Polos Olímpicos de Treinamento

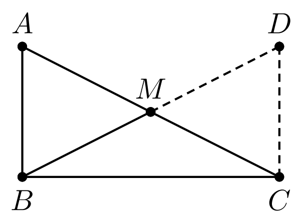
Curso de Geometria - Nível 3

Prof. Cícero Thiago

Aula 5

Pontos Notáveis II: Baricentro e reta de Euler

Propriedade 1. Num triângulo retângulo ABC, a mediana BM relativa à hipotenusa mede metade da hipotenusa AC.



Demonstração.
Seja D o ponto sobre o prolongamento da mediana BM tal que $BM = MD$. Os triângulos AMB e CMD são congruentes, pelo caso LAL. Daí, $AB = CD$ e $\angle BAM = \angle DCM$, ou seja, AB e CD são segmentos iguais e paralelos e portanto

$$\angle ABC = \angle DCB = 90^\circ.$$

Assim, os triângulos ABC e DCB são congruentes, pelo caso LAL, e portanto

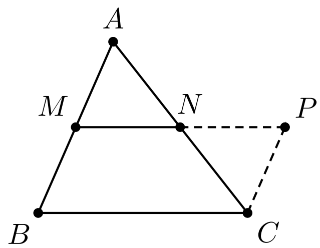
$$BD = AC \implies 2 \cdot BM = AC \implies BM = \frac{AC}{2} \cdot$$

Afirmação. Uma base média de um triângulo é um segmento que une os pontos médios de dois de seus lados.

Assim, todo triângulo possui exatamente três bases médias.

Propriedade 2. Sejam ABC um triângulo e M, N os pontos médios dos lados AB, AC, respectivamente. Então

$$MN \parallel BC \quad \text{e} \quad MN = \frac{BC}{2} \cdot$$



Demonstração.
Inicialmente, prolonguemos a base média MN até um ponto P tal que $MN = NP$. Em seguida, construímos o triângulo CNP. Note que os triângulos ANM e CNP são congruentes, pelo caso LAL. Daí, $CP = AM$ e $\angle MAN = \angle PCN$ e portanto

$$CP \parallel AM \quad \Longrightarrow \quad CP \parallel BM.$$

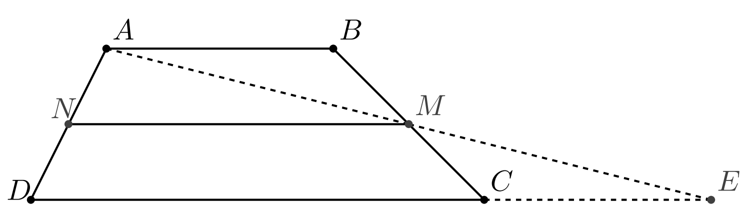
Assim, $MBCP$ é um paralelogramo, pois CP e BM são segmentos paralelos e iguais. Mas então $MP \parallel BC$ e

$$MP = BC \quad \Longrightarrow \quad 2MN = BC \quad \Longrightarrow \quad MN = \frac{BC}{2}\cdot$$

Afirmação. A base média de um trapézio é o segmento que une os pontos médios de seus lados não paralelos.

Propriedade 3. Seja $ABCD$ um trapézio de bases AB e CD, e sejam M e N os pontos médios dos lados BC e AD, respectivamente. Então,

$$MN \parallel AB,\ MN \parallel CD \quad \text{e} \quad MN = \frac{AB + CD}{2}.$$



Demonstração. Inicialmente, prolonguemos AM até encontrar DC no ponto E. É fácil ver que

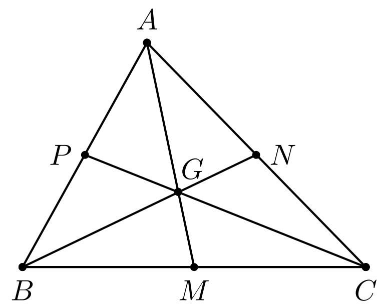
$$\Delta ABM \equiv \Delta CME\ (ALA) \Rightarrow AB = CE.$$

Portanto, MN é base média do triângulo ADE. Assim,

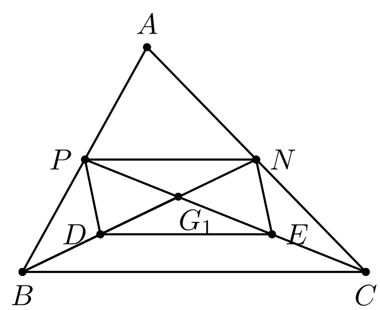
$$MN \parallel BE \Rightarrow MN \parallel DC \Rightarrow MN = \frac{DE}{2}.$$

Finalmente, $MN = \dfrac{DC + CE}{2} = \dfrac{DC + AB}{2}$.

Propriedade 4. As três medianas de um triângulo intersectam - se num mesmo ponto, chamado **baricentro**, que divide cada uma das medianas em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra.



Demonstração.



