Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 3

Prof. Cícero Thiago

Aula 8

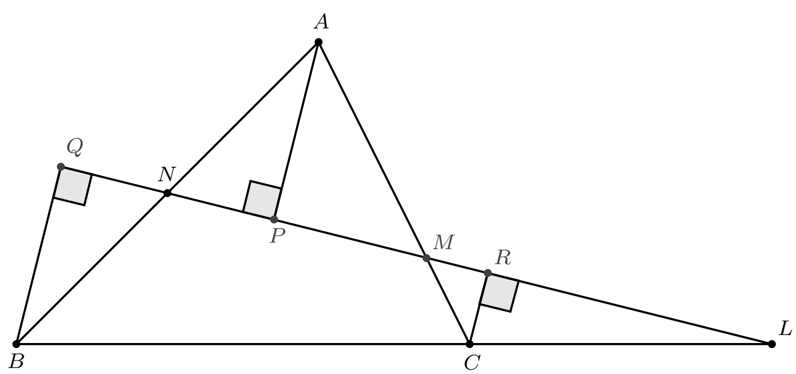
Teorema de Menelaus e problemas de colinearidade

Teorema 1. Se uma reta intersecta as retas BC, CA e AB de um triângulo ABC nos pontos L, M e N, respectivamente, então

$$\frac{CL}{BL} \cdot \frac{BN}{NA} \cdot \frac{AM}{MC} = 1.$$

Inversamente, se L, M e N são pontos sobre os lados BC, CA e AB do triângulo ABC tais que $\frac{CL}{BL} \cdot \frac{BN}{NA} \cdot \frac{AM}{MC} = 1$, então L, M e N são colineares.

Demonstração. $\Rightarrow$



Sejam AP, BQ e CR as perpendiculares traçadas a partir de A, B e C, respectivamente, à reta em que se encontram L, M e N. É fácil ver que os triângulos retângulos APN e BQN são semelhantes, assim como os triângulos retângulos QBL e RCL. Então

$$\frac{BN}{AN} = \frac{BQ}{AP} \text{ e } \frac{CL}{BL} = \frac{RC}{QB}.$$

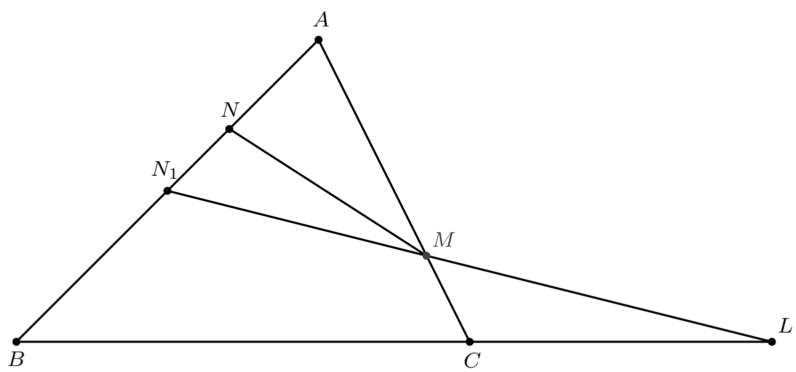
Por outro lado, os triângulos retângulos APM e CRM também são semelhantes. De modo que

$$\frac{AM}{CM} = \frac{AP}{CR}.$$

Portanto,

$$\frac{BN}{AN}\cdot\frac{CL}{BL}\cdot\frac{AM}{CM}=\frac{BQ}{AP}\cdot\frac{RC}{QB}\cdot\frac{AP}{CR}=1.$$

$\Leftarrow$



Suponha, de maneira falsa, que $\frac{CL}{BL}\cdot\frac{BN}{NA}\cdot\frac{AM}{MC}=1$ e os pontos L, M e N não são colineares. Prolongue LM até intersectar AB em N_1. Pelo que foi provado acima temos que $\frac{CL}{BL}\cdot\frac{BN_1}{N_1A}\cdot\frac{AM}{MC}=1$, assim

