Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 3

Prof. Cícero Thiago

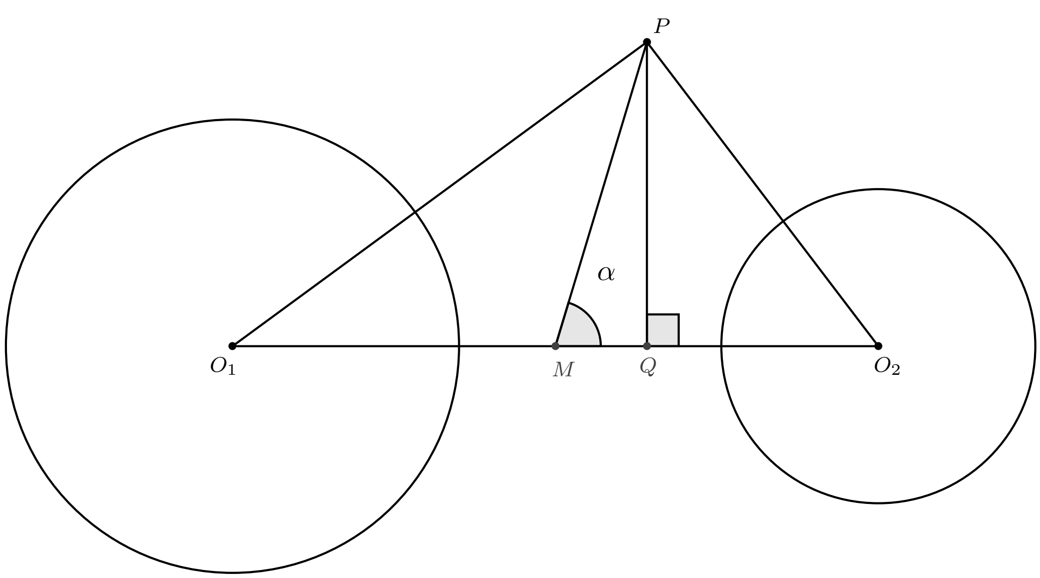
Aula 11

Potência de ponto e eixo radical

Chamaremos de **Eixo radical** o lugar geométrico dos pontos que possuem a mesma potência com relação a duas circunferências dadas.

Teorema 1. O conjunto dos pontos que possuem a mesma potência com relação a duas circunferências dadas é uma reta perpendicular à reta que contém os centros.

Demonstração.



Sejam Γ_1 e Γ_2 circunferências com centros O_1 e O_2 e raios R_1 e R_2, respectivamente. Além disso, seja P um ponto que possui a mesma potência com relação as duas circunferências. Assim,

$$\text{Pot}_{\Gamma_1}^{P} = \text{Pot}_{\Gamma_2}^{P} \Leftrightarrow$$

$$PO_1^2 - R_1^2 = PO_2^2 - R_2^2 \Leftrightarrow$$
$$PO_1^2 - PO_2^2 = R_1^2 - R_2^2.$$

Seja M o ponto médio de O_1O_2, Q a projeção de P sobre O_1O_2 e $\angle PMQ = \alpha$. Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos ΔPO_1M e ΔPO_2M temos

$$PO_1^2 = O_1M^2 + PM^2 - 2 \cdot O_1M \cdot PM \cdot \cos(180^\circ - \alpha) =$$
$$PO_1^2 = O_1M^2 + PM^2 + 2 \cdot O_1M \cdot PM \cdot \cos\alpha$$
$$PO_2^2 = O_2M^2 + PM^2 - 2 \cdot O_2M \cdot PM \cdot \cos\alpha.$$

Então,

$$PO_1^2 - PO_2^2 = 2 \cdot O_1O_2 \cdot PM \cdot \cos\alpha.$$

Por outro lado, $\cos\alpha = \dfrac{MQ}{PM} \Leftrightarrow MQ = PM \cdot \cos\alpha$, com isso