Sejam N e P os pontos médios dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, D e E os pontos médios de BG_1 e CG_1, respectivamente. Então,

$$NP \parallel BC \text{ e } NP = \frac{BC}{2}$$

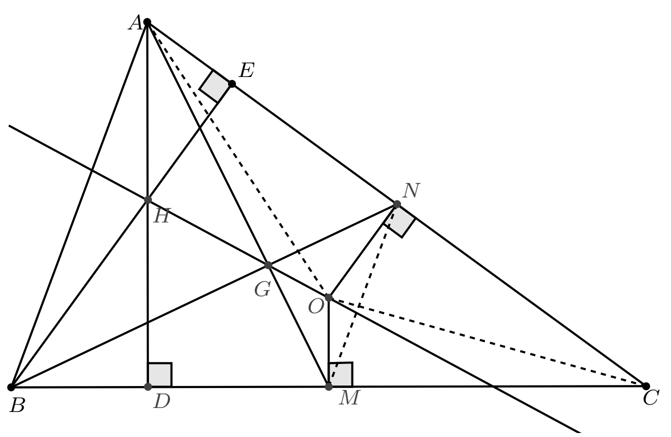
e

$$DE \parallel BC \text{ e } DE = \frac{BC}{2}$$

portanto, $PDEN$ é uma paralelogramo. Com isso, $BD = DG_1 = G_1N$, $CE = EG_1 = G_1P$, então $BG_1 = 2G_1N$ e $CG_1 = 2G_1P$. De maneira análoga, as medianas AM e BN intersectam - se em um ponto G_2 tal que $AG_2 = 2G_2M$ e $BG_2 = 2G_2N$. Encontramos, então, dois pontos distintos G_1 e G_2, no interior do segmento BN que o dividem na mesma razão, o que é uma contradição logo, $G_1 = G_2 = G$. Portanto, as três medianas intersectam - se em um mesmo ponto G que chamaremos de baricentro.

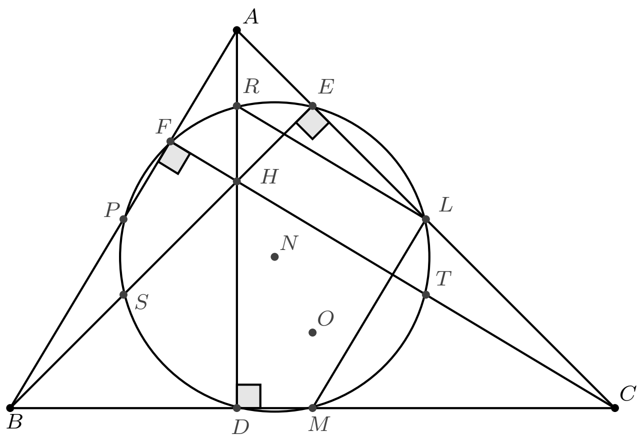
Propriedade 5. O ortocentro, o baricentro e o circuncentro de um triângulo, não equilátero, são colineares. A reta determinada por esses pontos é chamada de **Reta de Euler**.

Demonstração.
Sejam M e N os pontos médios de BC e AC, respectivamente. Então, $MN \parallel AB$ e $MN = \frac{AB}{2}$. O teorema 1 da aula 4 garante que $\angle BAD = \angle OAC$. Como O é o circuncentro então $OA = OC$ e, com isso, $\angle OAC = \angle OCA$. O quadrilátero $MCNO$ é inscritível então $\angle OCA = \angle NCO = \angle OMN$ e $\angle MON = 180^0 - \angle ACB$. Além disso, o quadrilátero $DCEH$ também é inscritível e, com isso, $\angle DHE = 180^0 - \angle ACB$. Como $\angle DHE = \angle AHB$ concluímos que o triângulo AHB é semelhante ao triângulo MNO e, com isso, $\frac{AB}{MN} = \frac{AH}{OM} = 2$. Temos que $\angle HAG = \angle GMO$ pois AH é paralelo a OM e, como G é o baricentro, $\frac{AG}{GM} = 2$. Portanto, o triângulo AHG é semelhante ao triângulo GMO e, com isso, $\angle HGA = \angle MGO$ provando então que H, G e O estão alinhados e $HG = 2GO$.



Propriedade 6. Os pés das alturas de um triângulo, os pontos médios do três lados e os pontos médios dos segmentos que ligam os vértices ao ortocentro estão sobre uma circunferência chamada **Circunferência dos 9 pontos**.