$$\frac{BN_1}{N_1A}=\frac{BN}{NA}\Leftrightarrow N=N_1.$$

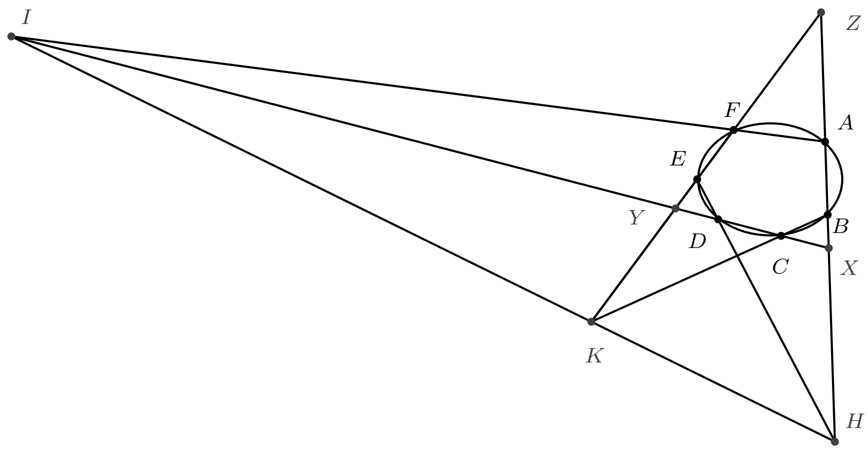
Dessa forma, L, M e N são colineares.

Teorema 2. (Pascal) Seja $ABCDEF$ um hexágono inscrito em um círculo e sejam H, K e I os pontos de intersecção de AB e ED, BC e FE e AF e CD, respectivamente. Então, H, K e I são colineares.

Demonstração. As retas AB, CD e EF determinam o triângulo XYZ. Considere as retas AFI, BCK e HDE que cortam as retas que formam o triângulo XYZ. Aplicando o teorema de Menelaus, temos

$$\frac{XA}{AZ}\cdot\frac{ZF}{FY}\cdot\frac{YI}{IX}=1,$$
$$\frac{XB}{BZ}\cdot\frac{ZK}{KY}\cdot\frac{YC}{CX}=1,$$
$$\frac{XH}{HZ}\cdot\frac{ZE}{EY}\cdot\frac{YD}{DX}=1.$$

Multiplicando as três igualdades e considerando que $XA\cdot XB=XC\cdot XD=,YC\cdot YD=YE\cdot YF$ e $ZE\cdot ZF=ZA\cdot ZB$(provaremos a validade destas igualdades na aula de Potência de Ponto e Eixo radical), obtemos $\frac{YI}{IX} \cdot \frac{XH}{HZ} \cdot \frac{ZK}{KY} = 1$. Pelo teorema de Menelaus temos que I, K e H são colineares. O teorema de Pascal permite variações como o exercício resolvido 2.



