Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 3

Prof. Cícero Thiago

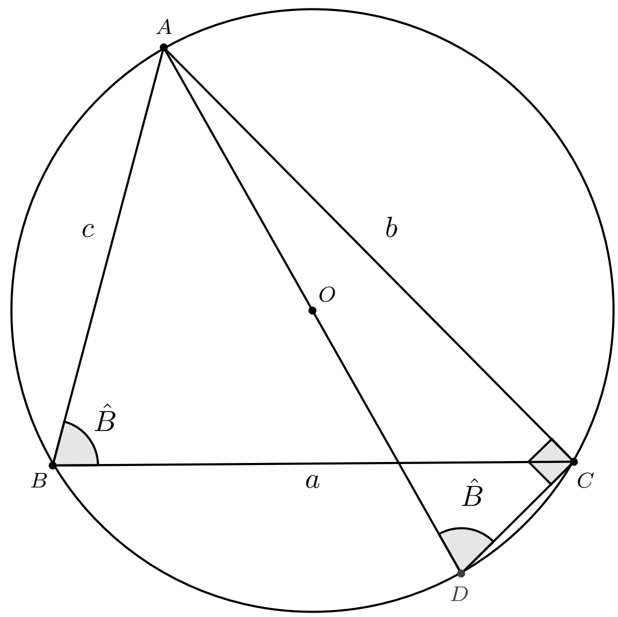
Aula 9

Relações métricas no triângulo.

Teorema 1. (Lei dos Senos) Seja ABC um triângulo tal que $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$. Seja R o raio da circunferência circunscrita. Então

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R.$$

Demonstração.



Seja AD um diâmetro. É fácil ver que $\angle ABC = \angle ADC$. Assim, no triângulo ΔADC, $\sin\angle B = \dfrac{b}{2R} \Leftrightarrow \dfrac{b}{\sin\angle B} = 2R$. Analogamente,

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R.$$

Finalmente,

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R.$$

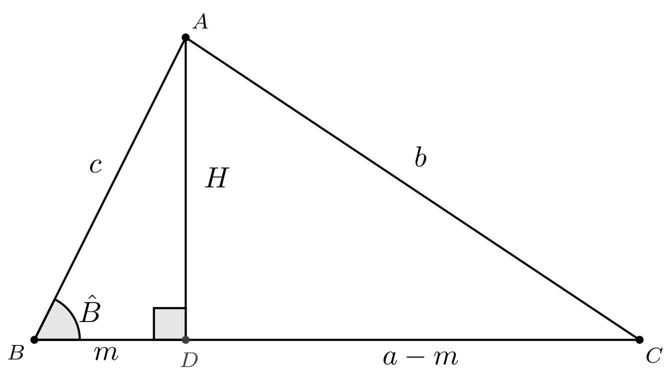
Teorema 2. (Lei dos Cossenos) Seja ABC um triângulo tal que $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$. Então,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C.$$

Demonstração.



Vamos fazer o caso em que o triângulo é acutângulo. O caso em que o triângulo é obtusângulo fica como exercício. Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos ΔABD e ΔACD, temos:

$$c^2 = m^2 + H^2 \text{ e}$$

$$b^2 = (a - m)^2 + H^2 \Leftrightarrow$$

$$b^2 = a^2 - 2am + m^2 + H^2.$$

Assim, $b^2 = a^2 + c^2 - 2am$. Por outro lado, $\cos \angle B = \dfrac{m}{c} \Leftrightarrow m = c \cdot \cos \angle B$. Finalmente, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle B$. Analogamente,

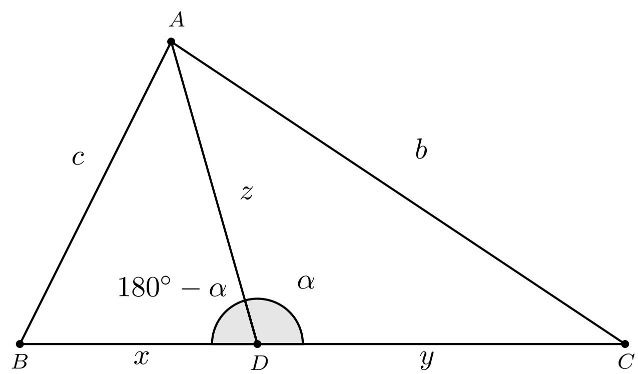
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A \text{ e}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C.$$

Teorema 3. (Stewart) Seja ABC um triângulo tal que $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$. Seja D um ponto sobre o lado BC tal que $BD = x$, $CD = y$ e $AD = z$. Então,

$$c^2 y + b^2 x - z^2 a = axy.$$

Demonstração.