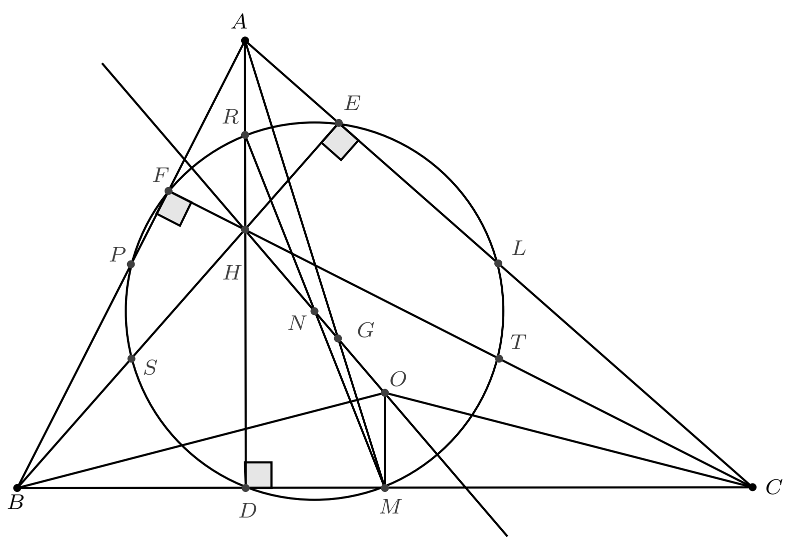
Demonstração. Queremos provar que M, L, P, D, E, F, R, S e T são concíclicos. É suficiente provar que R e D estão sobre a circunferência circunscrita ao triângulo MLP, pois o restante é análogo. Considere a circunferência Γ de diâmetro RM. É fácil ver que D pertence a Γ. Por outro lado, $RL \parallel HC$, $LM \parallel AB$ e $HC \perp AB$, o que implica que $\angle RLM = 90°$. Portanto, L (e por simetria P) pertence a Γ.



Propriedade 7. O centro da circunferência dos 9 pontos é o ponto médio do segmento formado pelo ortocentro e pelo circuncentro.

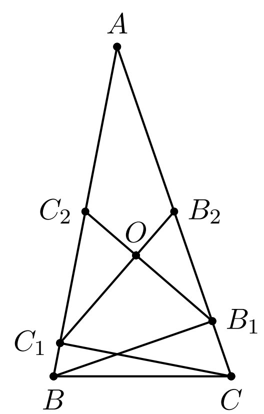
Demonstração.

Seja RM um diâmetro da circunferência dos 9 pontos e seja N a interseção de RM e OH. Como R é ponto médio de AH então $RH = OM$. Além disso, $AH \parallel OM$. Portanto, $\Delta RHN \equiv \Delta NOM$, $RN = NM$ e $HN = ON$.



Exercícios Resolvidos

1. (OBM) Considere um triângulo acutângulo ABC com $\angle BAC = 30°$. Sejam B_1, C_1 os pés das alturas relativas aos lados AC, AB, respectivamente, e B_2, C_2 os pontos médios dos lados AC, AB, respectivamente. Mostre que os segmentos B_1C_2 e B_2C_1 são perpendiculares.



Solução.

Seja O a interseção entre B_1C_2 e B_2C_1. O segmento B_1C_2 é uma mediana do triângulo retângulo AB_1B e portanto

$$AC_2 = B_1C_2 \quad \text{e} \quad \angle C_2B_1A = \angle BAB_1 = 30°.$$

Analogamente, $AC_1B_2 = 30°$. Daí,

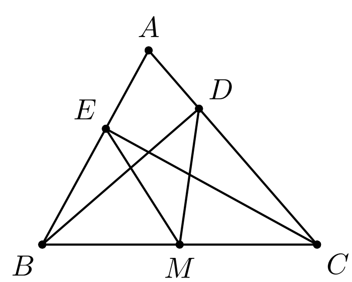
$$\angle BC_2B_1 = \angle C_2B_1A + \angle BAB_1 = 60°$$

e portanto

$$\angle C_1OC_2 = 180° - \angle BC_2B_1 - \angle AC_1B_2 = 90°.$$

2.Sejam ABC um triângulo e M o ponto médio do lado BC. Se D, E são os pés das alturas relativas aos lados AC, AB, respectivamente, prove que $ME = MD$.

Solução.



Note que ME é mediana relativa à hipotenusa do triângulo BEC. Daí,

$$ME = BM = CM$$

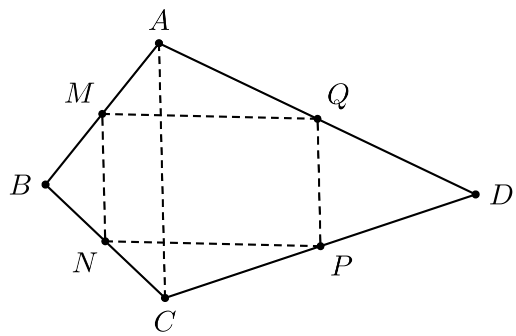
e, analogamente,

$$MD = BM = CM.$$

Assim, $ME = MD$.

3. Dado um quadrilátero $ABCD$, prove que os pontos médios M, N, P, Q dos lados AB, BC, CD, DA formam um paralelogramo.

Solução.



