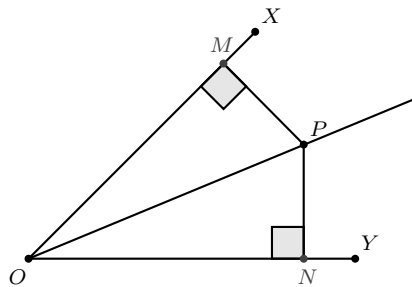


Circunferências ex - inscritas

Teorema 1. Seja $\angle XOY$ um ângulo dado e P um ponto em seu interior. Então, a distância de P a XO é igual a distância de P a YO se, e somente se, o ponto P pertence a bissetriz.

Demonstração.

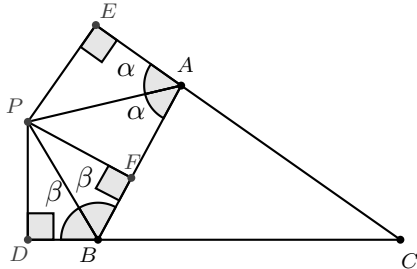


Suponhamos inicialmente que o ponto P pertence à bissetriz. Então, $\angle XOP = \angle YOP$. Sejam M e N os pés das perpendiculares baixadas desde P sobre OX e OY , respectivamente. Podemos concluir, que $\triangle MOP \equiv \triangle NOP$, pelo caso **L.A.A.**. Portanto, $PM = PN$.

Reciprocamente, suponhamos agora que $PM = PN$. Pelo caso especial de congruência de triângulos, cateto - hipotenusa, os triângulos MOP e NOP são congruentes. Portanto, $\angle MOP = \angle NOP$ e, assim, P pertence à bissetriz.

Teorema 2. As bissetrizes externas de quaisquer dois ângulos de um triângulo são concorrentes com a bissetriz interna do terceiro ângulo.

Demonstração.



No triângulo ABC traçamos as bissetrizes externas dos ângulos $\angle A$ e $\angle B$ os quais se intersectam em P . Do teorema 1, como P pertence à bissetriz externa do ângulo $\angle A$, então $PE = PF$. Além disso, P pertence à bissetriz externa do ângulo $\angle B$, então $PF = PD$. Como $PD = PE$, pelo teorema 1, concluímos que P pertence à bissetriz do ângulo $\angle C$. Dessa forma, se P equidista dos três lados do triângulo ABC e é um ponto no exterior do triângulo então P é o centro de uma das três circunferências ex - inscritas do triângulo ABC . A circunferência com centro I_a e raio r_a é uma das três circunferências ex - inscritas que representaremos apenas por (I_a, r_a) . Analogamente são definidas as circunferências (I_b, r_b) e (I_c, r_c) . Os pontos I_a, I_b e I_c são os ex - incentros. Cada circunferência ex - inscrita toca um dos lados do triângulo internamente e os outros dois externamente, ou seja, toca no prolongamento. Na figura a seguir, observe que pela propriedade de segmentos tangentes a uma circunferência, vulgarmente conhecido com **Teorema do bico**, temos que $BL = BG$, além disso

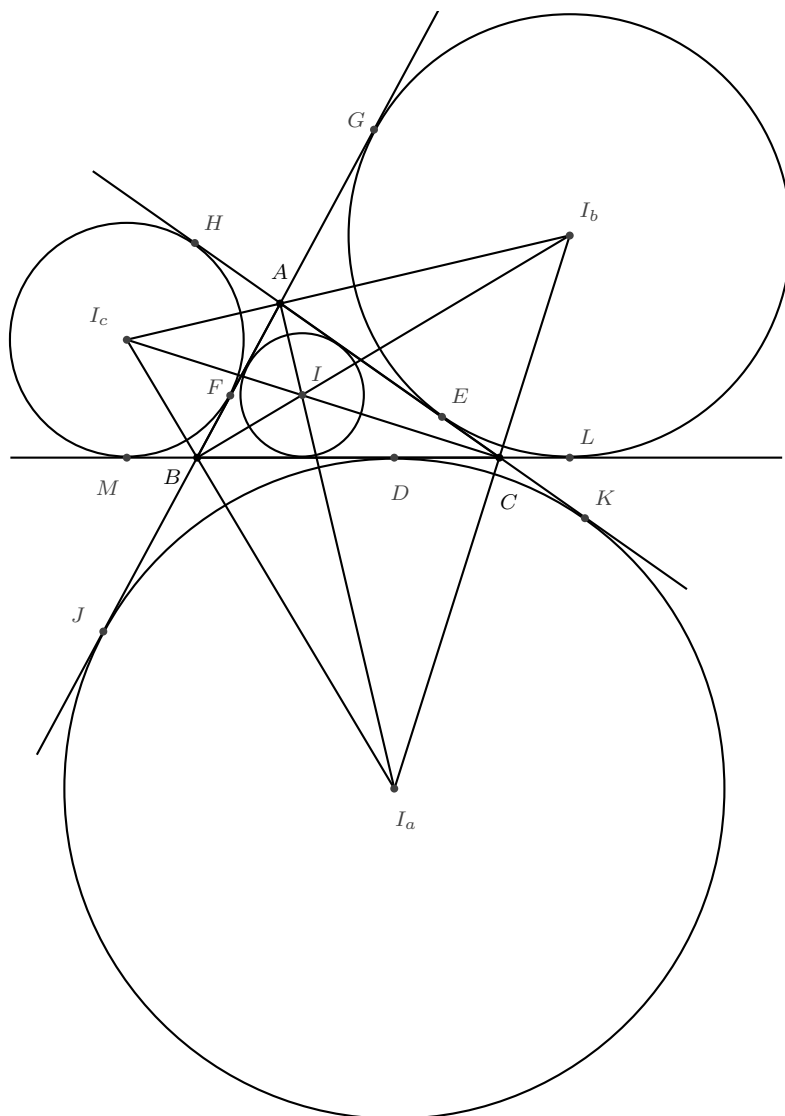
$$\begin{aligned} BL + BG &= (BC + CL) + (AG + AB) \\ &= BC + CE + AE + AB = a + b + c = 2p. \end{aligned}$$

