Polos Olímpicos de Treinamento

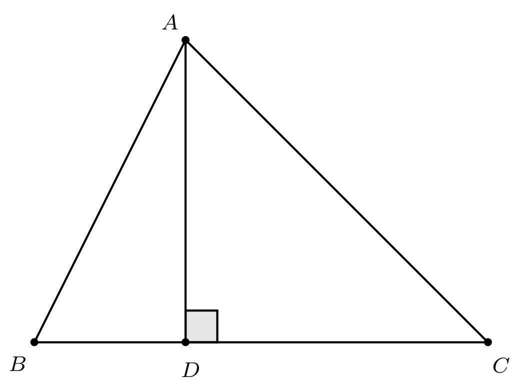
Curso de Geometria - Nível 3

Prof. Cícero Thiago

Aula 6

Relações entre áreas

Teorema 1. (Fórmula tradicional.)



A área do triângulo ΔABC pode ser calculada por $[\Delta ABC] = \dfrac{BC \cdot AD}{2}$.

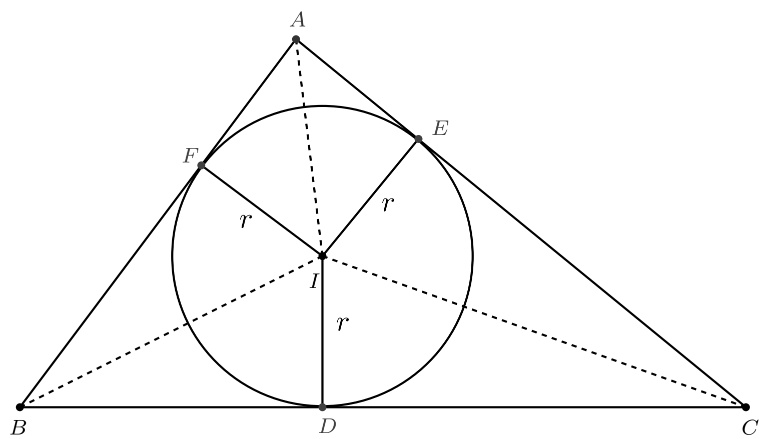
Teorema 2. (Área de um triângulo em função do raio da circunferência inscrita.)

Sejam a, b e c as medidas dos lados BC, CA e AB do triângulo ΔABC, respectivamente, e seja r a medida do raio da circunferência inscrita. Então, a área do triângulo ΔABC pode ser calculada por

$$[\Delta ABC] = p \cdot r,$$

em que $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Demonstração.



$$[\Delta ABC] = [\Delta BIC] + [\Delta CIA] + [\Delta AIB] \Leftrightarrow$$

$$[\Delta ABC] = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} \Leftrightarrow$$

$$[\Delta ABC] = \left(\frac{a + b + c}{2}\right) \cdot r \Leftrightarrow$$

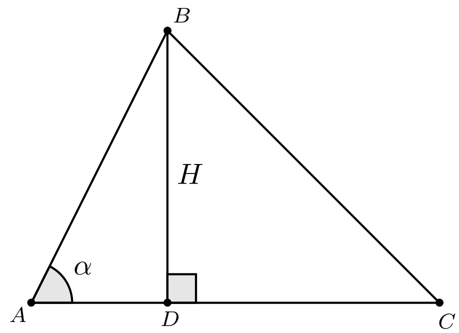
$$[\Delta ABC] = p \cdot r.$$

Teorema 3. (Fórmula trigonométrica da área de um triângulo.)

Sejam a, b e c as medidas dos lados BC, CA e AB do triângulo ΔABC, respectivamente. A área do triângulo ΔABC pode ser calculada por

$$[\Delta ABC] = \frac{b \cdot c \cdot sin\angle A}{2} = \frac{a \cdot c \cdot sin\angle B}{2} = \frac{a \cdot b \cdot sin\angle C}{2}.$$

Demonstração. Vamos demonstrar uma das igualdades. As outras são análogas.



Seja $\angle A = \alpha$. Temos que

$$[\Delta ABC] = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{a \cdot H}{2}.$$

Por outro lado, no triângulo ΔABD, temos $\sin\alpha = \dfrac{H}{c} \Leftrightarrow H = c \cdot \sin\alpha$, então

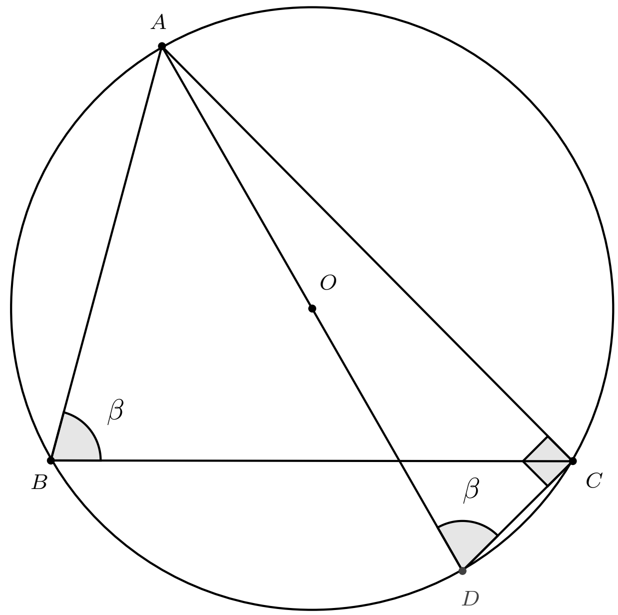
$$[\Delta ABC] = \frac{a \cdot c \cdot \sin\alpha}{2}.$$

Teorema 4. (Área de um triângulo em função do raio da circunferência circunscrita.)