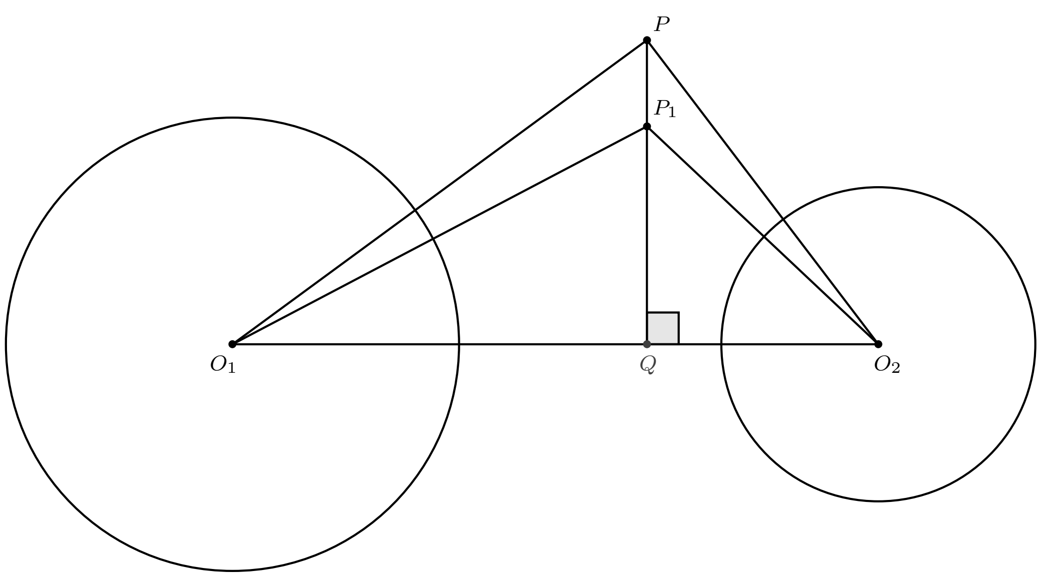
$$MQ = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2 \cdot O_1O_2} = \text{Fixo}.$$

Portanto, o lugar geométrico dos pontos P é a reta perpendicular a O_1O_2 que passa por Q. Por outro lado, seja P_1 um ponto de PQ. Vamos provar que P_1 possui a mesma potência com relação às duas circunferências. Assim, pelo toerema de Pitágoras