Temos

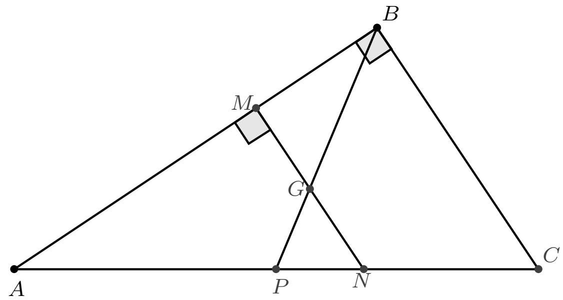
- Triângulo ABC: $MN \parallel AC$ e $MN = AC/2$.
- Triângulo DAC: $PQ \parallel AC$ e $PQ = AC/2$.

Assim, $MN \parallel PQ$ e $MN = PQ$, isto é, $MNPQ$ é paralelogramo.

4. (OBM) Seja N o ponto do lado AC do triângulo ABC tal que $AN = 2NC$ e M o ponto do lado AB tal que MN é perpendicular a AB . Sabendo que $AC = 12\ cm$ e que o baricentro G do triângulo ABC pertence ao segmento MN, determine o comprimento do segmento BG.
OBS: Baricentro é o ponto de interseção das medianas do triângulo.

Solução.

Se BP é uma mediana do triângulo então $AP = CP = 6$ e $PN = 2$. Como G é o baricentro do triângulo então $\dfrac{PG}{GB} = \dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{PN}{NC} = \dfrac{1}{2}$, assim, pela recíproca do teorema de Tales, GN é paralelo a BC e $\angle B = 90^\circ$. Como o triângulo ABC é retângulo então $AP = CP = BP = 6$. Com isso, $BG = 4$ e $GP = 2$.



5. Em um triângulo não equilátero, a reta que passa pelo baricentro e pelo incentro é paralela a um dos lados triângulo. Demonstre que os lados do triângulo estão em progressão aritmética.

Solução.

Seja AD a bissetriz relativa ao vértice A, I o incentro, AM a mediana relativa ao vértice A e G o baricentro. Sejam a, b e c as medidas dos lados BC, CA e AB, respectivamente. Pelo teorema da bissetriz interna é fácil provar que $\dfrac{AI}{ID} = \dfrac{b+c}{a}$. Como a reta que passa pelo baricentro G e pelo incentro I é paralela a um dos lados, pelo teorema de Tales, temos que $2 = \dfrac{AG}{GM} = \dfrac{AI}{ID} = \dfrac{b+c}{a}$, ou seja, $b + c = 2a$. Portanto, os lados do triângulo formam uma progressão aritmética.

Exercícios Propostos

Problema 1. Sejam ABC um triângulo e M o ponto médio de BC. Se $AM = BM = CM$, prove que $\angle BAC = 90°$.

Problema 2. (Austrália) Sejam ABC um triângulo e P um ponto em seu interior de modo que $\angle PAC = \angle PBC$. Se L, M são os pés das perpendiculares por P aos lados BC, AC, respectivamente, e D é o ponto médio de AB, prove que $DL = DM$.

Problema 3. Uma reta r passa pelo baricentro de um triângulo ABC deixando o vértice A em um semiplano e os vértices B e C no outro semiplano determinado por r. As projeções de A, B e C sobre a reta r são M, N e P, respectivamente. Prove que $AM = BN + CP$.

Problema 4. (OBM) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, onde N é o ponto médio de DC, M é o ponto médio de BC, e O é a interseção entre as diagonais AC e BD. Mostre que O é o baricentro do triângulo AMN se, e somente se, $ABCD$ é um paralelogramo.

Problema 5. Prove que se a reta de Euler passa pelo incentro do triângulo, então o triângulo é isósceles.

Problema 6. (Bulgária) Seja ΔABC um triângulo isósceles ($AC = BC$) tal que A_1, B_1 e C_1 são os pontos médios de BC, AC e AB, respectivamente. Os pontos A_2 e B_2 são os simétricos de A_1 e B_1 com relação ao lado AB. Seja M a interseção de CA_2 e A_1C_1 e seja N a interseção de CB_2 e B_1C_1. Seja P a interseção de AN e BM, prove que $AP = BP$.

Problema 7. (Portugal) No triângulo ABC as medianas dos lados AB e AC são perpendiculares. Sabendo que $AB = 6$ e $AC = 8$, determine BC.

Problema 8. (Bulgária) Os pontos A_1, B_1 e C_1 estão sobre os lados BC, CA e AB do triângulo ABC, respectivamente, tais que AA_1, BB_1 e CC_1 concorrem no ponto M. Prove que se M é o baricentro do triângulo $A_1B_1C_1$ então M é também o baricentro do triângulo ABC.

Problema 9. (Estônia) As medianas relativas aos vértices A e B do triângulo ABC são perpendiculares. Prove que AB é o menor lado do triângulo ABC.

Problema 10. (OCM) Seja ABC um triângulo tal que as medianas BM e CN, que se cortam em G, são iguais. Prove que o triângulo ABC é isósceles.

Problema 11. Prove que a soma dos quadrados das distâncias de um ponto P aos vértices de um triângulo ABC é mínima quando P é o baricentro do triângulo.