Sejam a, b e c as medidas dos lados BC, CA e AB do triângulo ΔABC, respectivamente, e seja R o raio da circunferência circunscrita. Então, a área do triângulo $[\Delta ABC]$ pode ser calculada por

$$[\Delta ABC] = \frac{abc}{4R}.$$

Demonstração.



Sejam a, b e c as medidas dos lados BC, CA e AB do triângulo ΔABC, respectivamente. Temos que

$$[\Delta ABC] = \frac{a \cdot c \cdot \sin \beta}{2}.$$

Por outro lado, seja AD um diâmetro então, no ΔACD, temos que

$$\sin \beta = \frac{b}{2R}.$$

Portanto,

$$[\Delta ABC] = \frac{abc}{4R}.$$

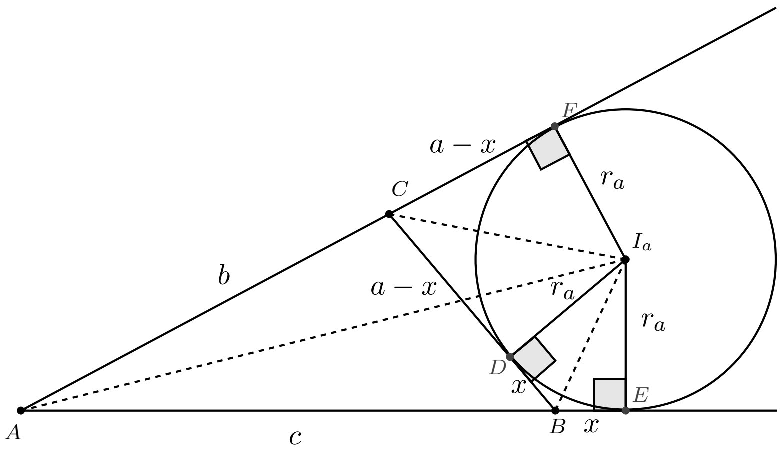
Teorema 5. (Área de um triângulo em função do raio de uma circunferência ex - inscrita.)

Sejam a, b e c as medidas dos lados BC, CA e AB do triângulo ΔABC, respectivamente, e sejam r_a, r_b e r_c os raios das circunferências ex - inscritas relativas aos lados a, b e c, respectivamente. Então, a área do triângulo ΔABC pode ser calculada por

$$[\Delta ABC] = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c),$$

em que $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Demonstração.



Pela propriedade dos segmentos tangentes, temos que $DB = BE = x$ e $DC = CF = a - x$. Então,

$$[\Delta ABC] = [\Delta AI_aE] + [\Delta AI_aF] - 2[\Delta BCI_a] \Leftrightarrow$$

$$[\Delta ABC] = \frac{(c+x)\cdot r_a}{2} + \frac{(b+a-x)\cdot r_a}{2} - 2\cdot\frac{a\cdot r_a}{2} \Leftrightarrow$$

$$[\Delta ABC] = \frac{r_a}{2}\cdot(a+b+c-2a) = \frac{r_a}{2}\cdot(2p-2a) = r_a(p-a).$$

Analogamente,

$$[\Delta ABC] = r_b(p-b) = r_c(p-c),$$

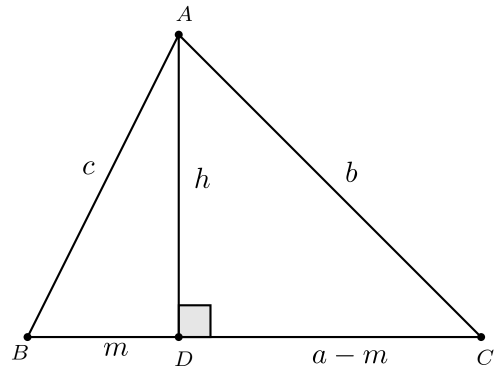
Teorema 6. (Fórmula de Heron.)

Sejam a, b e c as medidas dos lados BC, CA e AB do triângulo ΔABC, respectivamente. Então, a área do triângulo ΔABC pode ser calculada por

$$[\Delta ABC] = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)},$$

em que $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Demonstração.



Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos ΔABD e ΔACD, temos:
1. $c^2 = m^2 + h^2$.
2. $b^2 = (a - m)^2 + h^2$.

De (2), temos:

$$b^2 = (a - m)^2 + h^2 \Leftrightarrow$$
$$b^2 = a^2 - 2am + m^2 + h^2 \Leftrightarrow$$
$$b^2 = a^2 - 2am + c^2 \Leftrightarrow$$
$$m = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Substituindo em (1), temos:

