Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 3

Prof. Cícero Thiago

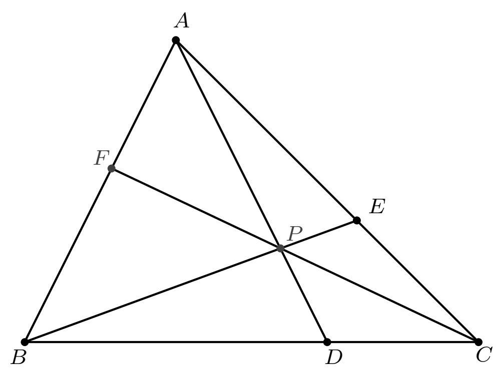
Aula 7

Teorema de Ceva

Teorema 1. Sejam D, E e F pontos sobre os lados BC, AC e AB, respectivamente, do triângulo ΔABC. Os segmentos AD, BE e CF intersectam - se em um ponto P se, e somente se, $\dfrac{BD}{CD} \cdot \dfrac{CE}{EA} \cdot \dfrac{AF}{FB} = 1$.

Demonstração.

$\Rightarrow$



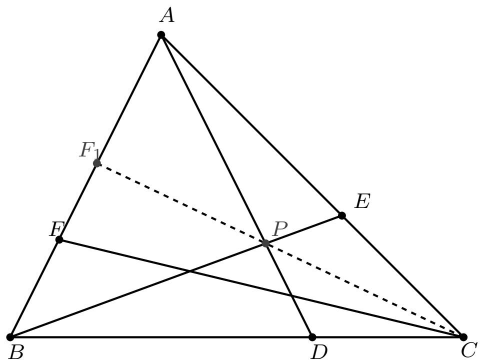
Defina $K = [ABC]$, $K_A = [PBC]$, $K_B = [PCA]$ e $K_C = [PAB]$.

Temos que

$$\frac{BD}{CD} = \frac{[\Delta ABD]}{[\Delta ACD]} = \frac{[\Delta BPD]}{[\Delta CPD]} = \frac{[\Delta ABD] - [\Delta BPD]}{[\Delta ACD] - [\Delta CPD]} = \frac{[\Delta APB]}{[\Delta ACP]} = \frac{K_C}{K_B}.$$

De maneira análoga, $\dfrac{CE}{EA} = \dfrac{K_A}{K_C}$ e $\dfrac{AF}{FB} = \dfrac{K_B}{K_A}$. Assim, $\dfrac{BD}{CD} \cdot \dfrac{CE}{EA} \cdot \dfrac{AF}{FB} = \dfrac{K_C}{K_B} \cdot \dfrac{K_A}{K_C} \cdot \dfrac{K_B}{K_A} = 1$.

$\Leftarrow$ Sejam D, E e F pontos sobre os lados BC, CA e AB tais que $\dfrac{BD}{CD} \cdot \dfrac{CE}{EA} \cdot \dfrac{AF}{FB} = 1$ mas AD, BE e CF não são concorrentes. Seja F_1 sobre AB tal que AD, BE e CF_1 são concorrentes em P. Assim, $\dfrac{BD}{CD} \cdot \dfrac{CE}{EA} \cdot \dfrac{AF_1}{F_1B} = 1$. Dessa forma, $\dfrac{AF}{FB} = \dfrac{AF_1}{F_1B} \Leftrightarrow F = F_1$.



Exercícios resolvidos

1. Prove que as medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto que se chama baricentro.

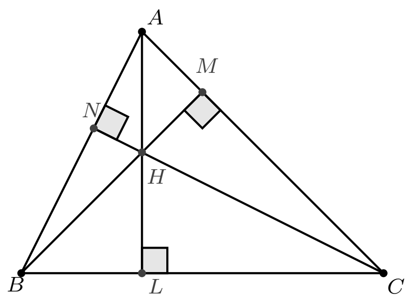
   Solução.
   Sejam M, N e R os pontos médios de AC, BC e BA, respectivamente. Então
   $$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{CN}{NB} \cdot \frac{BR}{RA} = 1,$$
   ou seja, AN, BM e CR são concorrentes.

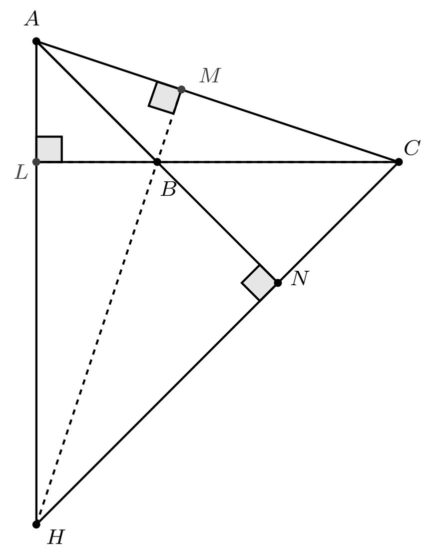
2. Prove que as bissetrizes internas de um triângulo são concorrentes em um ponto que se chama incentro.

