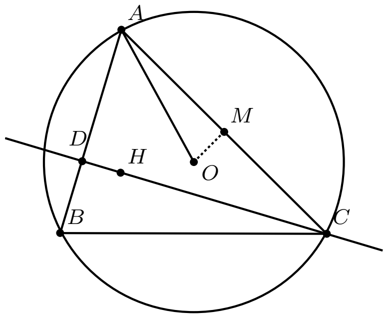
O ortocentro é o ponto de encontro das três alturas de um triângulo arbitrário. Se o triângulo for retângulo, é imediato que o ortocentro coincide com o vértice de ângulo reto. O ortocentro é exterior ao triângulo sempre que o triângulo for obtusângulo e é interior quando for acutângulo.

Teorema 1. Sejam H, O, o ortocentro e o circuncentro de um $\triangle ABC$, respectivamente. Então $\angle HAB = \angle OAC$.



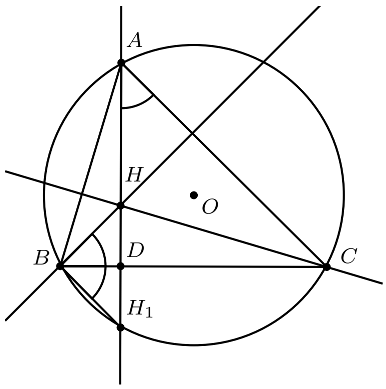
Demonstração. Considere o caso em que o triângulo é acutângulo. O caso em que o triângulo é obtusângulo é análogo e é um bom exercício. Tente! Seja $\angle HAB = \alpha$. Tem-se, $\angle ABC = 90° - \alpha$. Sabemos que $\angle AOC = 2.\angle ABC = 180° - 2.\alpha$. Mas, $\angle OAC = \angle OCA$, portanto $\angle OAC = \alpha$. Por isso, dizemos que AH e AO são isogonais (formam ângulos iguais com os lados adjacentes).

Problema 1. No triângulo acutângulo ABC, a distância do vértice A ao ortocentro é igual ao raio da circunferência circunscrita. Determine os possíveis valores do ângulo $\angle BAC$.

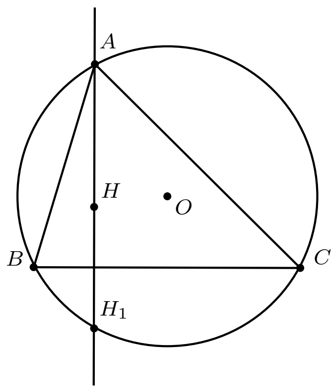


Solução. Sejam H e O o ortocentro e o circuncentro do triângulo ABC; D é o pé da altura relativa ao lado AB e M o ponto médio do lado AC. Então, como $AH = AO$, $\angle HAD = \angle OAM$, $\angle HDA = \angle OMA$, segue que os triângulos ADH e AMO são congruentes. Logo, $AD = AM = \frac{AC}{2}$. Logo, no triângulo ADC, temos $\cos A = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$, e como o triângulo é acutângulo temos $\angle BAC = 60°$.

Teorema 2. O simétrico do ortocentro em relação a cada um dos lados do triângulo está sobre o círculo circunscrito.
Demonstração. Considere o caso em que o triângulo é acutângulo. O caso em que o triângulo é obtusângulo será deixado como exercício. Seja D o pé da altura relativa ao lado BC e H_1 o ponto onde essa altura reencontra o circuncírculo (círculo circunscrito ao triângulo ABC). Logo $\angle HBC = \angle DAC = 90° - \angle C$. Mas $\angle H_1BD = \frac{\overset{\frown}{H_1C}}{2} = \angle H_1AC$. Então $\triangle HBD \equiv \triangle H_1BD \Rightarrow HD = DH_1$.