Aplicando a lei dos Cossenos nos triângulos ΔABD e ΔACD, temos

$$c^2 = x^2 + z^2 - 2xz\cos(180° - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\frac{c^2}{x} = x + \frac{z^2}{x} - 2z\cos(180° - \alpha).\ (1)$$

E

$$b^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\frac{b^2}{y} = y + \frac{z^2}{y} - 2z\cos\alpha.\ (2)$$

Adicionando (1) e (2), encontramos

$$\frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{x} = x + y + \frac{z^2}{y} + \frac{z^2}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{x} = a + \frac{z^2}{y} + \frac{z^2}{x} \Leftrightarrow$$

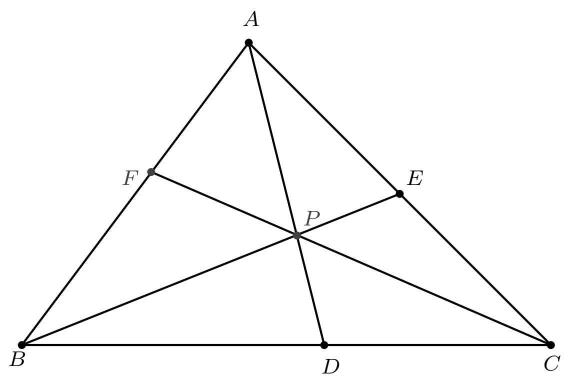
$$c^2y + b^2x - z^2a = axy.$$

Teorema 4. (Ceva trigonométrico) Seja ABC um triângulo e sejam D, E e F pontos sobre os lados BC, CA e AB, respectivamente. Então, AD, BE e CF são concorrentes se, e somente se,

$$\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle BAD} \cdot \frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle CBE} \cdot \frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle ACF} = 1.$$

Demonstração.

$\Rightarrow$ Suponha que AD, BE e CF são concorrentes em P.



Aplicando lei dos senos nos triângulos ABP, BCP e CPA, respectivamente, temos

$$1)\ \frac{BP}{\sin\angle BAD} = \frac{AP}{\sin\angle ABE} \Leftrightarrow \frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle BAD} = \frac{AP}{BP}.$$

$$2)\ \frac{BP}{\sin\angle BCF} = \frac{CP}{\sin\angle CBE} \Leftrightarrow \frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle CBE} = \frac{BP}{CP}.$$

$$3)\ \frac{CP}{\sin\angle CAD} = \frac{AP}{\sin\angle ACF} \Leftrightarrow \frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle ACF} = \frac{CP}{AP}.$$

Portanto,

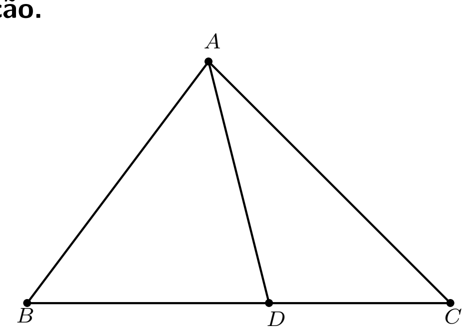
$$\frac{AP}{BP}\cdot\frac{BP}{CP}\cdot\frac{CP}{AP} = \frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle BAD}\cdot\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle CBE}\cdot\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle ACF} = 1.$$

$\Leftarrow$ Para demonstrar a recíproca, ou seja, se $\dfrac{\sin\angle CAD}{\sin\angle BAD}\cdot\dfrac{\sin\angle ABE}{\sin\angle CBE}\cdot\dfrac{\sin\angle BCF}{\sin\angle ACF} = 1$ então AD, BE e CF são concorrentes, usaremos o seguinte

Lema: Seja ABC um triângulo e AD uma ceviana qualquer. Então,

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}\cdot\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}.$$

Demonstração.