Portanto, as tangentes traçadas por B à circunferência (I_b, r_b) tem medida p . Dessa forma é fácil ver que

$$AJ = AK = BG = BL = CH = CM = p.$$

Além disso, $CL = BL - BC = p - a$. Então,

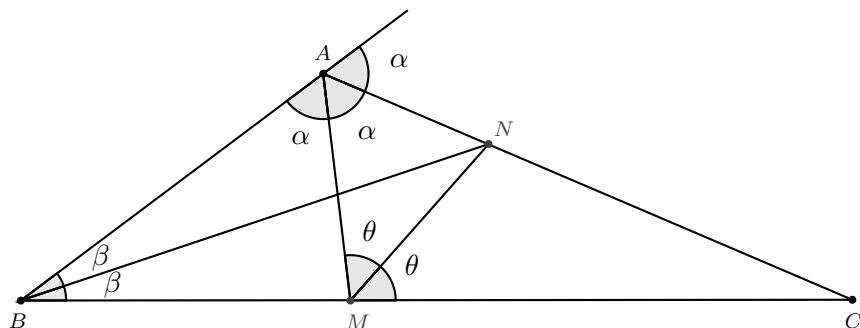
$$\begin{aligned} BM = BF = CL = CE &= p - a, \\ CK = CD = AH = AF &= p - b, \\ AG = AE = BJ = BD &= p - c. \end{aligned}$$



Problema 1. Sejam ABC um triângulo, M o pé da bissetriz interna do ângulo A e N o pé da bissetriz interna do ângulo B . Suponha que MN seja bissetriz do ângulo $\angle AMC$. Calcule a medida do ângulo $\angle A$.

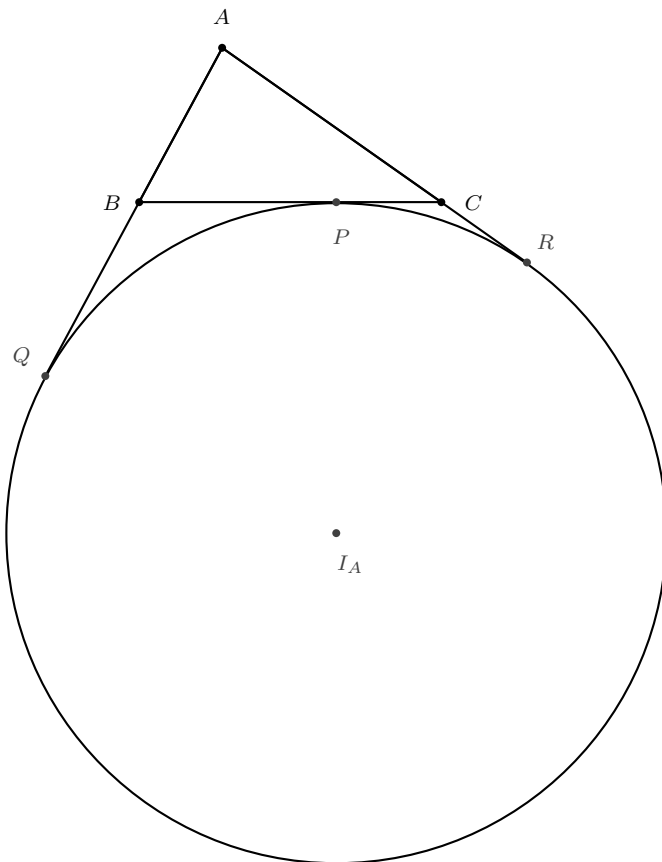
Solução.