$$P_1O_1^2 = O_1Q^2 + P_1Q^2,$$
$$P_1O_2^2 = O_2Q^2 + P_1Q^2.$$

Então,

$$P_1O_1^2 - P_1O_2^2 = O_1Q^2 - O_2Q^2.$$



Além disso,

$$PO_1^2 = O_1Q^2 + PQ^2,$$
$$PO_2^2 = O_2Q^2 + PQ^2.$$

Então,

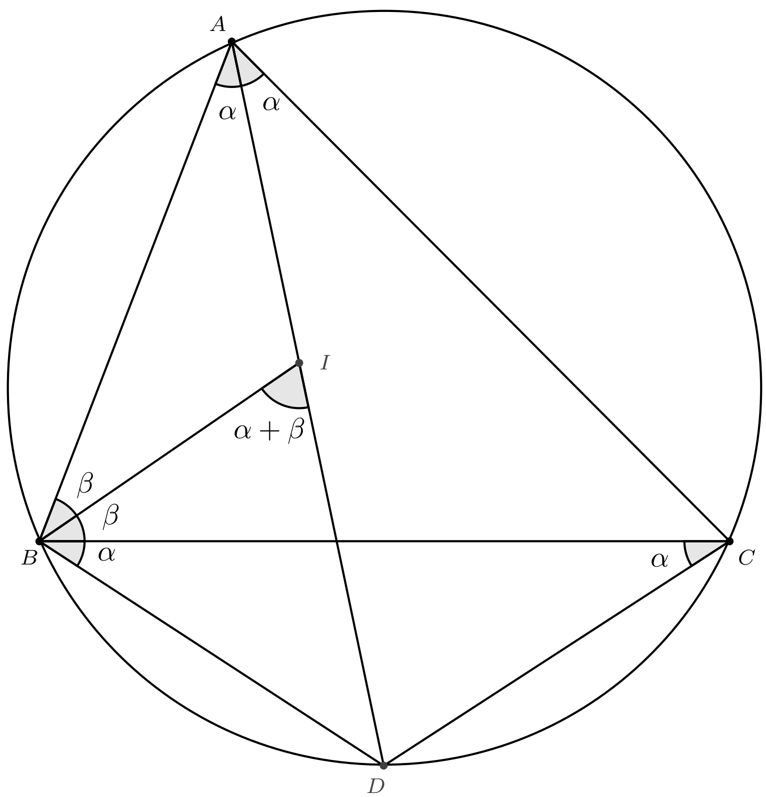
$$PO_1^2 - PO_2^2 = R_1^2 - R_2^2 = O_1Q^2 - O_2Q^2 = P_1O_1^2 - P_1O_2^2 \Leftrightarrow$$
$$P_1O_1^2 - R_1^2 = P_1O_2^2 - R_2^2 \Leftrightarrow$$
$$\mathrm{Pot}_{\Gamma_1}^{P_1} = \mathrm{Pot}_{\Gamma_2}^{P_1}.$$

Teorema 2. (Euler) Seja O o circuncentro, I o incentro, R o raio da circunferência circunscrita e r o raio da circunferência inscrita de um triângulo ABC, então

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

Demonstração.
Lema: Seja D a intersecção de AI com a circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Então,

$$DI = DB = DC.$$



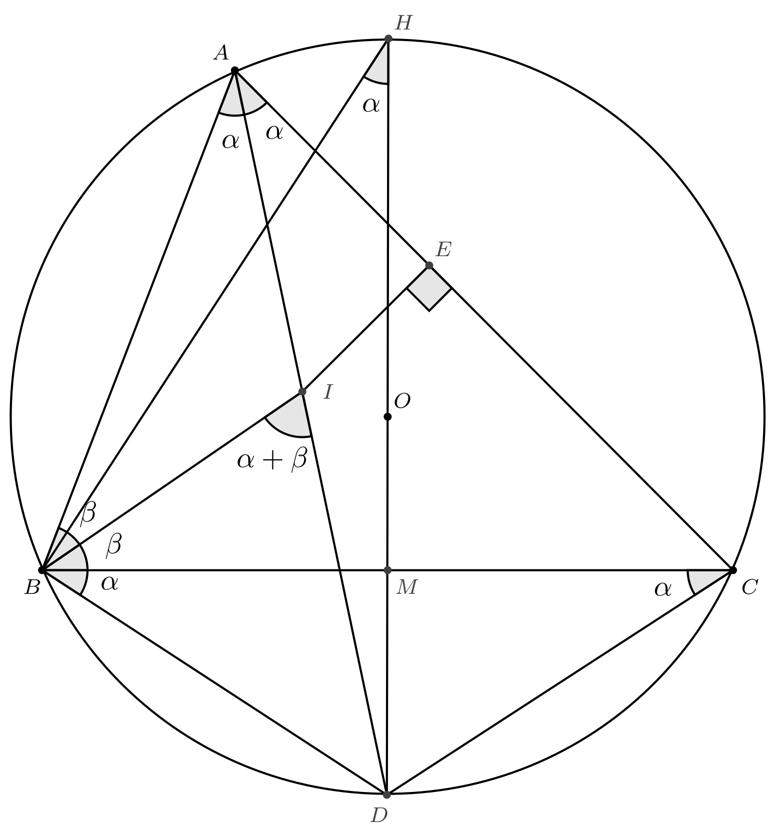
Demonstração. Seja D a intersecção de AI com a circunferência circunscrita ao triângulo ABC e seja BI a bissetriz do ângulo $\angle B = 2\beta$. É fácil ver que $\angle DBC = \angle DCB = \alpha$, ou seja, $DB = DC$. Pela propriedade do ângulo externo, $\angle BID = \alpha + \beta = \angle IBD$, ou seja, $DI = DB$.