Aplicando a lei dos senos nos triângulos ABD e ACD, respectivamente, temos

$$1)\ \frac{BD}{\sin\angle BAD} = \frac{AB}{\sin\angle ADB}$$
$$2)\ \frac{CD}{\sin\angle CAD} = \frac{AC}{\sin\angle ADC}.$$

Por outro lado, $\sin\angle ADB = \sin\angle ADC$ pois $\angle ADB + \angle ADC = 180^\circ$.

Assim, $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC} \cdot \dfrac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}$.

De maneira análoga, sejam BE e CF cevianas quaisquer, então

$$\frac{CE}{EA} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{\sin\angle CBE}{\sin\angle ABE},$$

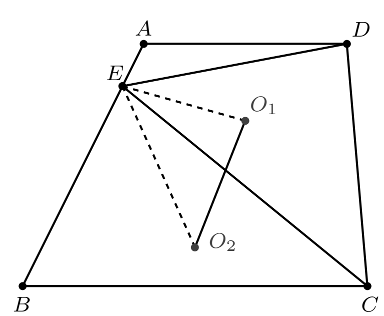
$$\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{\sin\angle ACF}{\sin\angle BCF}.$$

Multiplicando todas as igualdades encontramos $\dfrac{BD}{CD} \cdot \dfrac{CE}{EA} \cdot \dfrac{AF}{FB} = 1$. Pela recíproca do teorema de Ceva, segue o resultado.

Exercícios resolvidos

1. (China Western) Em um trapézio $ABCD$, $AD//BC$. Sejam E um ponto variando sobre o lado AB, O_1 e O_2 os circuncentros dos triângulos AED e BEC, respectivamente. Prove que o comprimento de O_1O_2 é fixo.

   Solução.



   É fácil ver que $\angle AEO_1 = 90^\circ - \angle ADE$ e $\angle BEO_2 = 90^\circ - \angle BCE$. Então,

$$\angle O_1EO_2 = \angle ADE + \angle ECB.$$

Como $AD \parallel BC$, construa uma paralela a AD, por E. Dessa forma $\angle DEC = \angle ADE + \angle BCE$, ou seja, $\angle O_1EO_2 = \angle DEC$. Usando lei dos senos, temos

$$\frac{DE}{EC} = \frac{2O_1E \sin \angle A}{2O_2E \sin \angle B} = \frac{O_1E}{O_2E}.$$

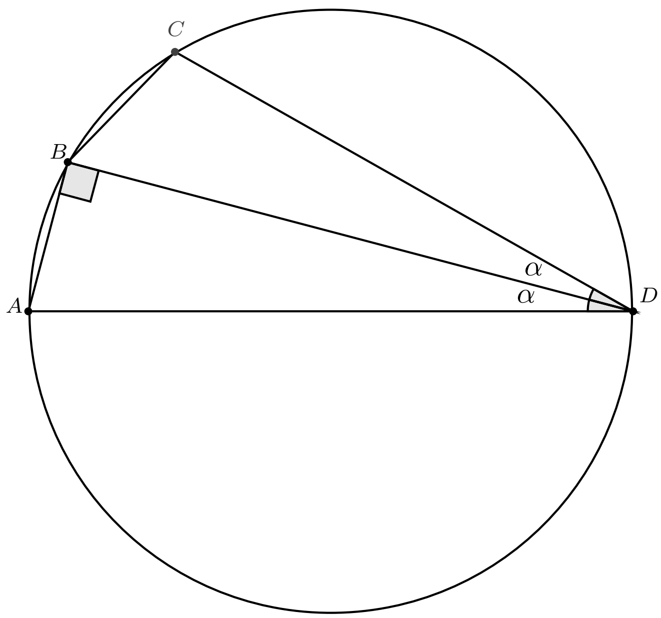
Assim, $\Delta DEC \sim \Delta O_1EO_2$. Portanto,

$$\frac{O_1O_2}{DC} = \frac{O_1E}{DE} = \frac{O_1E}{2O_1E \sin \angle A} = \frac{1}{2 \sin \angle A}.$$

Portanto, $O_1O_2 = \dfrac{DC}{2 \sin \angle A}$, que é um valor fixo.

2. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência de diâmetro AD. Se $AB = BC = 1$ e $AD = 3$, ache o comprimento da corda CD.