Problema 2. Usando régua e compasso, construa um triângulo ABC conhecendo apenas o vértice A, o ortocentro H e a circunferência circunscrita.
Solução. Façamos o esboço do triângulo:

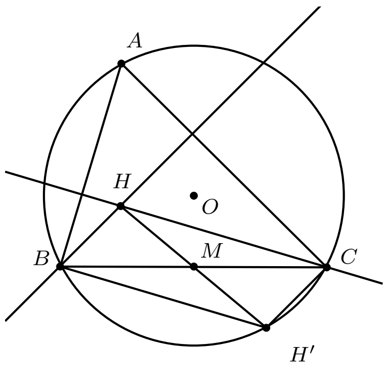


O prolongamento de AH encontra a circunferência circunscrita em um ponto H_1 tal que H_1 é o simétrico de H em relação a BC. Assim, BC é mediatriz do segmento HH_1.

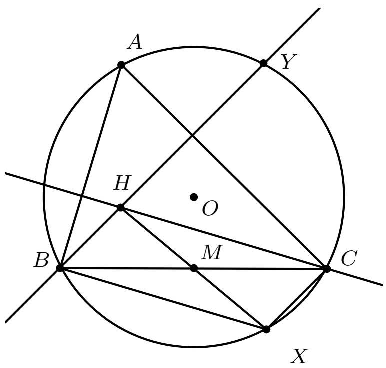
Portanto, fazemos a seguinte construção: ligamos AH até encontrar a circunferência circunscrita no ponto H_1. Então, construímos a mediatriz de HH_1, que encontra a circunferência circunscrita nos pontos B e C, e o triângulo ABC é construído.

Teorema 3. Os simétricos do ortocentro em relação a cada um dos pontos médios dos lados de um triângulo encontram-se sobre o círculo circunscrito.
Demonstração. Considere o caso em que o triângulo é acutângulo (Veja figura a seguir). O caso em que o triângulo é obtusângulo será deixado como exercício. Seja M o ponto médio do lado BC do triângulo ABC. H e N são o ortocentro e o simétrico de H em relação ao ponto M, respectivamente.

No quadrilátero $HBNC$, as diagonais se cortam os meio ($BM = MC$ e $HM = MN$). Logo, $HBNC$ é um paralelogramo, do modo que $\angle BNC = \angle BHC$. Mas, $\angle BHC = 180° - \angle A$, e assim, $\angle BAC + \angle BNC = \angle A + (180° - \angle A) = 180°$. Portanto $HBNC$ é inscritível e o ponto N encontra-se sobre o circuncírculo de ABC, como queríamos demonstrar.



Problema 3. (Cone Sul - 1998) Sejam H o ortocentro do triângulo ABC e M o ponto médio do lado BC. A reta HM intersecta o círculo circunscrito de ABC em X, pertencente ao arco BC que não contém A, e BH encontra o círculo circunscrito em Y. Mostre que $XY = BC$. **Solução.**

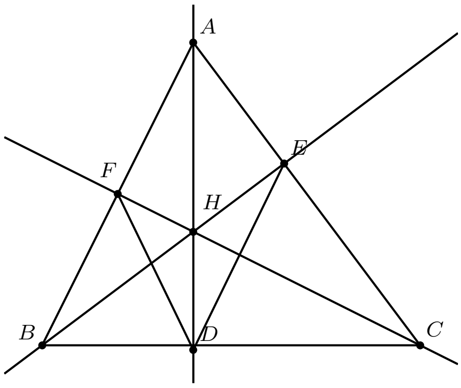


Como X está sobre o arco BC que não contém A e sobre a reta HM, é fácil ver que X coincide com o simétrico de H em relação ao ponto médio M. Além disso, o quadrilátero $BXCH$ é um paralelogramo, de modo que XC é paralelo a BH. Então, $BXCY$ é um trapézio isósceles, e portanto tem as diagonais iguais, ou seja, $XY = BC$.

Triângulo Órtico

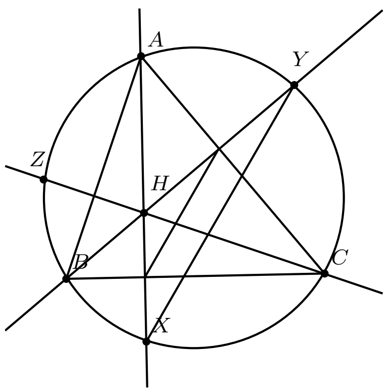
Considere um triângulo não retângulo ABC, e sejam D, E, F os pés das alturas de ABC. O triângulo DEF é chamado triângulo órtico do triângulo ABC.