Vamos, agora, demonstrar que $OI^2 = R^2 - 2Rr$. Seja $IE = r$, $DH = 2R$ e Γ a circunferência circunscrita ao triângulo ABC. É fácil ver que $\Delta IEA \sim \Delta DBH$ então

$$\frac{2R}{AI} = \frac{DB}{r} \Leftrightarrow AI \cdot DB = 2Rr.$$

Mas, pelo lema, $DB = DI$. Então,

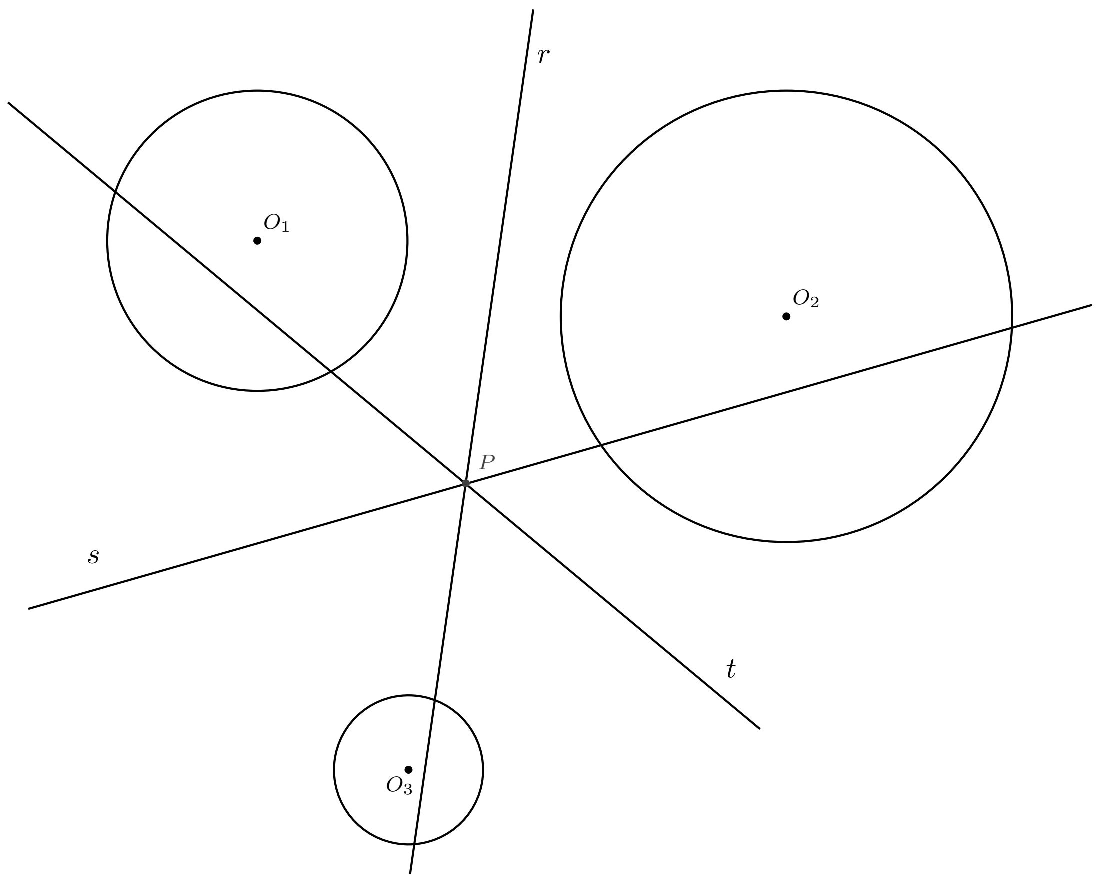
$$AI \cdot DI = 2Rr \Leftrightarrow -\text{Pot}_{\Gamma}^{I} = 2Rr \Leftrightarrow R^2 - OI^2 = 2Rr \Leftrightarrow OI^2 = R^2 - 2Rr.$$