Problema 12. (Espanha) Seja G o baricentro do triângulo ABC. Se

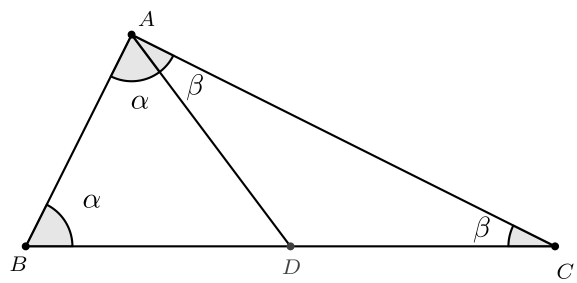
$$AB + GC = AC + GB,$$

prove que o triângulo é isósceles.

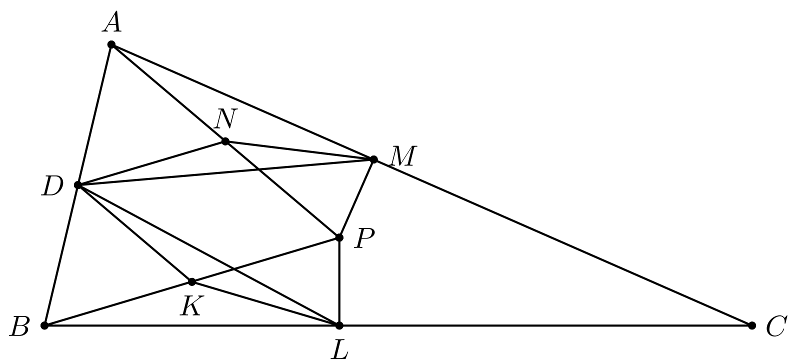
Problema 13. (OBM) Sejam ABC um triângulo acutângulo e F o seu ponto de Fermat, isto é, o ponto interior ao triângulo ABC tal que os três ângulos $\angle AFB$, $\angle BFC$ e $\angle CFA$, medem 120 graus. Para cada um dos triângulos ABF, ACF e BCF trace a sua reta de Euler, ou seja, a reta que liga o seu circuncentro e o seu baricentro. Prove que essas três retas concorrem em um ponto.

Soluções

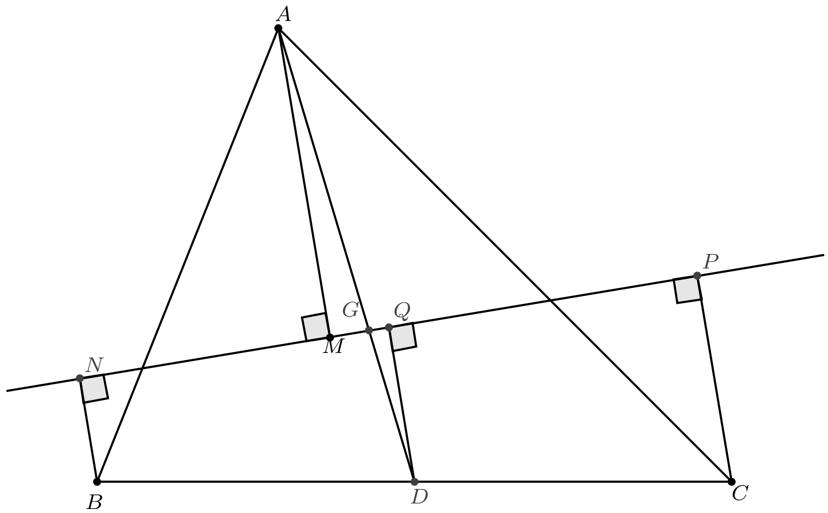
1. Se $AD = BD = CD$, então $\angle ABD = \angle BAD = \alpha$ e $\angle DAC = \angle ACD = \beta$. A soma dos ângulos internos do triângulo ABC garante que $\alpha + \beta = 90°$, ou seja, $\angle A = 90°$.



2. Seja N o ponto médio de AP e K o ponto médio de BP. Então, $AN = NM = NP$ e $LK = BK = KP$. Com isso, $\angle PNM = 2\angle PAC = 2\angle PBC = \angle PKL$. Além disso, DN e DK são bases médias do triângulo ABP assim, $DN \parallel BP$, $DN = \dfrac{BP}{2}$, $DK \parallel AP$ e $DK = \dfrac{AP}{2}$. Portanto, $DNPK$ é um paralelogramo e $\angle DNP = \angle DKP$. Finalmente, $\Delta DNM \equiv \Delta DKL$, pelo caso LAL. Assim, $DL = DM$.