Solução.



Temos que $AD = 3$, $AB = BC = 1$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABD, temos

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 \Leftrightarrow 3^2 = 1^1 + BD^2 \Leftrightarrow BD = 2\sqrt{2}.$$

Além disso, $\cos\alpha = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Aplicando a lei dos cossenos no triângulo BCD, temos

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2\cdot BD\cdot CD\cos\alpha \Leftrightarrow$$

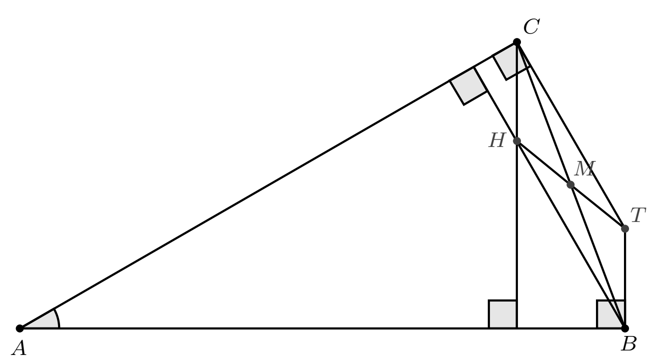
$$1^2 = 8 + CD^2 - 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot CD\frac{2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow$$

$$CD = 3 \text{ ou } \frac{7}{3}.$$

Como o diâmetro mede 3, então $CD = \dfrac{7}{3}$.

3. (Teste de seleção do Brasil para a Cone Sul) Em um triângulo acutângulo ABC, $\angle A = 30^\circ$, H é seu ortocentro e M é o ponto médio de BC. Sobre a reta HM tomemos um ponto $T \neq H$ tal que $HM = MT$. Mostre que $AT = 2BC$.

Solução.

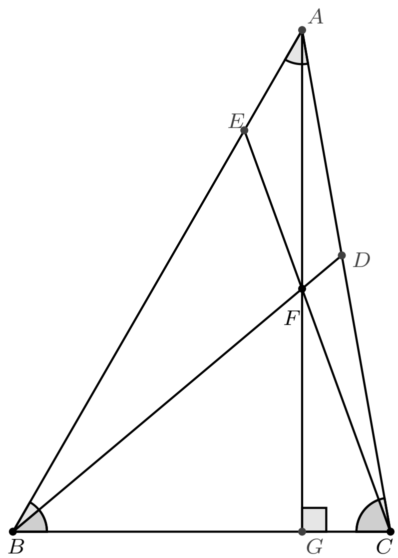


$HBTC$ é um paralelogramo pois M é o ponto médio de BC e $HM = MT$. Além disso, $BC \perp AC$ e $BH \parallel AC$, assim $CT \perp AC$, ou seja, $\angle TCA = \angle 90^\circ$. Com isso, T pertence à circunferência circunferência circunscrita a ABC e AT é diâmetro. Portanto,

$$AT = 2R = \frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{BC}{\sin 30^\circ} = 2BC.$$

4. Seja ABC um triângulo com $\angle BAC = 40^\circ$ e $\angle ABC = 60^\circ$. Sejam D e E pontos sobre os lados AC e AB, respectivamente, tais que $\angle CBD = 40^\circ$ e $\angle BCE = 70^\circ$ e F a interseção de BD e CE. Prove que $AF \perp BC$.

Solução.



Seja G o pé da altura relativa ao lado BC. É fácil ver que $\angle BAG = 30°$ e, com isso, $\angle CAG = 10°$. Como $\angle CBD = 40°$, então $\angle ABD = 20°$. Além disso, como $\angle BCE = 70°$, então $\angle ACE = 10°$. Aplicando o teorema de Ceva trigonométrico temos

$$\frac{\sin \angle CAG}{\sin \angle BAG} \cdot \frac{\sin \angle ABD}{\sin \angle CBD} \cdot \frac{\sin \angle BCE}{\sin \angle ACE} = \frac{\sin 10°}{\sin 30°} \cdot \frac{\sin 20°}{\sin 40°} \cdot \frac{\sin 70°}{\sin 10°} = \frac{2 \cdot \sin 20° \cdot \cos 20°}{\sin 40°} = 1.$$

Portanto, AG, BD e CE são concorrentes.