Teorema 3. (Centro radical) Considere três círculos Γ_1, Γ_2 e Γ_3 tais que seus centros O_1, O_2 e O_3, respectivamente, não estão alinhados. Sejam r, s e t os eixos radicais de Γ_1

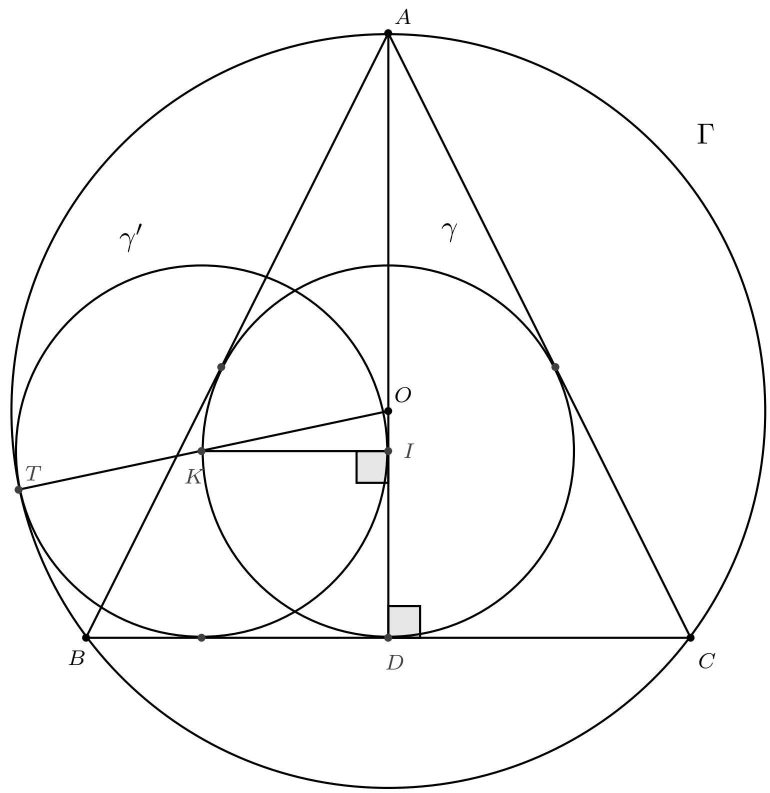
e Γ_2, Γ_1 e Γ_3 e Γ_2 e Γ_3, respectivamente. Então, r, s e t são concorrentes em um ponto chamado **centro radical**.

Demonstração.
Seja P um ponto sobre $r \cap s$, ou seja, P possui a mesma potência com relação Γ_1, Γ_2 e Γ_3. Portanto, P está sobre a reta t.



Problema 1. (Índia TST) Seja ABC um triângulo com $AB = AC$ e seja Γ a sua circunferência circunscrita. Suponha que sua circunferência inscrita γ se desloca sobre BC em direção ao vértice B. Prove que quando γ tangenciar Γ internamente, ela também irá tangenciar a altura relativa ao vértice A.

Solução.



Seja γ' a posição de γ quando tangencia Γ, e seja K seu centro. Seja O o centro de Γ e I o centro de γ. Como $AB = AC$, então O e I estão sobre a altura AD. Se T é o ponto de interseção de Γ e γ', então T, K e O são colineares. Dessa forma, $OK = OT - KT = R - r$, onde R e r são, respectivamente os raios das circunferências circunscrita e inscrita de ABC. É fácil ver que K e I estão sobre a paralela a BC que passa por I. Então KI é perpendicular a AD em I. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo KOI temos