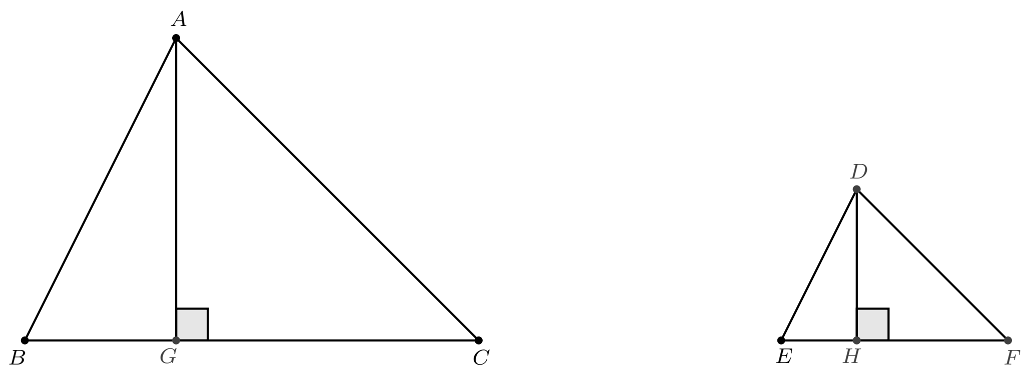
$$c^2 = \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2 + h^2 \Leftrightarrow$$
$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$h^2 = \left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) \cdot \left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) \Leftrightarrow$$
$$h^2 = \left(\frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) \cdot \left(\frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a}\right) \Leftrightarrow$$
$$4a^2h^2 = [(a + c)^2 - b^2] \cdot [(b^2 - (a - c)^2] \Leftrightarrow$$
$$4a^2h^2 = (a + c + b) \cdot (a + c - b) \cdot (b + a - c) \cdot (b + c - a) \Leftrightarrow$$
$$4a^2h^2 = (a + b + c) \cdot (b + c - a) \cdot (a + c - b) \cdot (a + b - c) \Leftrightarrow$$
$$4a^2h^2 = 2p \cdot (2p - 2a) \cdot (2p - 2b) \cdot (2p - 2c) \Leftrightarrow$$
$$\frac{a^2h^2}{2} = p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c) \Leftrightarrow$$
$$[\Delta ABC]^2 = p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c) \Leftrightarrow$$
$$[\Delta ABC] = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}.$$

Teorema 7. (Relação entre as áreas de triângulos semelhantes.)

Sejam ΔABC e ΔDEF dois triângulos semelhantes tais que $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k$, então $\frac{[\Delta ABC]}{[\Delta DEF]} = k^2$.

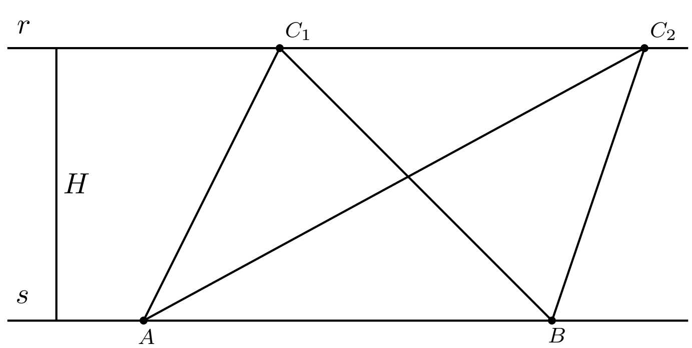
Demonstração.
Se $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ com $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{AG}{DH} = k$, então

$$\frac{[\Delta ABC]}{[\Delta DEF]} = \frac{\frac{BC \cdot AG}{2}}{\frac{EF \cdot DH}{2}} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AG}{DH} = k \cdot k = k^2.$$



Teorema 8. Sejam r e s retas paralelas. Sejam A e B pontos distintos sobre a reta s e C_1 e C_2 pontos distintos sobre a reta r. Então, $[\Delta ABC_1] = [\Delta ABC_2]$.

Demonstração. O resultado é imediato pois $[\Delta ABC_1] = [\Delta ABC_2] = \frac{AB \cdot H}{2}$.



Teorema 9. (Usando áreas para calcular razão de segmentos.)
Seja ABC um triângulo e D, E e F pontos sobre os lados BC, CA e AB tais que AD, BE e CF são concorrentes no ponto P. Defina $K = [ABC]$, $K_A = [PBC]$, $K_B = [PCA]$ e $K_C = [PAB]$. Como $K = K_A + K_B + K_C$, então

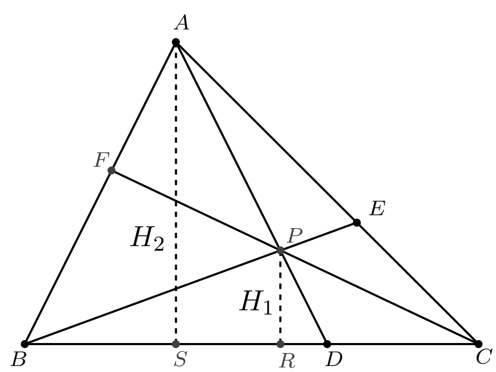
(a)

$$\frac{BD}{DC} = \frac{K_C}{K_B}, \ \frac{CE}{EA} = \frac{K_A}{K_C} \text{ e } \frac{AF}{FB} = \frac{K_B}{K_A}.$$

(b)

$$\frac{AP}{PD} = \frac{K_B + K_C}{K_A}, \ \frac{BP}{PE} = \frac{K_A + K_C}{K_B} \text{ e } \frac{CP}{PF} = \frac{K_A + K_B}{K_C}$$

Demonstração.



(a) Temos que

$$\frac{BD}{CD} = \frac{[\Delta ABD]}{[\Delta ACD]} = \frac{[\Delta BPD]}{[\Delta CPD]} = \frac{[\Delta ABD] - [\Delta BPD]}{[\Delta ACD] - [\Delta CPD]} = \frac{[\Delta APB]}{[\Delta ACP]} = \frac{K_C}{K_B}.$$

Da mesma maneira demonstra - se que $\dfrac{CE}{EA} = \dfrac{K_A}{K_C}$ e $\dfrac{AF}{FB} = \dfrac{K_B}{K_A}$.