É fácil ver que N é um dos ex - incentros do triângulo ABC pois é a interseção da bissetriz externa do ângulo $\angle AMB$ e da bissetriz interna do ângulo $\angle B$. Logo, AN é bissetriz externa do ângulo A . Portanto, $\angle A = 120^\circ$.



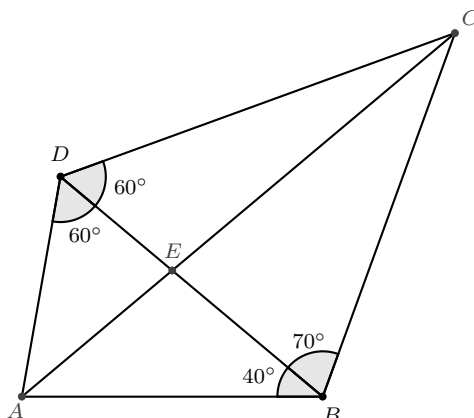
Problema 2. (OBM) Um triângulo ABC , de lados $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$, tem perímetro $2p$. Uma circunferência tangencia o lado BC e os prolongamentos dos lados AB e AC nos pontos P , Q e R , respectivamente. O comprimento AR é igual a:
 (a) $p - a$ (b) $p - b$ (c) $p - c$ (d) p (e) $2p$

Solução.

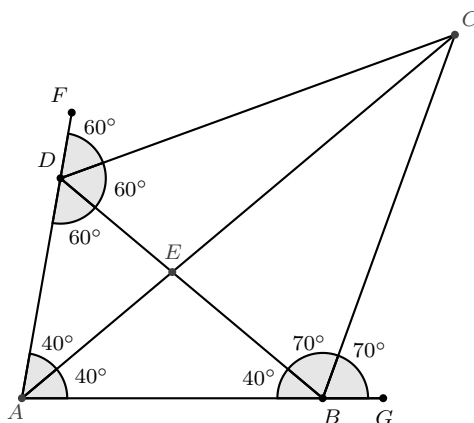


Pelo teorema 2 é fácil ver que $AR = AQ = p$. Portanto, a resposta é o item (b).

Problema 3. No quadrilátero $ABCD$ determine a medida do ângulo $\angle AED$.



Solução.



Na figura, $\angle FDC = 60^\circ$ e $\angle GBC = 70^\circ$. Então, BC e DC são bissetrizes externas dos ângulos $\angle ABD$ e $\angle ADB$. Dessa forma, AC é bissetriz interna do ângulo $\angle BAD$. Portanto, $\angle DAE = \angle BAE = 40^\circ$. Finalmente, $\angle AED = 80^\circ$.

Exercícios propostos

1. Prove que os três segmentos determinados por um vértice e pelo ponto de tangência da circunferência ex - inscrita com o lado oposto a esse vértice são concorrentes em um ponto chamado ponto de Nagel.
2. (OBM) A medida do ângulo $\angle B$ de um triângulo ABC é 120° . Sejam M um ponto sobre o lado AC e K um ponto sobre o prolongamento do lado AB , tais que BM é a bis-

setriz interna do ângulo $\angle ABC$ e CK é a bissetriz externa correspondente ao ângulo $\angle ACB$. O segmento MK intersecta BC no ponto P . Prove que $\angle APM = 30^\circ$.

3. (Leningrado) Sejam AF , BG e CH as bissetrizes de um triângulo ABC que tem ângulo A medindo 120° . Prove que o ângulo GFH mede 90° .
4. (Belarus) Seja O o centro do círculo ex - inscrito do triângulo ABC oposto ao vértice A . Seja M o ponto médio de AC e seja P a interseção das retas MO e BC . Prove que se $\angle BAC = 2\angle ACB$, então $AB = BP$.
5. (IMO) Dado um triângulo ABC , o ponto J é o centro da circunferência ex-inscrita oposta ao vértice A . Esta circunferência ex-inscrita é tangente ao lado BC em M , e às retas AB e AC em K e L , respectivamente. As retas LM e BJ intersectam-se em F , e as retas KM e CJ intersectam-se em G . Seja S o ponto de interseção das retas AF e BC , e seja T o ponto de interseção das retas AG e BC . Prove que M é o ponto médio de ST .
(A circunferência ex-inscrita de ABC oposta ao vértice A é a circunferência tangente ao segmento BC , ao prolongamento do segmento AB no sentido de A para B e ao prolongamento do segmento AC no sentido de A para C .)

Bibliografia

1. Tópicos de Matemática Elementar - Vol. 2
Antonio Caminha Muniz Neto
2. Geometria
Radmila Bulajich Manfrino e José Antonio Gómez Ortega