Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 3

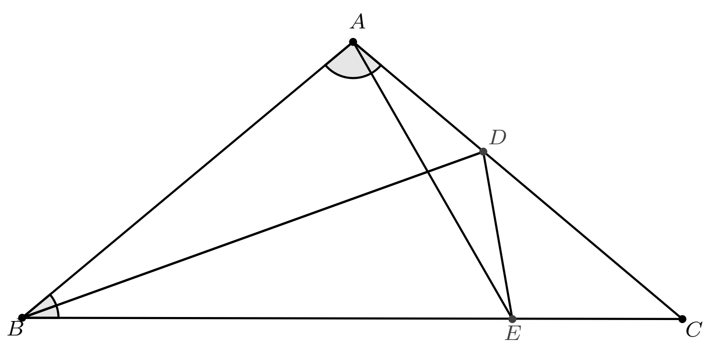
Prof. Cícero Thiago

Aula 13

Revisão I

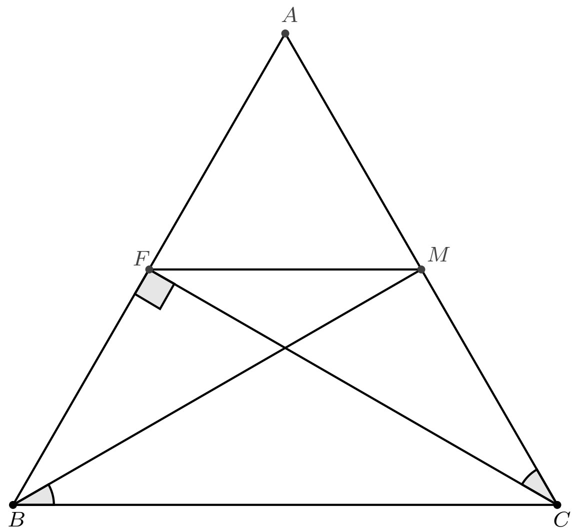
Problema 1. Em um triângulo ABC, $\angle BAC = 100°$ e $AB = AC$. Seja BD a bissetriz de $\angle ABC$, com D sobre o lado AC. Prove que $AD + BD = BC$.

Solução.
É fácil ver que $\angle ABD = \angle DBC = 20°$. Seja E um ponto sobre BC tal que $BD = BE$. Basta provar que $EC = AD$. Veja que $\angle BDE = \angle BED = 80°$. Como $\angle BED = 80°$ e $\angle BCD = 40°$, então $\angle EDC = 40°$, ou seja, $ED = EC$. Por outro lado, $ABED$ é um quadrilátero inscritível pois $\angle BAD + \angle BED = 180°$, assim $\angle EAD = \angle EBD = 20°$ e $\angle AED = \angle ABD = 20°$. Portanto, $AD = ED = EC$ e, dessa forma, $BC = AD + BD$.



Problema 2. (Inglaterra) No triângulo acutângulo ABC, CF é altura, com F em AB e BM é mediana, com M em CA. Se $BM = CF$ e $\angle MBC = \angle FCA$, prove que o triângulo ABC é equilátero.

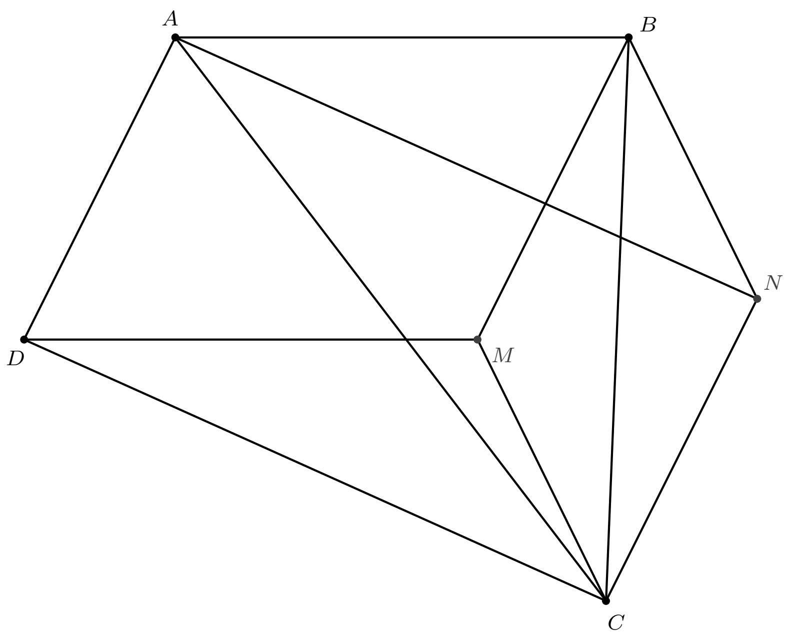
Solução.