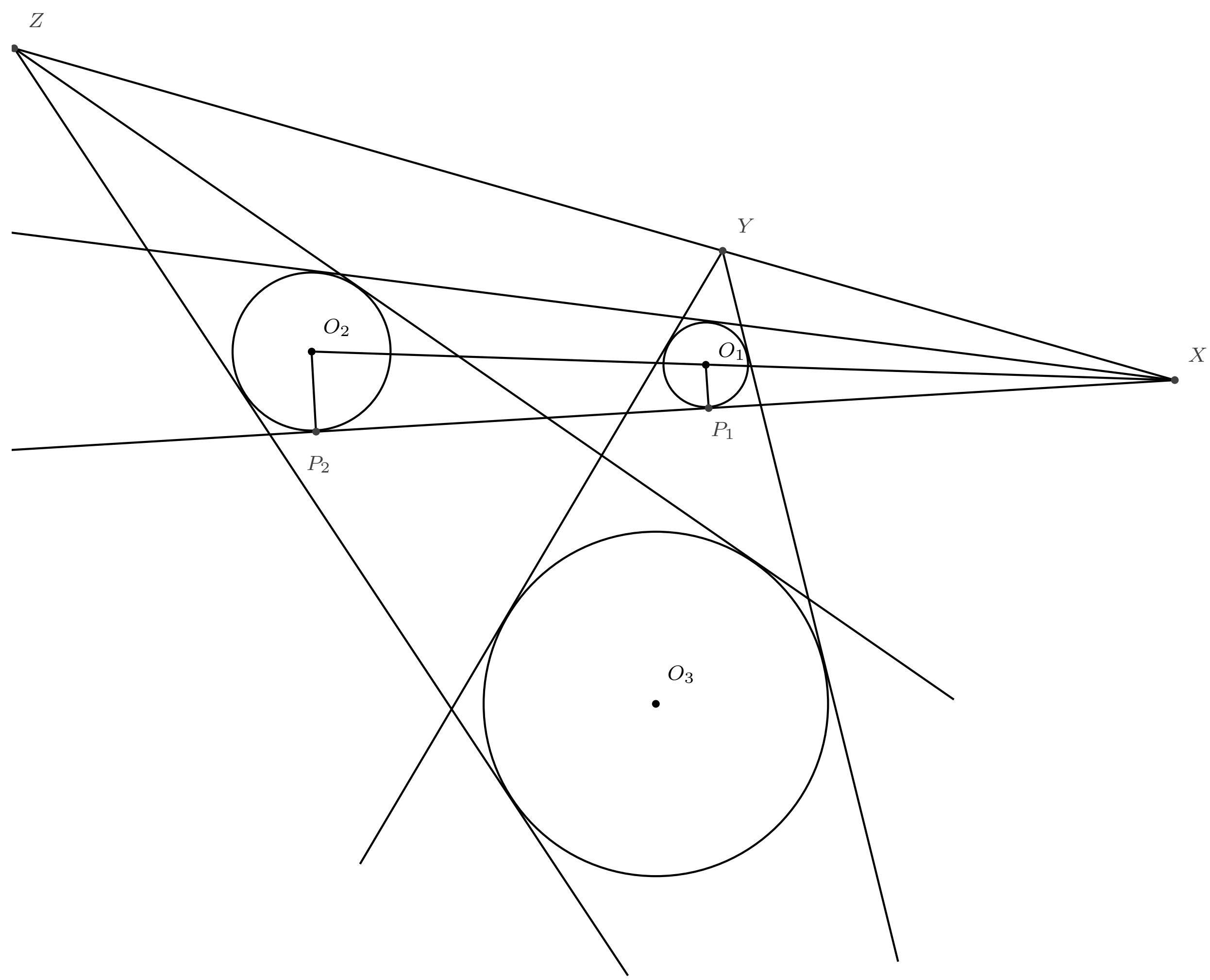
Exercícios resolvidos

1. Dadas três circunferências C_1, C_2 e C_3 de centros O_1, O_2 e O_3 e raios r_1, r_2 e r_3, respectivamente. Seja X a intersecção das tangentes comuns externas de C_1 e C_2, Y a intersecção das tangentes comuns externas de C_1 e C_3 e, finalmente, Z a intersecção das tangentes comuns externas de C_2 e C_3. Prove que X, Y e Z são colineares.

   Solução. É fácil verificar que X, O_1 e O_2 são colineares. Assim, $\Delta XO_1P_1 \sim \Delta XO_2P_2$ e, com isso, $\frac{O_1X}{O_2X} = \frac{O_1P_1}{O_2P_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Analogamente, $\frac{O_3Y}{O_1Y} = \frac{r_3}{r_1}$ e $\frac{O_2Z}{O_3Z} = \frac{r_2}{r_3}$. Portanto,

   $$\frac{O_1X}{O_2X} \cdot \frac{O_3Y}{O_1Y} \cdot \frac{O_2Z}{O_3Z} = 1.$$

   Pela recíproca do teorema de Menelaus concluímos que X, Y e Z são colineares. Este resultado é conhecido como teorema de Monge.



2. Seja P um ponto no interior do triângulo ABC. Sejam M e N as projeções de P sobre AB e AC, respectivamente. Seja K a projeção de A sobre CP e seja L a projeção de A sobre BP. Prove que KM, LM e BC são concorrentes.

Solução.