$$OK^2 = OI^2 + IK^2.$$

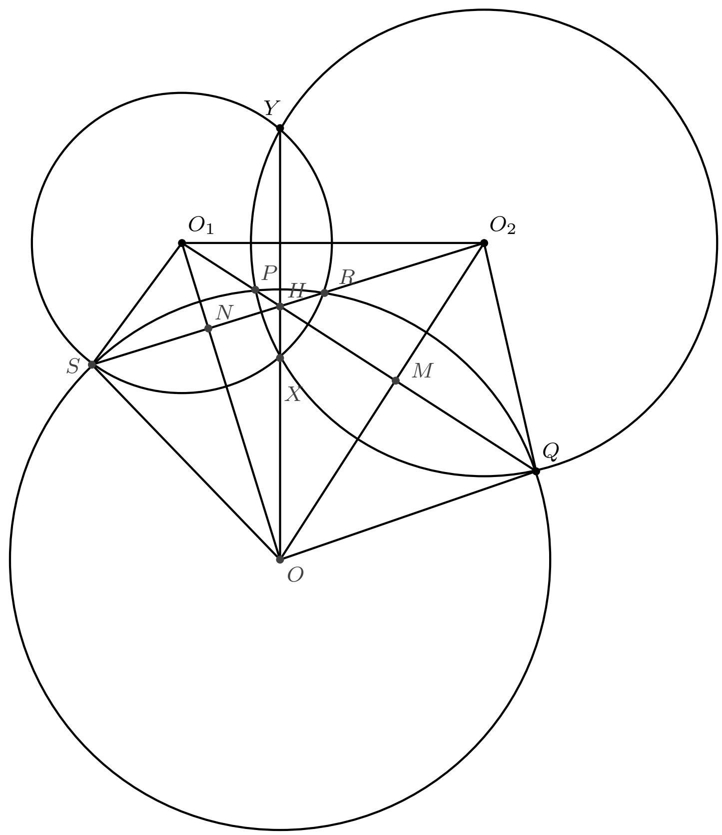
Mas $OI^2 = R^2 - 2Rr$, então

$$IK^2 = OK^2 - OI^2 = (R - r)^2 - (R^2 - 2Rr) = r^2.$$

Portanto, $IK = r$ mostrando que γ' tangencia AD em I.

Problema 2. (USAMO) Sejam ω_1 e ω_2 círculos que se intersectam em X e Y. Seja l_1 uma reta que passa pelo centro de ω_1 intersectando ω_2 nos pontos P e Q e seja l_2 uma reta que passa pelo centro de ω_2 intersectando ω_1 nos pontos R e S. Prove que se P, Q, R e S estão sobre uma circunferência então o centro desse círculo está sobre XY.

Solução.



Seja ω a circunferência circuncrita de $QRPS$ e seja O seu centro. A reta XY é eixo radical das circunferências ω_1 e ω_2. É suficiente mostrar que O tem igual potência com relação as circunferências ω_1 e ω_2, ou seja,

$$OO_1^2 - O_1S^2 = OO_2^2 - O_2Q^2 \text{ ou } OO_1^2 + O_2Q^2 = OO_2^2 + O_1S^2.$$

Sejam M e N a interseções de O_2O e l_1 e O_1O e l_2. Como as circunferências ω e ω_2 se intersectam em P e Q, então $PQ \perp OO_2$. Então,

$$OO_1^2 - OQ_2 = (OM^2 + MO_1^2) - (OM^2 + MQ^2)$$

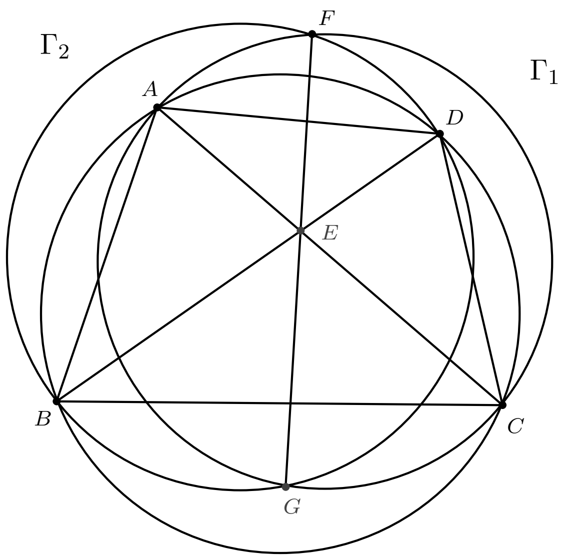
$$= (O_2M^2 + MO_1^2) - (O_2M^2 + MQ^2) = O_2O_1^2 - O_2Q^2 \Leftrightarrow$$