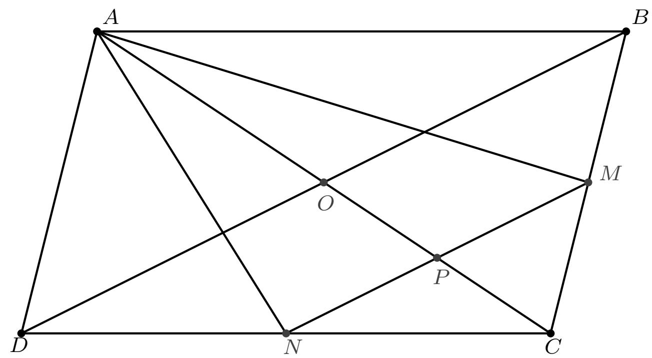


3. Seja AD um mediana e Q o ponto médio de NP. Então, DQ é a base média do trapézio $NBCP$ assim $DQ \parallel BN$ e $DQ = \dfrac{BN + CP}{2}$. Como G é o baricentro do triângulo ABC então $AG = 2GD$. É fácil ver que $\Delta AMG \sim \Delta GQD$, então $\dfrac{AM}{2} = DQ$. Portanto, $AM = BN + CP$.



4. ($\Rightarrow$) Suponha que $ABCD$ é um paralelogramo, então $AO = OC$ e $BO = BD$. Se M e N são os pontos médios de BC e CD então $MN \parallel BD$ e $MN = \dfrac{BD}{2}$. É fácil concluir que P é o ponto de médio de OC então $MP \parallel BO$, $MP = \dfrac{BO}{2}$, $NP \parallel DO$ e $NP = \dfrac{DO}{2}$. Portanto, $NP = PM$ e $AO = 2OP$, ou seja, O é o baricentro de AMN.

($\Leftarrow$) Suponha que O é o baricentro do triângulo AMN então $NP = PM$ e $AO = 2OP$. Se M e N são os pontos médios de BC e CD então $MN \parallel BD$ e $MN = \dfrac{BD}{2}$. É fácil concluir que P é o ponto de médio de OC então $OP = PC$, $MP \parallel BO$, $MP = \dfrac{BO}{2}$, $NP \parallel DO$ e $NP = \dfrac{DO}{2}$. Daí, $AO = OC$ e $DO = OB$, ou seja, $ABCD$ é um paralelogramo.



5. Sejam O o circuncentro, I o incentro e H o ortocentro do triângulo ABC. As retas AI e BI intersectam o círculo circunscrito do triângulo ABC nos pontos A_1 e B_1. Suponha que o triângulo ABC não é isósceles, então $\dfrac{OI}{IH} = \dfrac{OA_1}{AH}$ e $\dfrac{OI}{BH} = \dfrac{OB_1}{BH}$. Como $OB_1 = OC_1$ então $AH = BH$ e, portanto $AC = BC$. Contradição.

6. Como $CC_1 \parallel A_1A_2$ e $CC_1 = A_1A_2$, temos que $CC_1A_2A_1$ é um paralelogramo. Então, $A_1M = C_1M$. Mas $A_1B_1C_1B$ é também um paralelogramo e, portanto, a interseção BM e AC é B_1. Então, P está sobre a mediana BB_1. Analogamente, P está sobre a mediana AA_1. No triângulo isósceles ABC as medianas AA_1 e BB_1 possuem o mesmo comprimento. Portanto, $AP = \dfrac{2}{3}AA_1 = \dfrac{2}{3}BB_1 = BP$.

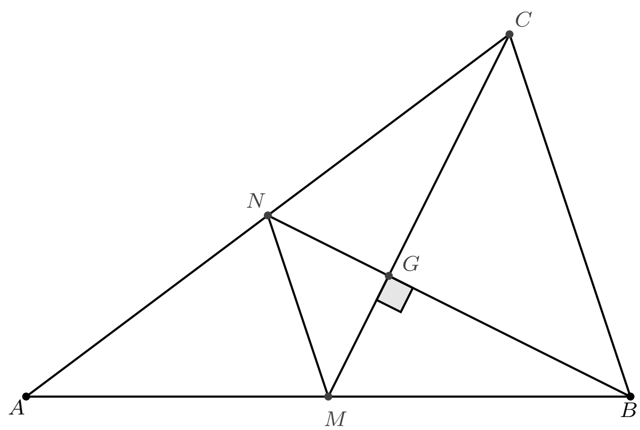
7. Sejam M e N os pontos médios de AB e AC, respectivamente, e G o ponto de encontro das medianas MC e NB. Aplicando o teorema de Pitágoras BIM e CNI, temos:

$$GM^2 + 4GN^2 = GM^2 + GB^2 = BM^2 = 3^2 = 9$$

e

$$4GM^2 + GN^2 = GC^2 + GN^2 = CN^2 = 4^2 = 16.$$

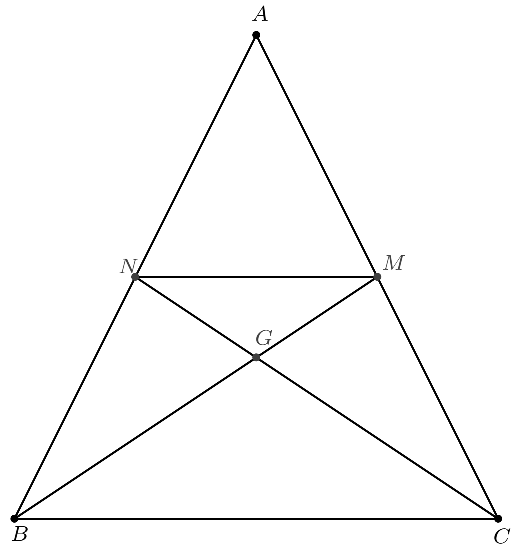
Deste modo, $5GM^2 + 5GN^2 = 9 + 16 = 25$, logo $NM = \sqrt{5}$. Portanto, $BC = 2\sqrt{5}$.