(b) Temos que

$$\Delta ADS \sim \Delta PDR \Rightarrow$$

$$\frac{AD}{PD} = \frac{H_2}{H_1} = \frac{[\Delta ABC]}{[\Delta BPC]} = \frac{K_A + K_B + K_C}{K_A} \Leftrightarrow$$

$$\frac{AP}{PD} = \frac{K_B + K_C}{K_A}.$$

Da mesma maneira demonstra - se que $\dfrac{BP}{PE} = \dfrac{K_A + K_C}{K_B}$ e $\dfrac{CP}{PF} = \dfrac{K_A + K_B}{K_C}$.

Teorema 10. (Área de quadrilátero convexo qualquer.)

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo qualquer tal que θ é o menor ângulo entre as diagonais. Então, $[\Delta ABCD] = \dfrac{AC \cdot BD \cdot \sin\theta}{2}$.

Demonstração.
Temos que

$$[ABCD] = [\Delta APD] + [\Delta BPC] + [\Delta CPD] + [\Delta DPA] \Rightarrow$$

$$[ABCD] = \frac{PA \cdot PD \cdot \sin\theta}{2} + \frac{PA \cdot PB \cdot \sin\theta}{2} + \frac{PB \cdot PC \cdot \sin\theta}{2} + \frac{PC \cdot PD \cdot \sin\theta}{2} \Rightarrow$$

$$[ABCD] = \frac{(PA \cdot PD + PA \cdot PB + PB \cdot PC + PC \cdot PD)\sin\theta}{2} \Rightarrow$$

$$[ABCD] = \frac{(PA + PC)(PB + PD)\sin\theta}{2} \Rightarrow [ABCD] = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\theta}{2}.$$

Exercícios Resolvidos

1. (IMO) Considere um triângulo $P_1P_2P_3$ e um ponto P no interior no triângulo. Cevianas $P_1P,\ P_2P,\ P_3P$ intersectam os lados opostos em pontos $Q_1,\ Q_2,\ Q_3$, respectivamente. Prove que, entre números

$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \frac{P_2P}{PQ_2}, \frac{P_3P}{PQ_3},$$

pelo menos um é menor ou igual a 2 e pelo menos um é maior ou igual a 2.

Solução. Defina que $[\Delta PP_2P_3] = K_A$, $[\Delta PP_1P_3] = K_B$ e $[\Delta PP_1P_2] = K_C$. Usando o teorema 9 e, supondo sem perda de generalidade, que $K_A \leq\ K_B \leq K_C$.
Então,

$$\frac{P_3P}{PQ_3} = \frac{K_A + K_B}{K_C} \leq \frac{K_C + K_C}{K_C} = 2,$$

e

$$\frac{P_1P}{PQ_1} = \frac{K_B + K_C}{K_A} \geq \frac{K_A + K_A}{K_A} = 2.$$

2. A área de um triângulo é dada pela fórmula $S = \dfrac{a^2 + b^2}{4}$, onde a e b são dois de seus lados. Determine os ângulos do triângulo.

Solução.

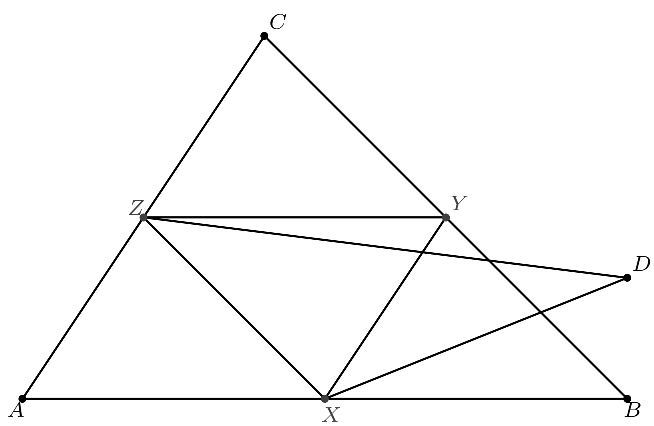
Temos que $[\Delta ABC] = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\angle C}{2} = \dfrac{a^2+b^2}{4}$. Então,

$$\sin\angle C = \frac{a^2+b^2}{2ab} \Rightarrow \sin\angle C - 1 = \frac{a^2+b^2}{2ab} - 1 \Rightarrow \sin\angle C - 1 = \frac{(a-b)^2}{2ab} \geq 0.$$

Assim, $1 \leq \sin\angle C \leq 1 \Leftrightarrow \sin\angle C = 1 \Leftrightarrow \angle C = 90°$. A igualdade só acontece se, e somente se, $a = b$. Portanto, os ângulos do triângulo são $45°,\ 45°,\ 90°$.

3. São dados 1000 pontos no plano não colineares tais que se três deles determinam um triângulo então sua área é menor ou igual a 1. Prove que todos os pontos estão em um triângulo de área menor ou igual a quatro.

Solução.



Como existe um número finito de triângulos que podem ser construídos usando os 1000 pontos então, escolhemos aquele de área máxima que chamaremos de ΔXYZ. Seja ΔABC o triângulo tal que X, Y e Z são os pontos médios de BC, CA e AB, respectivamente, então $[\Delta ABC] = 4[\Delta XYZ] \leq 4$. Seja D, um ponto no conjunto dos 1000 pontos dados, no exterior do triângulo ΔABC então $[\Delta XYZ] < [\Delta XZD]$, o que contradiz a escolha de ΔABC. Portanto, todos os pontos estão no interior do triângulo ΔABC.