Temos que $FM = AM = MC$ e, com isso, $\angle MFC = \angle FCM$, ou seja, o quadrilátero $FBCM$ é inscritível. Dessa forma, $\angle FCM = \angle FBM$ e $\angle BMC = \angle BFC = 90°$. É fácil ver que $\Delta BMC \equiv \Delta BMA$, pelo caso **A.L.A**, então $AB = BC$. Veja também que $\Delta BMC \equiv \Delta BFC$, pelo caso **cateto - hipotenusa**, então $\angle BCM = \angle CBF$ e, portanto, $AC = AB$. Finalmente, $AB = AC = BC$.

Problema 3. Seja M um ponto no interior de um quadrilátero convexo $ABCD$ tal que $ABMD$ é um paralelogramo. Prove que se $\angle CBM = \angle CDM$, então $\angle ACD = \angle BCM$.

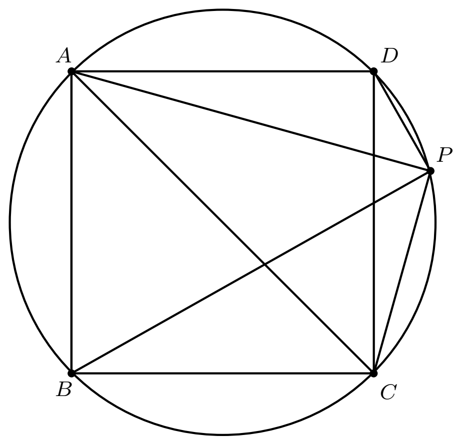
Solução.



Seja N um ponto tal que $BN \parallel MC$ e $NC \parallel BM$. Então $NA \parallel CD$, $\angle NCB = \angle CBM = \angle CDM = \angle NAB$, ou seja, os pontos A, B, N e C são concíclicos. Então, $\angle ACD = \angle NBC = \angle BCM$.

Problema 4. (Seletiva do Brasil para a Cone Sul) Prove que as distâncias entre um ponto sobre uma circunferência e os quatro vértices de um quadrado nesta inscrita não podem ser todas números racionais.

Solução.



Como $ABCD$ é um quadrado então $AB = BC = CD = DA = a$. Pelo toerema de Pitágoras no triângulo ABC temos que $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow AC^2 = a^2 + a^2 = 2 \cdot a^2 \Leftrightarrow AC = \sqrt{2} \cdot a$. Aplicando o teorema de Ptolomeu no quadrilátero $ABCP$, temos

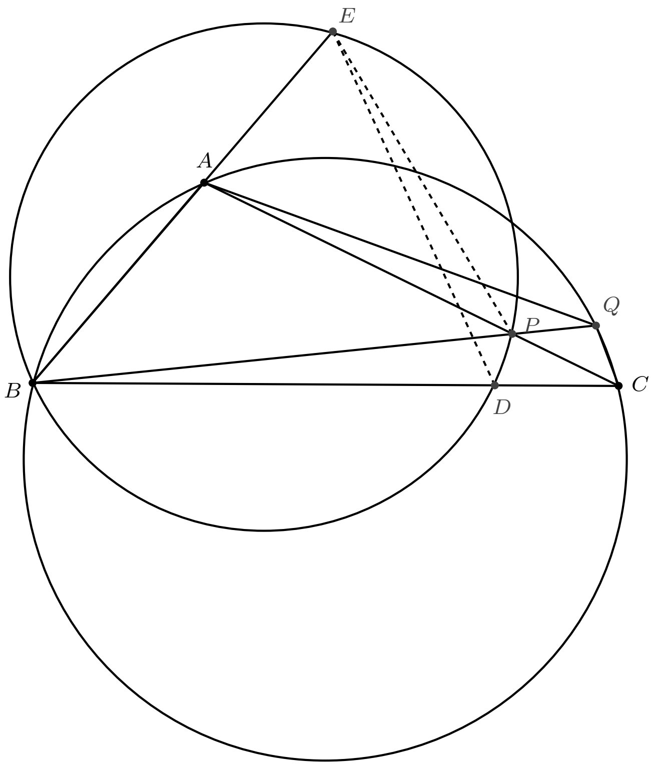
$$AC \cdot BP = AP \cdot BC + CP \cdot AB \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot a \cdot BP = AP \cdot a + CP \cdot a \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2} = \frac{AP + CP}{BP}.$$