8. Seja M o baricentro do triângulo $A_1B_1C_1$. Seja A_2 um ponto sobre a reta MA tal que $B_1A_1C_1A_2$ é um paralelogramo. Os pontos B_2 e C_2 são construídos analogamente. Como $A_1C_1 \parallel A_1B_1 \parallel C_1B_2$ então os pontos A_2, C_1 e B_2 são colineares e C_1 é o ponto médio de A_2B_2. O mesmo é verdade para os pontos A_2, B_1 e C_2 e C_2, A_1 e B_2. Vamos mostrar que $A_2 = A$, $B_2 = B$ e $C_2 = C$, o que resolve o problema. Assuma que $A_2 \neq A$ e A está entre A_2 e M. Então C_2 está entre C e M, B está entre B_2 e M e consequentemente A_2 está entre A e M, que é uma contradição.

9. As medianas intersectam - se no ponto M e a mediana que parte do vértice C intersecta AB no ponto F. Então, F é o ponto médio da hipotenusa do triângulo retângulo ABM, ou seja, $AB = 2FM$. Como M divide a mediana CF na razão $2 : 1$, então $AB = CM$. O maior ângulo do triângulo AMC é o ângulo obtuso AMC, portanto AC é o maior lado deste triângulo. Assim, $AC > MC = AB$. De maneira análoga $BC > AB$.

10. Seja $BM = CN = m$. Como G é o baricentro de ABC, temos $GM = \dfrac{m}{3} = GN$ e $BG = \dfrac{2m}{3} = CG$. Daí, segue que os triângulos BGN e CGM são congruentes (pelo caso LAL), de modo que $BN = CM$. Logo, $AB = 2 \cdot BN = 2 \cdot CM = AC$, e o triângulo ABC é isósceles.



11. Seja ABC um triângulo com $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$. Seja M o ponto médio de BC, G o baricentro do triângulo ABC e P um ponto qualquer. Usando que, a soma dos quadrados de dois dos lados de um triângulo é igual a duas vezes o quadrado da mediana relativa ao terceiro lado mais a metade do quadrado do terceiro lado (a demonstração desse resultado usa lei dos Cossenos e será provado na aula de relações métricas), no triângulo PBC com mediana PM temos:

$$PB^2 + PC^2 = 2PM^2 + \frac{a^2}{2}. \text{ (I)}$$

O baricentro G é tal que $GA = 2GM$. Faça $GM = m$; $GA = 2m$ e tome H em AG tal que $GH = AH = m$. Assim, o triângulo HPM, com mediana PG satisfaz

$$PH^2 + PM^2 = 2PG^2 + \frac{1}{2}(2m)^2 = 2PG^2 + 2m^2 \text{ (II)}$$

e o triângulo APG com mediana PH satisfaz

$$PA^2 + PG^2 = 2PH^2 + \frac{1}{2}(2m)^2 = 2PH^2 + 2m^2. \text{ (III)}$$

Somando (I) e (III)

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PG^2 = 2PM^2 + \frac{a^2}{2} + 2PH^2 + 2m^2 =$$

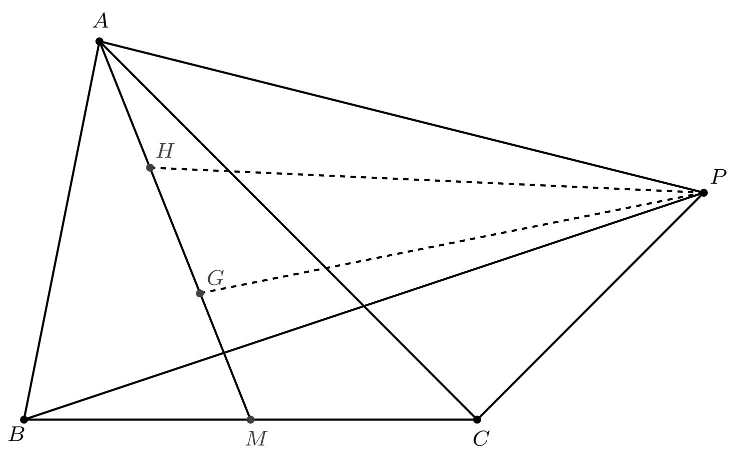
$$= 2(PM^2 + PH^2) + \frac{a^2}{2} + 2m^2 = \text{ por (II)}$$

$$2(2PG^2 + 2m^2) + \frac{a^2}{2} + 2m^2 =$$

$$4PG^2 + 6m^2 + \frac{a^2}{2}.$$

Portanto, $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PG^2 + 6m^2 + \frac{a^2}{2}$. (IV)

Como o triângulo a e m são constantes, $PA^2 + PB^2 + PC^2$ é mínimo quando $PG = 0$, ou seja, $P = G$ é o baricentro do triângulo ABC.