4. (Hungria) S é um ponto no interior do ΔABC tal que as áreas dos triângulos ΔABS, ΔBCS, ΔCAS são todas iguais. Prove que S é o baricentro de ΔABC.

Solução.

Seja T a área dos triângulos ΔABS, ΔBCS, ΔCAS. Daí, sendo M, N e P as interseções de AS, BS e CS com os lados opostos, temos $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{CN}{NA} = \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{T}{T} = 1$, isto é, M, N e P são os pontos médios dos lados BC, CA e AB e, portanto, S é o baricentro de ΔABC.

5. (IMO Short List) Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncentro O e circunraio R. Seja $A_1 \neq O$ o ponto de interseção de AO com a circunferência circunscrita ao triângulo BOC e defina analogamente B_1 e C_1. Mostre que

$$OA_1 \cdot OB_1 \cdot OC_1 \geq 8R^3.$$

Quando ocorre a igualdade?

Solução. Sejam D, E e F as interseções de AO, BO e CO com BC, CA e AB, respectivamente. É fácil ver que $AO = BO = CO = R$. Usando o teorema 9 temos que:

$$\frac{AO}{OD} = \frac{[\Delta AOB] + [AOC]}{[BOC]},$$

$$\frac{BO}{OE} = \frac{[AOB] + [BOC]}{[AOC]},$$

$$\frac{CO}{OF} = \frac{[AOC] + [BOC]}{[AOB]}.$$

Faça $[\Delta AOB] = x$, $[\Delta AOC] = y$ e $[\Delta BOC] = z$. É fácil perceber que $\Delta OA_1C \sim \Delta DCO$, então

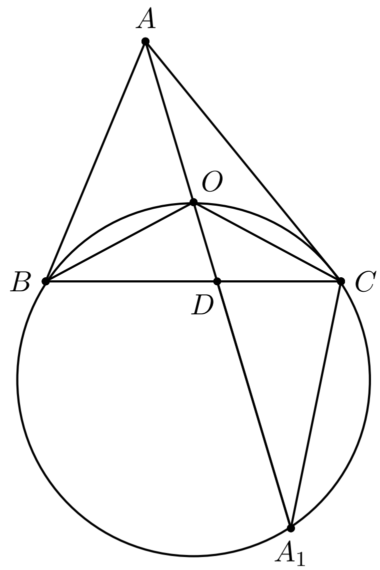
$$\frac{R}{OD} = \frac{OA_1}{R} \Rightarrow OA_1 = \frac{R^2}{OD}.$$

Analogamente, $OB_1 = \dfrac{R^2}{OE}$ e $OC_1 = \dfrac{R^2}{OF}$. Assim,

$$OA_1 \cdot OB_1 \cdot OC_1 = \frac{R^6}{OD \cdot OE \cdot OF} = \frac{R}{OD} \cdot \frac{R}{OE} \cdot \frac{R}{OF} \cdot R^3 = \frac{OA}{OD} \cdot \frac{BO}{OE} \cdot \frac{CO}{OF} \cdot R^3 =$$

$$= \frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{xyz} \cdot R^3 \geq \frac{2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{yz} \cdot 2\sqrt{zx}}{xyz} \cdot R^3 = \frac{8zyz}{xyz} \cdot R^3 = 8R^3.$$

A igualdade ocorre quando $x = y = z$. O exercício 4 garante que O é o baricentro.



6. (Coréia) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e seja P o ponto de interseção das diagonais. Prove que

$$[\Delta PAB] + [\Delta PCD] = [\Delta PBC] + [\Delta PDA]$$

se, e somente se, P é o ponto médio de AC ou BD.

Solução. Observe que $[\Delta PAB] \cdot [\Delta PCD] = [\Delta PBC] \cdot [\Delta PDA] = \frac{1}{4} \cdot PA \cdot PB \cdot PC \cdot PD \cdot \sin P$. Os números $[\Delta PAB]$, $[\Delta PCD]$ e $[\Delta PBC]$, $[\Delta PDA]$ tem a mesma soma e o mesmo produto, então $[\Delta PAB] = [\Delta PBC]$ e $[\Delta PCD] = [\Delta PDA]$ ou $[\Delta PAB] = [\Delta PDA]$ e $[\Delta PBC] = [\Delta PCD]$, ou seja, P é o ponto médio de AC ou BD.

7. (AMC) Seja P um ponto no interior de um quadrilátero convexo $ABCD$, com área 2002, tal que $PA = 24$, $PB = 32$, $PC = 28$ e $PD = 45$. Determine o perímetro de $ABCD$.

Solução. Temos que

$$[ABCD] \leq \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD,$$

com igualdade acontecendo se, e somente se, $AC \perp BD$. Temos que

$$2002 = [ABCD] \leq \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \leq \frac{1}{2} \cdot (AP + PC) \cdot (BP + PD) = \frac{52 \cdot 77}{2} = 2002.$$

Portanto as diagonais AC e BD são perpendiculares e se intersectam em P. Dessa forma, $AB = \sqrt{24^2 + 32^2} = 40$, $BC = \sqrt{28^2 + 32^2} = 4\sqrt{113}$, $CD = \sqrt{28^2 + 45^2} = 53$

e $DA = \sqrt{45^2 + 24^2} = 51$. Assim, o perímetro de $ABCD$ é $144 + 4\sqrt{113}$.