   Solução.
   Sejam X, Y e Z os pés das bissetrizes relativas aos lados BC, AC e AB, respectivamente. Pelo teorema das bissetrizes internas temos que
   $$\frac{AY}{YC} \cdot \frac{CX}{XB} \cdot \frac{BZ}{ZA} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CA}{AB} \cdot \frac{BC}{CA} = 1,$$
   ou seja, AX, BY e CZ são concorrentes.

3. Prove que as alturas de um triângulo são concorrentes em um ponto que se chama ortocentro.

Solução.





Sejam AL, BM e CN as alturas do triângulo ΔABC. É fácil ver que

$$\Delta ANC \sim \Delta AMB \Rightarrow \frac{AN}{MA} = \frac{AC}{AB} \text{ (I)}$$

$$\Delta BLA \sim \Delta BNC \Rightarrow \frac{BL}{NB} = \frac{AB}{BC} \text{ (II)}$$

$$\Delta CMB \sim \Delta CLA \Rightarrow \frac{CM}{LC} = \frac{BC}{AC} \text{ (III).}$$

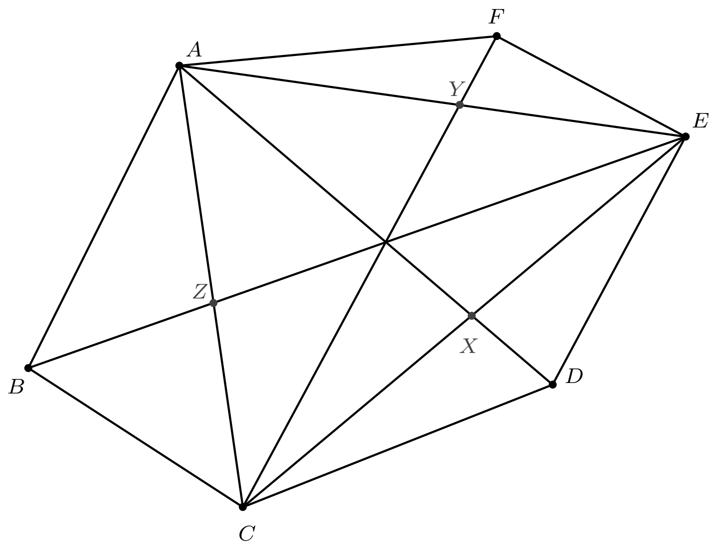
Multiplicando (I), (II) e (III) temos que

$$\frac{AN}{MA} \cdot \frac{BL}{NB} \cdot \frac{CM}{LC} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} = 1,$$

ou seja, as alturas são concorrentes.

4. Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo tal que cada uma das diagonais AD, BE e CF dividem o hexágono em duas regiões de áreas iguais. Prove que AD, BE e CF são concorrentes.

Solução.



Sejam X a intersecção de AD e CE, Y a intersecção de AE e CF e Z é a intersecção de AC e BE. Denotaremos por $[MNP]$ a área do triângulo ΔMNP, e seja K a área do hexágono $ABCDEF$. É fácil ver que

$$\frac{CX}{XE} = \frac{[ACX]}{[AXE]} = \frac{[CDX]}{[DEX]} = \frac{[ACX] + [CDX]}{[AXE] + [DEX]} = \frac{[ACD]}{[ADE]} = \frac{\frac{K}{2} - [ABC]}{\frac{K}{2} - [AEF]}.$$

De maneira análoga,

$$\frac{EY}{YA} = \frac{\frac{K}{2} - [CDE]}{\frac{K}{2} - [ABC]}$$

e

$$\frac{AZ}{ZC} = \frac{\frac{K}{2} - [AFE]}{\frac{K}{2} - [CDE]}.$$

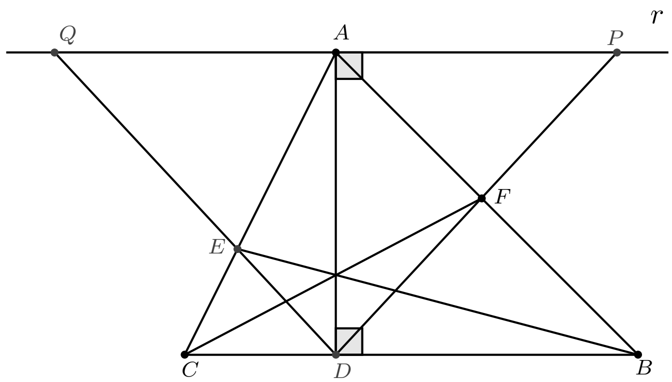
Portanto,

$$\frac{CX}{XE} \cdot \frac{EY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZC} = \frac{\frac{K}{2} - [ABC]}{\frac{K}{2} - [AEF]} \cdot \frac{\frac{K}{2} - [CDE]}{\frac{K}{2} - [ABC]} \cdot \frac{\frac{K}{2} - [AFE]}{\frac{K}{2} - [CDE]} = 1.$$

Pela recíproca do teorema de Ceva no triângulo ΔACE temos que AX, CY e EZ são concorrentes e, com isso, AD, BE e CF são concorrentes.