12. Sejam D, E e F os pontos médios dos lados BC, AC e AB, respectivamente. Dividindo por 2 a condição do enunciado temos

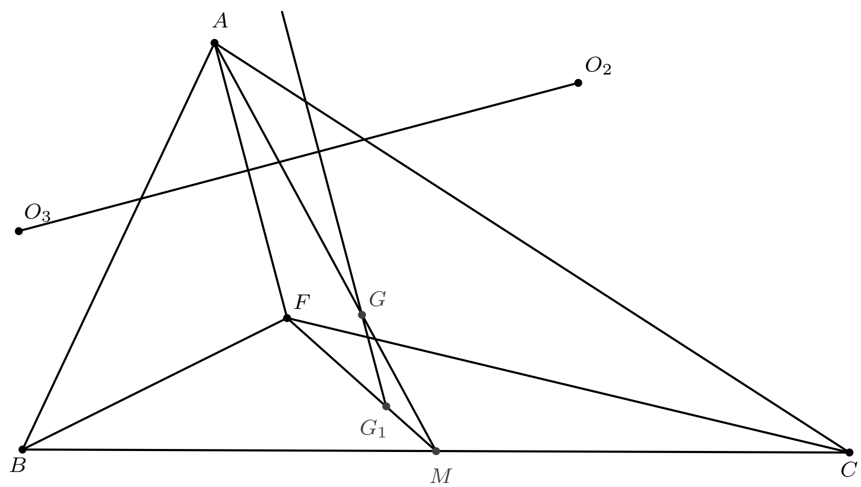
$$FA + FG = EA + EG,$$

ou seja, os pontos F e E estão sobre uma elipse de focos A e G. Seja M o ponto médio de EF, M está sobre a mediana AD e não é o centro a elipse (ponto médio de AG), portanto EF é perpendicular a AD e, então, AD além de mediana é também uma altura fazendo com que o triângulo seja isósceles.

13. Construa um triângulo equilátero BXC, externo a ABC. O ponto O_1 é o circuncentro de BFC e também de BXC. Como G é o baricentro do triângulo ABC então:

$$\frac{AG}{GM} = 2 = \frac{XO_1}{O_1M} \Rightarrow O_1G \parallel XF.$$

Mas $O_3A = O_3F$ e $O_2A = O_2F \Rightarrow AF \perp O_2O_3 \Rightarrow O_1G \perp O_2O_3$. Analogamente, temos $O_2G \perp O_1O_3$ e $O_3G \perp O_2O_3 \Rightarrow G$ é ortocentro do triângulo $O_1O_2O_3$. Sendo G_1 o baricentro do triângulo BFC temos $\dfrac{FG_1}{G_1M} = 2 = \dfrac{AG}{GM} \Rightarrow G_1G \parallel AF \Rightarrow G_1G \perp O_2O_3 \Rightarrow$ como G é o ortocentro de $O_1O_2O_3$, então G_1 está na altura relativa a O_2O_3. Portanto, O_1G_1, O_2G_2 e O_3G_3 são concorrentes em G (seu ortocentro).



Bibliografia

1. Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses
For Junior Section, vol. 1
Xu Jiagu

2. Puntos Notables - Teoría - Demostraciones - Trazos Auxiliares
440 problemas resueltos e propuestos
Julio Orihuela Bastidas
Editorial Cuzcan

3. Geometría
Radmila Bulajich Manfrino e José Antonio Gómez Ortega
Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas

4. Tópicos de Matemática Elementar, vol. 2
Geometria Euclidiana Plana
Antonio Caminha Muniz Neto

SBM

5. Episodes in Nineteenth and Twentieth Euclidean Geometry
Ross Honsberger
MAA

6. Problems in Plane and Solid Geometry, vol. 1 - Plane Geometry
Viktor Prasolov

7. Advanced Euclidean Geometry
Alfred Posamentier

8. Lessons in Geometry
I. Plane Geometry
Jacques Hadamard
AMS

9. Hadamard's Plane Geometry
A Reader's Companion
Mark Saul
AMS

10. Coleção Elementos da Matemática
Geometria Plana, vol. 2
Marcelo Rufino de Oliveira e Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

11. Olimpíadas Cearenses de Matemática, Ensino Médio, 1981 - 2005
Emanuel Carneiro, Francisco Antônio M. de Paiva e Onofre Campos

12. Problemas de las Olimpiadas Matematicas del Cono Sur (I a IV)
Fauring - Wagner - Wykowski - Gutierrez - Pedraza - Moreira
Red Olímpica

13. Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 9 - Geometria Plana
Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo

14. Olimpiada Matemática Española
15000 problemas de diferentes Olimpiadas de Matemática en el mundo