Lema 1. O ortocentro H do triângulo ABC é o incentro de seu triângulo Órtico DEF.
Demonstração. Seja $\angle ABE = \alpha$. Então $\angle FCA = 90° - \angle A = \alpha$. Observe que o quadrilátero $BDFH$ é inscritível (pois $\angle BDH + \angle BFH = 180°$). Logo, $\angle FDH = \angle FBH = \alpha$. Analogamente, $\angle EDH = \alpha$. Portanto, H está na bissetriz do ângulo D. Do mesmo modo, é fácil verificar que H pertence a bissetriz de F; ou seja H é o incentro do triângulo DEF.



Problema 4. Usando apenas régua e compasso, construa um triângulo ABC conhecendo os pontos que são os simétricos do ortocentro em relação aos lados AB, BC e CA.
Solução. Sejam X, Y e Z os simétricos do ortocentro em relação a BC, CA e AB, respectivamente. Observe que XY é paralelo à reta que liga os pés das alturas relativas a BC e CA. Dessa forma, os lados do triângulo XYZ são paralelos, respectivamente, aos lados do triângulo órtico de ABC. Então, H é o incentro do triângulo XYZ.

Segue a seguinte construção: Primeiro, encontramos o circuncentro O do triângulo XYZ (encontro das mediatrizes dos lados) e construímos a circunferência circunscrita (com centro O e raio OX. Em seguida, construímos as bissetrizes dos ângulos de XYZ, que intersectam a circunferência circunscrita nos pontos A, B e C, determinando o triângulo ABC.



Problema 5. Sejam D, E e F os pontos médios dos lados AB, BC e AC do triângulo ABC, respectivamente. BL é a altura relativa ao lado AC. Mostre que $\angle DFE = \angle DLE$.

Problema 6. No triângulo ABC, as alturas AD e BE se cortam em H; M, N e P são os pontos médios de BC, AB e AH, respectivamente. Mostre que $\angle MNP = 90°$.

Problema 7. Prove que, em todo triângulo, a circunferência cujo diâmetro é um lado do triângulo passa pelos pés das alturas relativas aos outros dois lados.

Problema 8. As bissetrizes internas de um triângulo ABC encontram o círculo circunscrito novamente nos pontos M, N e P. Mostre que o incentro I do triângulo ABC é o ortocentro do triângulo MNP.

Problema 9. Sejam AD e BE as alturas relativas aos lados BC e AC, respectivamente, do triângulo ABC, H o ortocentro, M o ponto médio de AB e N o ponto médio de CH. Mostre que MN é perpendicular e passa pelo ponto médio de DE.

Problema 10. A bissetriz interna do ângulo A do triângulo ABC encontra o círculo circunscrito no ponto M. Verifique que M é o ponto médio do arco BC e que M é o circuncentro do triângulo BIC, em que I é o incentro do triângulo ABC.

Problema 11. Sejam O o circuncentro e H o ortocentro do triângulo ABC. Seja O_a o simétrico de O em relação ao lado BC. Mostre que O_a é o circuncentro do triângulo BCH.

Problema 12. Seja H o ortocentro do triângulo ABC. Mostre que os círculos circunscritos aos triângulos ABH, BCH e CAH têm todos o mesmo raio, o qual é igual ao circunraio do triângulo ABC.

Problema 13. As alturas relativas aos lados AB e AC do triângulo ABC encontram o circuncírculo de ABC nos pontos D e E, respectivamente. Mostre que $AD = AE$.

Problema 14. O triângulo ABC está inscrito em um círculo de centro O. Seja τ a circunferência que passa pelos pontos A, O e B. As retas CA e CB interceptam τ em D e E, respectivamente. Prove que CO é perpendicular a DE.

Problema 15. Construa um triângulo conhecendo apenas o circuncentro O, o ponto H, pé da altura relativa ao lado BC e o ponto D, pé da bissetriz interna do ângulo $\angle A$.

Problema 16. Prove que as três retas através dos pontos médios dos lados de um triângulo e paralelas às bissetrizes dos ângulos opostos são concorrentes em um ponto.