8. (OCM) Seja $PQRS$ um quadrilátero convexo de área A e O um ponto em seu interior. Prove que se $2A = OP^2 + OQ^2 + OR^2 + OS^2$, então $PQRS$ é um quadrado e O é o seu centro.

Solução.

$$[PQRS] = [\Delta POQ] + [\Delta QOR] + [\Delta ROS] + [\Delta SOP]$$
$$= \frac{1}{2} \cdot OP \cdot OQ \cdot \sin \angle(POQ) + \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot OR \cdot \sin \angle(QOR)$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot OR \cdot OS \cdot \sin \angle(ROS) + \frac{1}{2} \cdot OS \cdot OP \cdot \sin \angle(SOP).$$

Usando que $\sin\theta \leq 1$, para todo $\theta \in [0,\ 360°]$, com igualdade ocorrendo se, e somente se, $\theta = 90°$, e que $x \cdot y \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$, para quaisquer reais x e y, com igualdade ocorrendo se, e somente se, $x = y$, obtemos:

$$2A \leq OP \cdot OQ + OQ \cdot OR + OR \cdot OS + OS \cdot OP$$
$$\leq \frac{OP^2 + OQ^2}{2} + \frac{OQ^2 + OR^2}{2} + \frac{OR^2 + OS^2}{2} + \frac{OS^2 + OP^2}{2}$$
$$= OP^2 + OQ^2 + OR^2 + OS^2.$$

Pelo enunciado, na última desigualdade ocorre a igualdade. Dessa forma, temos:

$$\angle POQ = \angle QOR = \angle ROS = \angle SOP = 90°$$

e

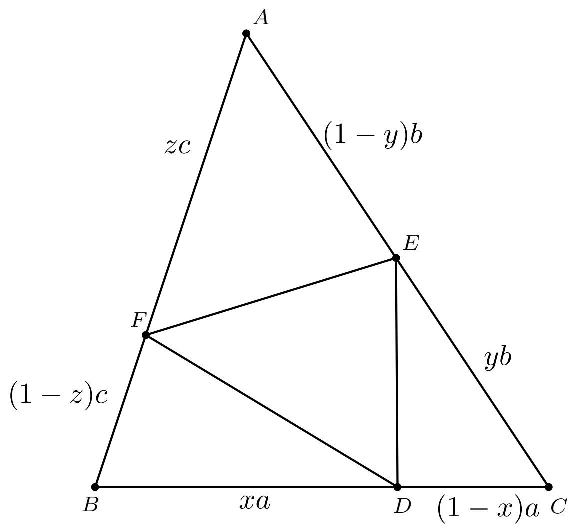
$$OP = OQ = OR = OS.$$

Isto significa que $PQRS$ é um quadrado e O é o seu centro.

9. (Rioplatense) Em um triângulo ABC, sejam D, E e F pontos sobre os lados BC, CA e AB, respectivamente, tais que $[\Delta AFE] = [\Delta BFD] = [\Delta CDE]$. Mostre que

$$\frac{[\Delta DEF]}{[\Delta ABC]} \geq \frac{1}{4}.$$

Solução.



Se $[\Delta AFE] = [\Delta BFD] = [\Delta CDE] = S$ então $[\Delta DEF] = [\Delta ABC] - 3S$. Então,

$$\frac{[\Delta DEF]}{[\Delta ABC]} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{[\Delta ABC] - 3S}{[\Delta ABC]} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$[\Delta ABC] \geq 4S.$$

Por outro lado,

$$S = [\Delta AFE] = \frac{zc \cdot (1-y)b \cdot \sin \angle A}{2} = z(1-y) \cdot \frac{b \cdot c \cdot \sin \angle A}{2} = z(1-y) \cdot [\Delta ABC].$$

Analogamente,

$$S = [\Delta BFD] = x(1-z) \cdot [\Delta ABC] \text{ e}$$

$$S = [\Delta CDE] = y(1-x) \cdot [\Delta ABC].$$

Multiplicando as igualdades encontradas temos

$$S^3 = x(1-x)y(1-y)z(1-z) \cdot [\Delta ABC]^3.$$

Usando a desigualdade entre as médias é fácil provar que $x(1-x) \le \frac{1}{4}$, com igualdade acontecendo se, e somente se, $x = \frac{1}{2}$.

Portanto,

$$S^3 \le \frac{[\Delta ABC]^3}{64} \Leftrightarrow$$
$$[\Delta ABC] \ge 4S.$$

10. (OCM) Os lados de um triângulo são expressos, em cm, por três inteiros consecutivos e sua área, em cm^2, é dada por um inteiro. Prove que o menor lado do triângulo é ímpar.

Solução.

Sejam $x-1,\ x,\ x+1$ os lados do triângulo. Pela fórmula de Heron, a área do triângulo é

$$[\Delta ABC] = \sqrt{\frac{3x}{2} \cdot \frac{(x+2)}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{(x-2)}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{3x^2(x^2-4)}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{3x^2(x^2-4)}.$$

Como $[\Delta ABC] \in \mathbb{Z}$, devemos ter $3x^2(x^2-4)$ par, o que nos diz que x deve ser par. Portanto, o menor lado do triângulo, que é $x-1$, deve ser ímpar.

11. (Hong Kong) Seja ABC um triângulo e sejam X, Y e Z pontos sobre os lados AB, BC e CA, respectivamente, tais que $\frac{AX}{XB} = \frac{4}{5}$, $\frac{BY}{YC} = \frac{6}{7}$ e $\frac{CZ}{ZA} = \frac{8}{9}$. Se a área do triângulo ΔABC é 1989, determine a área do triângulo ΔXYZ.