5. Seja ΔABC um triângulo e seja AD uma altura, com D em BC. Sejam E e F pontos sobre AC e AB, respectivamente, tais que AD, BE e CF são concorrentes. Então a medida dos ângulos $\angle EDA = \angle FDA$ são iguais.

Solução.



Seja r uma reta que passa por A e é paralela BC. Sejam Q e P as intersecções de DE e DF com r, respectivamente. É fácil ver que $\Delta BFD \sim \Delta AFP$ assim

$$\frac{BD}{BF} = \frac{AP}{AF} \Leftrightarrow AP = \frac{BD \cdot AF}{BF} \ (1)$$

e $\Delta CED \sim \Delta AEQ$, ou seja,

$$\frac{CD}{CE} = \frac{AQ}{AE} \Leftrightarrow AQ = \frac{CD \cdot AE}{CE}. \ (2)$$

Por outro lado, pelo teorema de Ceva, aplicado ao triângulo ΔABC de cevianas concorrentes AD, BE e CF,

$$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} = 1$$

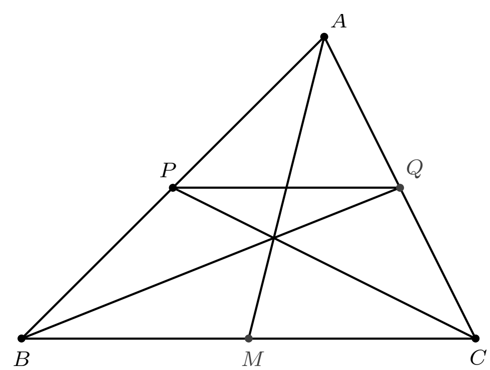
$$\Leftrightarrow \frac{BD \cdot AF}{BF} = \frac{CD \cdot AE}{CE}.$$

Da última igualdade e de (1) e (2), temos que $AP = AQ$, ou seja, o triângulo ΔDQP é isósceles e, com isso, a altura DA será bissetriz do ângulo $\angle QDP$, então $\angle ADE = \angle ADF$.

6. Seja ΔABC um triângulo e sejam P e Q pontos sobre os lados AB e AC, respectivamente, tais que $PQ \parallel BC$. Prove que PC, QB e a mediana AM, com M em BC, são concorrentes.

   Solução.

   Como $PQ \parallel BC$, então
$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \Leftrightarrow \frac{AP}{PB} \cdot \frac{QC}{AQ} = 1 \text{ (I)}.$$
   Como AM é um mediana então $BM = MC$, assim
$$\frac{BM}{MC} = 1 \text{ (II)}.$$
   Multiplicando (I) e (II), temos
$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{QC}{AQ} \cdot \frac{BM}{MC} = 1.$$
   Pela recíproca do teorema de Ceva temos que AM, QB e PC são concorrentes.



Exercícios propostos

1. Sejam D, E e F os pontos de contato da circunferência inscrita com os lados BC, CA e AB, respectivamente, do triângulo ABC. Prove que AD, BE e CF são concorrentes em um ponto que se chama **Ponto de Gergonne**.

2. Sejam l e l_1 duas retas paralelas dadas no plano. Usando apenas régua encontre o ponto médio do segmento AB que está na reta l.

3. Seja P um ponto no interior de um triângulo acutângulo ABC e sejam D, E e F os pontos de intersecção das retas AP, BP e CP com os lados BC, CA e AB, respectivamente. Determine P de maneira que a área do triângulo DEF seja máxima.

4. (Coréia) Seja ABC um triângulo com $AB \neq AC$, seja V a intersecção da bissetriz do ângulo $\angle A$ com BC e seja D pé da altura relativa ao vértice A. Se E e F são as intersecções dos círculos circunscritos aos triângulos ΔAVD com CA e AB, respectivamente, mostre que AD, BE e CF são concorrentes.

5. Seja P um ponto no interior de um triângulo. As bissetrizes de $\angle BPC$, $\angle CPA$ e $\angle APB$ intersectam BC, CA e AB em X, Y e Z, respectivamente. Prove que AX, BY e CZ são concorrentes.

Sugestões/Soluções

2. Use o exercício resolvido 6.

Bibliografia

1. Advanced Euclidean Geometry
Alfred Posamentier

2. Geometric Transformations III
I. M. Yaglom

3. Methods of Problem Solving, Book 3
JB Tabov, EM Kolev e PJ Taylor

4. III Olimpiada Nacional Escolar de Matemática 2006
Jorge Tipe, John Cuya, Claudio Espinoza e Sergio Vera.