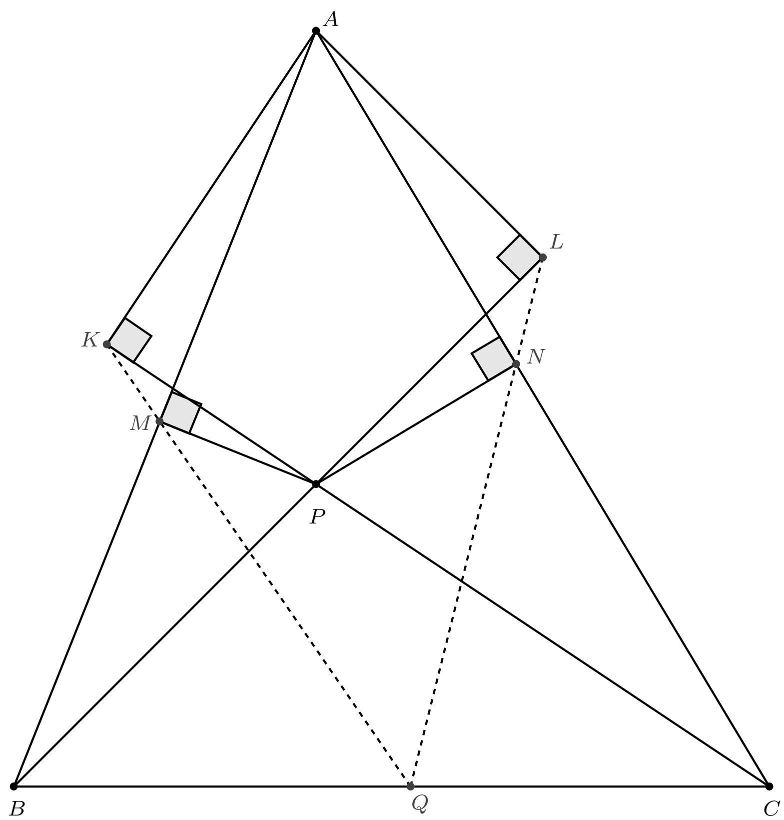
É fácil ver que A, K, M, P, N e L são concíclicos. No hexágono $AKMPNL$ temos que

$$AM \cap LP = B,$$

$$AN \cap KP = C,$$

$$KM \cap LN = Q.$$

Pelo teorema de Pascal temos que B, C e Q são colineares, ou seja, KM, LM e BC são concorrentes.



3. Prove que as bissetrizes internas de dois ângulos de um triângulo isósceles e a bissetriz externa do terceiro ângulo do triângulo intersectam os lados opostos em três pontos colineares.

Solução.

No triângulo ABC, BM e CN são bissetrizes internas dos ângulos $\angle B$ e $\angle C$, respectivamente, e AL é a bissetriz externa do ângulo $\angle A$. Pelo teorema da bissetriz interna temos que

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC} \text{ e } \frac{BN}{NA} = \frac{BC}{AC}.$$

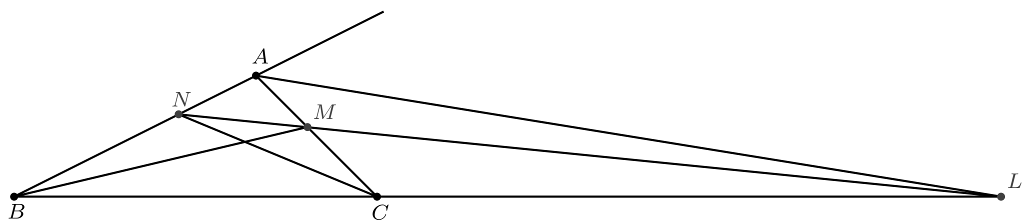
Além disso, pelo teorema da bissetriz externa temos que

$$\frac{CL}{BL} = \frac{AC}{AB}.$$

Assim,

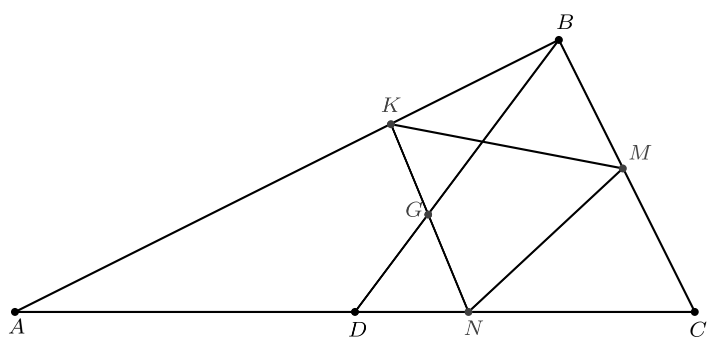
$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NA} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1.$$

Pela recíproca do teorema de Menelaus temos que N, M e L são colineares.