Solução.

$$\frac{[\Delta XYZ]}{1989} = 1 - \left(\frac{[\Delta AXZ]}{1989} + \frac{[\Delta BXY]}{1989} + \frac{[\Delta CYZ]}{1989}\right)$$
$$= 1 - \left(\frac{4}{9} \cdot \frac{9}{17} + \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{13} + \frac{7}{13} \cdot \frac{8}{17}\right)$$
$$1 - \frac{1482}{1989},$$

Portanto, a área do triângulo ΔXYZ é $1989 - 1482 = 507$.

Exercícios Propostos

1. Num triângulo ABC tem - se $AB = BC$, e D é um ponto sobre a base AC tal que o raio do círculo inscrito no triângulo ABD é igual ao raio do círculo tangente ao segmento DC e aos prolongamentos das retas BD e BC. Prove que o raio deste círculo é igual a $\dfrac{1}{4}$ da medida h de uma das alturas iguais do triângulo ABC.

2. No triângulo ABC, os pontos L, M e N estão sobre BC, CA e AB respectivamente, e AL, BM e CN são concorrentes no ponto P.
(a) Encontre o valor numérico de
$$\frac{PL}{AL} + \frac{PM}{BM} + \frac{PN}{CN}$$
(b) Encontre o valor numérico de
$$\frac{AP}{AL} + \frac{BP}{BM} + \frac{CP}{CN}$$

3. (Ibero) Se AD, BE e CF são três cevianas concorrentes no circuncentro O do triângulo ABC, demonstre que
$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{R}.$$

4. (AIME) Num triângulo ABC, A_1, B_1 e C_1 estão sobre os lados BC, CA e AB, respectivamente. Dado que AA_1, BB_1 e CC_1 são concorrentes no ponto O, e que $\dfrac{AO}{OA_1} + \dfrac{BO}{OB_1} + \dfrac{CO}{OC_1} = 92$. Encontre o valor de $\dfrac{AO}{OA_1} \cdot \dfrac{BO}{OB_1} \cdot \dfrac{CO}{OC_1}$.

5. Em um ΔABC, AD, BE e CF são concorrentes no ponto P tal que $AP = PD = 6$, $EP = 3$, $PB = 9$ e $CF = 20$. Qual é a área do ΔABC?

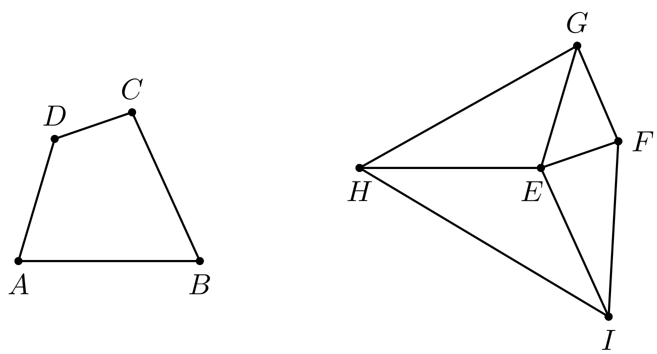
6. Em um triângulo ABC, sejam S o ponto médio da mediana correspondente ao vértice A e Q o ponto de interseção de BS com o lado AC. Demonstrar que $BS = 3QS$.

7. Três segmentos C_1A_2, C_2B_1 e A_1B_2 com extremos sobre os lados do triângulo ABC são paralelos aos lados e passam pelo ponto P. Prove que as áreas dos triângulos $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$ são iguais.

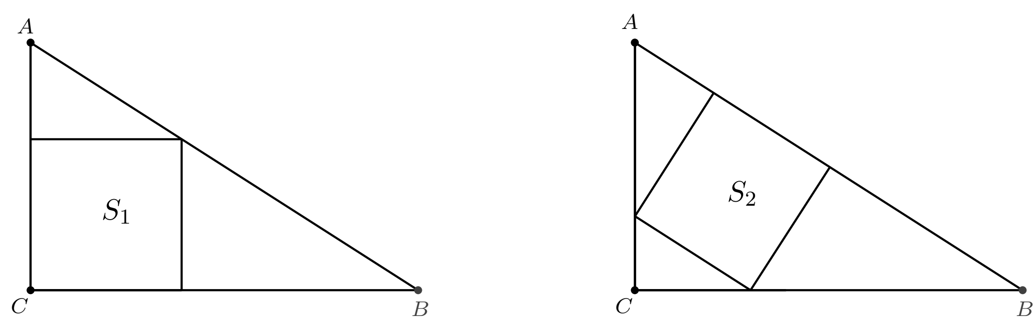
8. (OBM) É dado um quadrilátero convexo $ABCD$. Sejam E, F, G e H os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente. Determine a posição de um ponto P de forma que os quadriláteros $PHAE$, $PEBF$, $PFCG$ e $PGDH$ tenham a mesma área.

9. Seja $ABCDE$ um pentágono convexo (não necessariamente regular) tal que os triângulos ABC, BCD, CDE, DEA e EAB tem área 1. Qual a área do pentágono?