Se todas as medidas fossem números racionais estaríamos afirmando, de maneira falsa, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Se P coincidir com um dos vértices, ou seja, $P \equiv D$, então $\dfrac{BP}{CP} = \sqrt{2}$. Assim, as medidas não podem ser todas racionais.

Problema 5. (Irã) Seja ABC um triângulo com $BC > CA > AB$. Seja D um ponto sobre o lado BC e seja E o ponto no prolongamento de BA, com A entre E e B, tal que $BD = BE = CA$. Seja P o ponto sobre AC tal que E, B, D e P são concíclicos e seja Q o segundo ponto de interseção de BP com o círculo circunscrito ao triângulo ABC. Prove que $AQ + CQ = BP$.

Solução.



Veja que $\Delta AQC \sim \Delta EPD$, pois $\angle CAQ = \angle CBQ = \angle DEP$ e $\angle AQC = 180^\circ - \angle ABD = \angle EPD$. Por outro lado, pelo teorema de Ptolomeu, temos

$$BP \cdot DE = BE \cdot DP + BD \cdot EP.$$

Então,

$$BP = BE \cdot \frac{DP}{DE} + BD \cdot \frac{EP}{DE} = CA \cdot \frac{CQ}{CA} + CA \cdot \frac{AQ}{CA} = AQ + CQ.$$

Problemas propostos

1. (Cone Sul) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que suas diagonais AC e BD são perpendiculares. Seja P a intersecção de AC e BD e seja M o ponto médio de AB. Mostre que o quadrilátero $ABCD$ é inscritível se, e somente se, as retas PM e CD são perpendiculares.

2. Prove que as bissetrizes internas dos quatro ângulos de um quadrilátero convexo determinam um quadrilátero inscritível.

3. (OBM) As diagonais de um quadrilátero inscritível $ABCD$ se intersectam em O. Os círculos circunscritos aos triângulos AOB e COD intersectam as retas BC e AD,

pela segunda vez, nos pontos M, N, O e Q. Prove que o quadrilátero $MNPQ$ está inscrito em um círculo de centro O.

4. Um quadrilátero convexo está inscrito em um círculo de centro O. As diagonais AC e BD intersectam - se em P. Os círculos circunscritos aos triângulos ABP e CDP intersectam - se novamente em Q. Se O, P e Q são três pontos distintos, prove que OQ é perpendicular a PQ.

5. (Ibero) Num triângulo escaleno ABC traça-se a bissetriz interna BD, com D sobre AC. Sejam E e F, respectivamente, os pés das perpendiculares traçadas desde A e C até à reta BD, e seja M o ponto sobre o lado BC tal que DM é perpendicular a BC. Prove que $\angle EMD = \angle DMF$.

6. Seja M o ponto de interseção das diagonais de um quadrilátero inscritível $ABCD$, em que $\angle AMB$ é agudo. O triângulo isósceles BCK é construído exteriormente ao quadrilátero, com base a base sendo BC, tal que $\angle KBC + \angle AMB = 90°$. Prove que KM é perpendicular a AD.

7. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Prove que $ABCD$ é inscritível.

8. Seja $ABCD$ um quadrado. Determine o lugar geométrico dos pontos P, no mesmo plano do quadrado $ABCD$, tais que

$$\text{máx}\,\{PA, PC\} = \frac{1}{\sqrt{2}}(PB + PD).$$

9. Uma circunferência passa pelo vértice A de um paralelogramo $ABCD$ intersectando os lados AB e AD nos pontos P e R, respectivamente. Além disso intersecta a diagonal AC no ponto Q. Prove que $AQ \cdot AC = AP \cdot AB + AR \cdot AD$.

10. Um ponto P é escolhido o interior do paralelogramo $ABCD$ de tal forma que $\angle APB + \angle CPD = 180°$. Prove que $AB \cdot AD = BP \cdot DP + AP \cdot CP$.