$$O_2O_1^2 + OQ^2 = OO_1^2 + O_2Q^2.$$

Temos que, $O_2O_1^2 + OS^2 = OO_2^2 + O_1S^2$. Como $OS = OQ$, então $OO_1^2 + O_2Q^2 = OO_2^2 + O_1S^2$.

Problema 3. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível e E a interseção das diagonais AC e BD. Se F é um ponto qualquer e as circunferências Γ_1 e Γ_2 circunscritas a FAC e a FBD se intersectam novamente em G, mostre que E, F, G são colineares.

Solução.



O eixo radical de Γ_1 e Γ_2 é a reta FG. Então $E \in FG \Leftrightarrow \text{Pot}_{\Gamma_1}^{E} = \text{Pot}_{\Gamma_2}^{E}$. Mas $ABCD$ inscritível implica que $\text{Pot}_{\Gamma_1}^{E} = -AE \cdot EC = -BE \cdot ED = \text{Pot}_{\Gamma_2}^{E}$, e portanto E, F e G são colineares.

Exercícios propostos

1. (IMO) Seja H o ortocentro de um triângulo acutângulo ABC. A circunferência de centro no ponto médio de BC e que passa por H corta BC nos pontos A_1 e A_2. Analogamente, definem - se os pontos B_1 e B_2 sobre CA e os pontos C_1 e C_2 sobre AB. Mostre que os seis pontos A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 e C_2 estão sobre uma mesma circunferência.

2. As bissetrizes internas dos ângulos CAB, ABC e BCA de um triângulo ABC concorrem em I e cortam o círculo circunscrito de ABC em L, M e N, respectivamente. A circunferência de diâmetro IL corta o lado BC em D e E, a circunferência de diâmetro IM corta o lado CA em F e G, circunferência de diâmetro IN corta o lado AB em H e J. Mostre que D, E, F, G, H e J estão sobre uma mesma circunferência.

3. (IMO) Um círculo de centro O passa pelos vértices A e C de um triângulo ABC e intersecta os segmentos AB e BC novamente em pontos distintos K e N, respectivamente. Os círculos circunscritos aos triângulos ABC e KBN se intersectam em exatamente 2 pontos distintos B e M. Prove que $\angle OMB = 90°$.

4. (China) Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível inscrito em Γ. Seja P a interseção de AB e DC e seja Q a interseção AD e BC. Sejam QE e QF tangentes a Γ em E e F, respectivamente. Prove que P, E e F são colineares.

5. (Balcânica) Uma reta passando pelo incentro I do triângulo ABC intersecta a circunferência circunscrita $\Gamma_1(O, R)$ de ABC nos pontos F e G e a circunferência inscrita $\Gamma_2(I, r)$ nos pontos D e E, com D entre I e F. Prove que $DF \cdot EG \geq r^2$. Quando ocorre a igualdade?

Bibliografia

1. Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses - For senior section - Vol. 1
Xu Jiagu

2. Algunas maneras de usar la potencia
José Antonio Gómez Ortega
Olimpiada Mexicana de Matemáticas

3. Mathematical Olympiad Challenges
Titu Andreescu e Razvan Gelca

4. Tópicos de Matemática Elementar - Vol.2
Antonio Caminha Muniz Neto

5. Potência de um ponto em relação a uma circunferência
Eduardo Wagner
Revista do professor de matemática - Número 45