Exercícios propostos

1. Seja ABC um triângulo tal que $\angle ABC = 45^o$. Seja D o ponto sobre o segmento BC tal que $2BD = CD$ e $\angle DAB = 15^o$. Determine o ângulo $\angle ACB$.

2. (AIME) Seja ABC um triângulo tal que $AB = 13$, $BC = 15$ e $CA = 14$. Seja D o ponto do segmento BC tal que $CD = 6$. Seja E o ponto de BC tal que $CE > CD$ e $\angle BAE = \angle CAD$. Determine BE.

3. (OCM) Determine a área de um hexágono convexo que está inscrito em um círculo e tem três lados consecutivos iguais a 3 cm e os outros três com comprimentos iguais a 2 cm.

4. (OCM) As retas r, s e t são paralelas. A reta s está situada entre r e t de tal modo que a distância de s a r é $3m$ e a distância de s a t é $1m$. Calcule a área de um

triângulo equilátero onde os vértices se encontram sobre cada uma das três retas.

5. Em um triângulo ABC, $\angle BAC = 100^o$ e $AB = AC$. Seja BD a bissetriz de $\angle ABC$, com D sobre o lado AC. Prove que $AD + BD = BC$.

6. Os lados $a > b > c$ de um triângulo estão em P.A. de razão $k > 0$.
(i) Prove que $tg\left(\frac{A}{2}\right) \cdot tg\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{1}{3}$.
(ii) Se r é o inraio, prove que $r = \dfrac{2k}{3\left(tg\left(\frac{A}{2}\right) - tg\left(\frac{C}{2}\right)\right)}$.

7. Seja P um ponto no interior do triângulo ABC tal que $\angle PAB = 10°$, $\angle PBA = 20°$, $\angle PCA = 30°$ e $\angle PAC = 40°$. Prove que o triângulo ABC é isósceles.

8. Seja ABC um triângulo, prove que $r = 4R \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}$.

9. Seja ABC um triângulo tal que $\max\{A, B\} = C + 30°$. Prove que ABC é um triângulo retângulo se, e somente se, $\frac{R}{r} = \sqrt{3} + 1$.

10. (IMO) Seja I o incentro do triângulo ABC. Sejam K, L, M os pontos onde o círculo inscrito em ABC toca os lados BC, CA e AB, respectivamente. A reta paralela a MK passando por B encontra as retas LM e LK em R e S, respectivamente. Mostre que o ângulo $\angle RIS$ é agudo.

11. Um triângulo equilátero ABC tem lado 2 cm e Γ é a sua circunferância inscrita. Demonstre que para todo ponto de Γ a soma dos quadrados de suas distâncias aos vértices A, B e C é igual a 5.

12. (IMO) Em um triângulo ABC a bissetriz do ângulo $\angle BCA$ intersecta o círculo circunscrito do triângulo ABC novamente no ponto R, a mediatriz de BC em P, a mediatriz de AC em Q. O ponto médio de BC é K e o ponto médio de AC é L. Prove que os triângulos RPK e RQL tem a mesma área.

13. IMO Shortlist)Seja A_1 o centro de um quadrado inscrito em um triângulo acutângulo ABC, com dois de seus vértices sobre o lado BC e os outros dois vértices, estão sobre os lados AB e AC. Pontos B_1 e C_1 são definidos de maneira similar, inscrevendo quadrados com dois de seus vértices sobre os lados AC e AB, respectivamente. Prove

que as retas AA_1, BB_1 e CC_1 são concorrentes.

14. (Teste de seleção do Brasil para a IMO)Seja Γ uma circunferência de centro O tangente aos lados AB e AC do triângulo ABC nos pontos E e F. A reta perpendicular ao lado BC por O intersecta EF no ponto D. Mostre que A, D e M (ponto médio de BC) são colineares.

Bibliografia

1. 103 Trigonometry Problems - From the training of the USA IMO team
Titu Andreescu

2. Precalculus
Richard Rusczyk

3. Olimpíadas de Matemática 97
Antonio Caminha, Onofre Campos e Paulo Rodrigues

4. Olimpíadas Cearenses de Matemática, Ensino Médio, 1981 - 1985
Emanuel Carneiro, Francisco Antônio M. de Paiva e Onofre Campos.