4. Seja G o baricentro do triângulo ABC e sejam AM, BN e CK as bissetrizes internas com M em BC, N em AC e K em AB. Prove que uma das alturas do triângulo ABC é igual a soma das outras duas se, e somente se, G pertence a um lado do triângulo MNK.

Solução. Vamos supor que o baricentro G pertence ao lado NK do triângulo MNK. Seja $X \in AN$ o ponto médio de AC.



Considere o triângulo ABX, em que K, G e N são colineares e pertencem, respectivamente, às retas AB, BX e XA. Pelo teorema de Menelaus temos

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BG}{GX} \cdot \frac{XN}{NA} = 1. \ (1)$$

Além disso, pelo toerema da bissetriz interna e por G ser o baricentro temos

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AC}{BC} \text{ e } \frac{BG}{GX} = 2. \ (2)$$

Se $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$ e substituindo (2) em (1) temos

$$\frac{b}{a} \cdot 2 \cdot \frac{XN}{NA} = 1. \ (3)$$

Temos que $AN = \dfrac{bc}{a+c}$ pelo teorema da bissetriz interna. Por outro lado,

$$XN = AN - AX = \frac{bc}{a+c} - \frac{b}{2} = \frac{bc - ba}{2(a+c)}.$$

Então,

$$\frac{XN}{AN} = \frac{bc - ba}{2(a+c)} \cdot \frac{a+c}{bc} = \frac{c-a}{2c}.$$

Substituindo em (3) temos

$$1 = 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c-a}{2c} \Leftrightarrow ac = bc - ab \Leftrightarrow$$
$$bc = ac + ab. \ (4)$$

Se $s = [ABC]$ e h_A, h_B e h_C são as alturas do triângulo ABC correspondentes aos vértices A, B e C temos que

$$2s = a \cdot h_A = b \cdot h_B = c \cdot h_C.$$

Então, se em (4) multiplicarmos por $\dfrac{s}{abc}$, temos que

$$\frac{s}{a} = \frac{s}{b} + \frac{s}{c},$$

ou seja,

$$h_A = h_B + h_C.$$

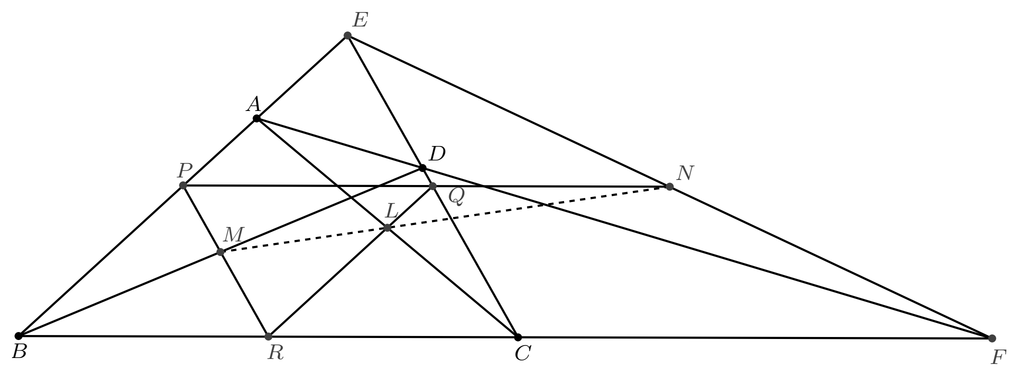
Reciprocamente, se $h_A = h_B + h_C$, fazendo o processo inverso chegamos em

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BG}{GX} \cdot \frac{XN}{NA} = 1.$$

Assim, pelo teorema de Menelaus temos que K, G e N são colineares.

5. **(Reta de Newton)** Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que BA e CD intersectam - se em E, AD e BC intersectam - se em F e sejam N, L e M os pontos médios de EF, AC e BD, respectivamente. Prove que N, L e M são colineares.

Solução.