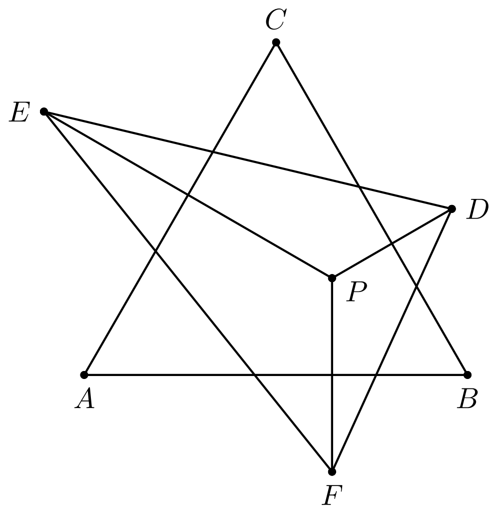
10. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e EH, EI, EF e EG são segmentos paralelos e iguais a AB, BC, CD e DA, como mostra a figura abaixo. Determine a razão entre as áreas dos triângulos $HIFG$ e $ABCD$.



11. (AIME) Quadrados S_1 e S_2 são inscritos em um triângulo retângulo ABC, como mostrado na figura abaixo. Determine $AC + CB$ se área$(S_1) = 441$ e área$(S_2) = 440$.



12. Seja P um ponto no interior de um triângulo equilátero ABC, e sejam D, E e F os simétricos de P em relação aos lados BC, CA e AB, respectivamente. Qual é maior, a área do triângulo ABC ou a área do triângulo DEF?

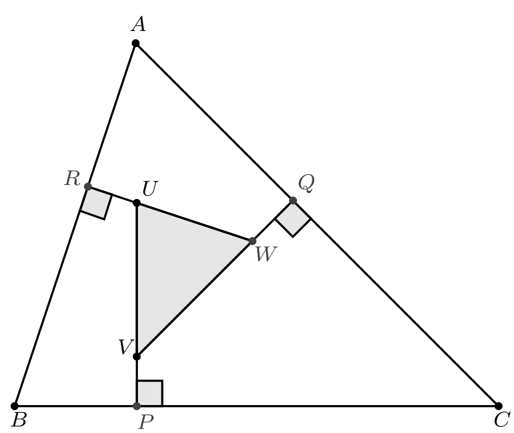


13. (Portugal) Seja $[\Delta ABC]$ um triângulo retângulo em A. Considere um ponto E sobre a hipotenusa e traça - se a partir desse ponto uma paralela ao cateto AC. Seja a interseção desta paralela com o cateto AB. Prove que

$$\frac{BD}{DE} + \frac{DE}{BD} = \frac{BC^2}{2S},$$

sendo S a área do triângulo ΔABC.

14. (Portugal) Os lados AB, BC e AC do triângulo representado na figura medem, respectivamente, 7, 11 e 8. Traçam - se WR, UP e VQ, perpendiculares aos lados. Sabendo que UW mede 2, determine a razão entre a área do triângulo ΔUVW e a área do triângulo ΔABC.



15. (OBM) $ABCD$ é um quadrilátero convexo e inscritível e M é um ponto sobre o lado CD, tal que o triângulo ADM e o quadrilátero $ABCM$ têm a mesma área e o mesmo perímetro. Prove que $ABCD$ tem dois lados de comprimentos iguais.

16. Uma reta corta um quadrilátero circunscritível em dois polígonos com iguais áreas e perímetros. Prove que a reta passa pelo centro da circunferência inscrita.

17. Os pontos médios das diagonais AC, CE, EA, BD, DF e FB do hexágono convexo $ABCDEF$ são vértices de um novo hexágono. Calcular a relação entre as áreas do dois hexágonos.

18. (Mandelbrot) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $AB = 12$, $BC = 6$ e $CD = 20$. Suponha que $ABCD$ possui uma circunferência inscrita que é tangente ao lado BC em seu ponto médio. Qual é a área do quadrilátero $ABCD$?

Sugestões

1. Use os teoremas 2 e 5.

2. Use o teorema 9.

3. Use o exercício 2.

4. Use o teorema 9.

5. Use o teorema 9.

6. Use o teorema 9.

7. Use o teorema 8.

8. Use o teorema 8.

9. Use o teorema 8.

10. Use o teorema 8.

11. Use o teorema 7.

12. Use o teorema 3.

13. Use o teorema 7 e o teorema de Pitágoras.

14. Use os teoremas 3 e 7.

15. Use o teorema 3.

16. Use o teorema 2.

17. Use base média e o teorema 3.

18. Use os teoremas 2 e 6.

Bibliografia

1. Coleção Elementos da Matemática, vol.2 - Geometria Plana
Marcelo Rufino de Oliveira e Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro.

2. Olimpíadas Cearenses de Matemática, Ensino Médio, 1981 - 1985
Emanuel Carneiro, Francisco Antônio M. de Paiva e Onofre Campos.

3. Olimpíadas de Matemática, Categoria B, 10°, 11° e 12° anos, vol.1
Jorge Picado e Paulo Eduardo Oliveira.

4. Tópicos de Matemática Elementar, vol.2, Geometria Euclidiana Plana
Antonio Caminha Muniz Neto.

5. Area y Volumen, en la geometria elemental.
José Araujo, Guilermo Keilhauer, Norma Pietrocola e Valeri Vavilov.

6. Which Way did the Bicycle Go? And other intriguing mathematical mysteries
Joseph D. E. Konhauser, Dan Velleman e Stan Wagon.

7. 360 Problems for Mathematical Contests
Titu Andreescu e Dorin Andrica.

8. Áreas para achar razões de segmentos
Cícero Thiago e Marcelo Mendes.

Revista Eureka 25

9. Mathematical Olympiad Treasures
Titu Andreescu e Bogdan Enescu˙

10. Mandelbrot Morsels
Sam Vandervelde.