Problema 17. Seja ABC um triângulo acutângulo de ortocentro H e circuncentro O. A mediatriz do segmento AH corta AB no ponto P e AC no ponto Q. Demonstre que $\angle AOP = \angle AOQ$.

Problema 18. Sejam H, O o ortocentro e o circuncentro do triângulo ABC. AD, BE e CF são as alturas relativas aos vértices A, B e C. Suponha que OH seja paralelo a AC. Mostre que os lados do triângulo DEF estão em progressão aritmética.

Problema 19. Sejam AD, BE e CF as alturas do triângulo acutângulo ABC. A reta por D paralela a EF encontra os lados AC e AB nos pontos Q e R respectivamente. A reta EF intersecta BC no ponto P. Prove que a circunferência circunscrita ao triângulo PQR passa pelo ponto médio de BC.

Problema 20. Sejam H o ortocentro do triângulo ABC, não retângulo, e M o ponto médio do lado BC. A circunferência de diâmetro AM encontra a circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$ em um segundo ponto P. Mostre que os pontos P, H e M são colineares.

Problema 21. Seja ABC um triângulo acutângulo. Três retas LA, LB, LC são construídas através dos vértices A, B e C respectivamente de acordo com as seguintes regras: seja H o pé da altura traçada do vértice A para o lado oposto BC, seja SA o círculo com diâmetro AH; SA encontra os lados AB e AC em M e N respectivamente, onde M e N são distintos de A; então LA é a reta através de A perpendicular a MN. As retas LB e LC são construídas analogamente. Prove que LA, LB, LC são concorrentes.

Problema 22. É possível construirmos um triângulo sendo conhecidos apenas o ortocentro e dois dos pontos médios dos lados?

Problema 23. Considere três círculos congruentes concorrentes em um ponto P. Sejam A, B, C os outros pontos de interseção dos círculos. Então o raio comum destes três círculos é igual ao raio do círculo circunscrito de ABC, e P é o ortocentro de ABC.

Problema 24. Sejam H e O o ortocentro e o circuncentro do triângulo ABC. Mostre que a distância do ortocentro a um vértice é o dobro da distância do circuncentro ao lado oposto a este vértice.

Problema 25. Mostre que, em todo triângulo, o ortocentro H, o baricentro G e o circuncentro O são colineares. (A reta que contém estes pontos é chamada reta de Euler). Mostre ainda que H, G e O estão sempre na razão $HG : GO = 2 : 1$.

Problema 26. (Círculo dos Nove Pontos) Sejam H o ortocentro e O o circuncentro do triângulo ABC. M, N e P são os pontos médios dos lados BC, CA e AB, respectivamente; D, E e F são os pés das alturas relativas aos lados BC, CA e AB, respectivamente; R, S e T são os pontos médios de AH, BH e CH, respectivamente. Os nove pontos M, N, P, D, E, F, R, S, T estão sobre uma circunferência, com centro no ponto médio de OH e cujo raio é metade do raio do círculo circunscrito a ABC. O círculo que contém estes pontos é chamado círculo de Euler ou círculo dos nove pontos do triângulo ABC.

Problema 27. Prove que o raio do círculo dos nove pontos é igual a metade do raio do círculo circunscrito.

Problema 28. Seis diferentes pontos são escolhidos sobre uma circunferência. O ortocentro do triângulo formado por três destes pontos é ligado ao baricentro do triângulo formado pelos outros três. Prove que os 20 segmentos que podem ser determinados desta maneira são todos concorrentes.

Problema 29. Seja H o ortocentro do ABC. Prove que as retas de Euler dos triângulos ABC, BCH, CAH, ABH são todas concorrentes. Em que notável ponto ABC estas retas concorrem?

Problema 30. Seja H o ortocentro de um triângulo ABC, tal que $AC \neq BC$. O segmento que une os pontos médios de HC e AB intercepta a bissetriz do ângulo $\angle ACB$ no ponto N. Sabendo que o circuncentro do triângulo ABC pertence à reta que liga os pontos H e N, determine a medida do $\angle ACB$.

Problema 31. (OCSF) $ABCD$ é um paralelogramo, H é o ortocentro de ABC e O é o circuncentro de ACD. Prove que H, O e D são colineares.