Sejam P, Q e R os pontos médios de EB, EC, BC, respectivamente. Pelo teorema da base média temos que Q, L e R são colineares e

$$\frac{QL}{LR} = \frac{EA}{AB}.$$

Da mesma forma, P, MR e R são colineares e

$$\frac{RM}{MP} = \frac{CD}{DE},$$

e N, Q e P são colineares e

$$\frac{PN}{NQ} = \frac{BF}{FC}.$$

Aplicando o teorema de Menelaus no triângulo EBC cortado pela transversal ADF temos

$$\frac{EA}{AB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CD}{DE} = 1,$$

portanto $\dfrac{QL}{LR} \cdot \dfrac{RM}{MP} \cdot \dfrac{PN}{NQ} = \dfrac{EA}{AB} \cdot \dfrac{CD}{DE} \cdot \dfrac{BF}{FC} = 1$. Pelo teorema de Menelaus aplicado ao triângulo PQR e os pontos M, L e N concluímos que M, L e N são colineares.

Exercícios propostos

1. Prove que as bissetrizes externas dos ângulos de um triângulo, não isósceles, intersectam os lados opostos em três pontos colineares.

2. O ortocentro de um triângulo ABC é o ponto médio da altura relativa ao vértice C. Prove que $\cos \angle C = \cos \angle A \cdot \cos \angle B$, em que $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ são os ângulos do triângulo ABC.

3. A bissetriz AD de um triângulo ABC divide o lado BC na razão $2 : 1$. Determine a razão em que a mediana CE divide a bissetriz.

4. (Macedônia) Seja Γ a circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Seja D a intersecção da tangente à Γ, em A, com o lado BC, E a intersecção da tangente à Γ, em B, com o lado AC e F a intersecção da reta tangente à Γ, em C, com o lado AB. Prove que D, E e F são colineares.

5. (OBM) No triângulo ABC, D é ponto médio de AB e E ponto sobre o lado BC tal que $BE = 2 \cdot EC$. Sabendo que $\angle ADC = \angle BAE$, calcule o valor de $\angle BAC$.

6. (IMO) As diagonais AC e CE de um hexágono regular $ABCDEF$ são divididas internamente pelos pontos M e N, respectivamente, na razão $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{CN}{CE} = r$. Determine r se B, M e N são colineares.

7. Seja ABC um triângulo e sejam E e D pontos sobre o lado BC tal que $CE = ED = DB$. Seja F o ponto médio de AC e G o ponto médio de AB. Seja H a intersecção de EG e FD. Determine o valor de $\dfrac{EH}{HG}$.

8. Seja $ABCD$ um trapézio com $AB \parallel CD$ e seja X um ponto no segmento AB. Se P é a intersecção de BC e AD, Y a intersecção de CD e PX, R a intersecção de AY e BD e T a intersecção de PR e A. Prove que $\dfrac{1}{AX} = \dfrac{1}{AX} + \dfrac{1}{AB}$.

9. (Cone Sul) Seja C uma circunferência de centro O, AB um diâmetro dela e R um ponto qualquer em C distinto de A e de B. Seja P a intersecção da perpendicular traçada por O a AR. Sobre a reta OP se marca o ponto Q, de maneira que QP é a metade de PO e Q não pertence ao segmento OP. Por Q traçamos a paralela a AB que corta a reta AR em T. Chamamos de H o ponto de intersecção das retas AQ e OT. Provar que H, R e B são colineares.

10. Seja $ABCD$ um quadrilátero. Seja P a intersecção de BC e AD, Q a intersecção de CA e BD e R a intersecção de AB e CD. Prove que os pontos de intersecção de BC e QR, de CA e RP e de AB e PQ são colineares.

Bibliografia

1. Leccture Notes on Mathematical Olympiad Courses
For senior Section, vol. 1
Xu Jiagu

2. Advanced Euclidean Geometry
Alfred Posamentier

3. III Olimpiada Nacional Escolar de Matemática 2006
Jorge Tipe, John Cuya, Claudio Espinoza e Sergio Vera.

4. Explorations in Geometry
Bruce Shawyer

5. Coleção Elementos de Matemática, vol.2
Marcelo Rufino de Oliveira

6. The theorem of Menelaus
B. Orach
Quantum - May/Jun 2001

7. Problemas de Geometría - Planimetria
I. Shariguin