Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 3

Prof. Cícero Thiago

Aula 15

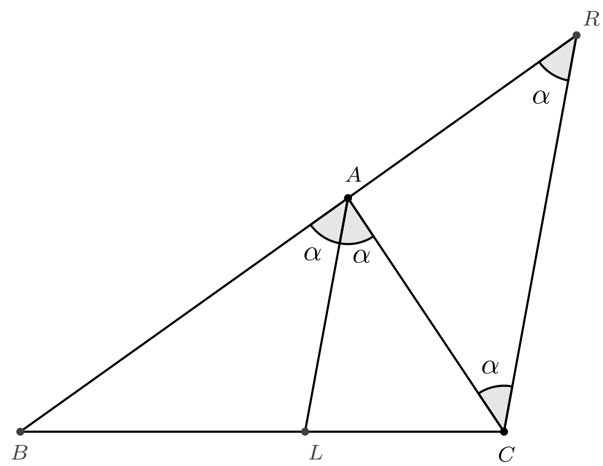
Quádruplas harmônicas e circunferência de Apolônio

Teorema 1. (Bissetriz interna) A bissetriz interna AL do ângulo $\angle A$ de um triângulo ABC divide internamente o lado oposto BC na razão $\dfrac{AB}{CA}$, ou seja,

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{CA}$$

em que L é o ponto de intersecção da bissetriz interna com o lado BC.

Demonstração.



Seja R a intersecção da paralela à bissetriz AL traçada pelo ponto C. É fácil ver que $\angle BAL = \angle CAL = \angle ACR = \angle ARC$, com isso, $AR = AC$. Pelo teorema de Tales temos que

$$\frac{AB}{AR} = \frac{BL}{LC}.$$

Como $AR = AC$, então

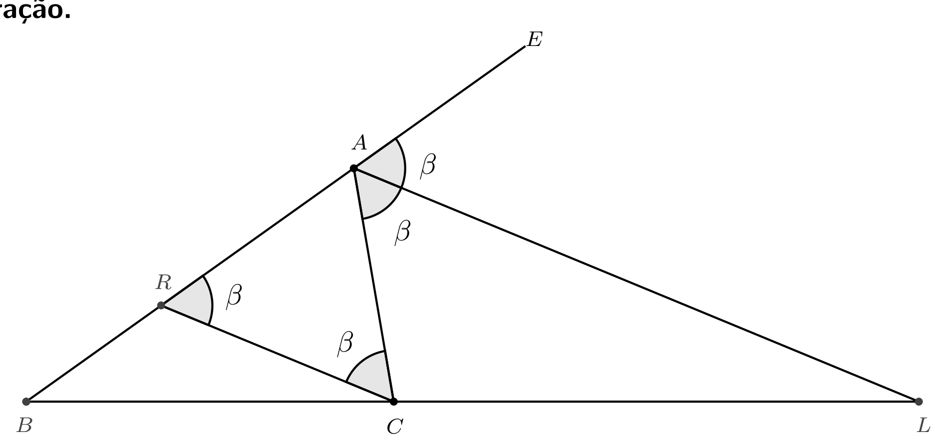
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}.$$

Teorema 2. (Bissetriz externa) A bissetriz externa AL do ângulo $\angle A$ de um triângulo ABC divide externamente o lado oposto BC na razão $\dfrac{AB}{CA}$, ou seja,

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{CA}$$

em que L é o ponto de intersecção da bissetriz externa com o lado BC.

Demonstração.



Seja R a intersecção da paralela à bissetriz AL traçada pelo ponto C. É fácil ver que $\angle EAL = \angle CAL = \angle ACR = \angle ARC$, com isso, $AR = AC$. Pelo teorema de Tales temos que

$$\frac{AB}{AR} = \frac{BL}{LC}.$$

Como $AR = AC$, então

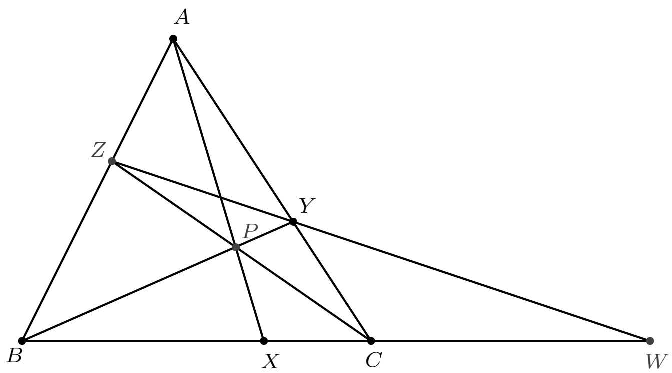
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}.$$

Definição 1. Sejam A, C, B, D quatro pontos alinhados nessa ordem. Dizemos que A, C, B, D formam uma divisão harmônica ou uma quádrupla harmônica se, e somente se,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}.$$

Teorema 3. Seja ABC um triângulo e sejam X, Y e Z pontos sobre os lados BC, CA e AB, respecivamente. Seja W a intersecção da reta YZ com o prolongamento do lado BC. Então B, X, C e W formam uma quádrupla harmônica se, e somente se, AX, BY e CZ são concorrentes.

Demonstração.



$\Rightarrow$ Suponha que AX, BY e CZ estejam alinhados. Pelo teorema de Ceva temos que

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

Além disso, pelo teorema de Menelaus temos que

$$\frac{WC}{WB} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YB} = 1$$

então $\dfrac{BX}{XC} = \dfrac{BW}{WC}$ e, portanto, B, X, C e W formam uma quádrupla harmônica.

$\Leftarrow$ Suponha que B, X, C e W formam uma quádrupla harmônica, ou seja, $\dfrac{BX}{XC} = \dfrac{BW}{WC}$. Pelo teorema de Menelaus temos que

$$\frac{WC}{WB} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YB} = 1.$$

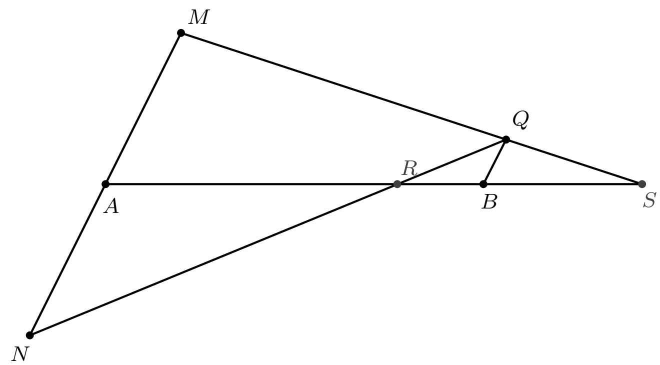
Portanto,

$$\frac{XC}{BX} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YB} = 1, \text{ e}$$

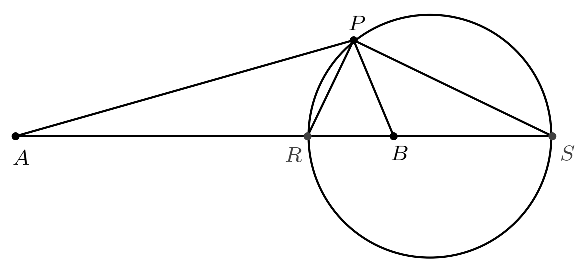
AX, BY e CZ são concorrentes.

Teorema 4. (Circunferência de Apolônio) Sejam A e B dois pontos fixos e $k \neq 1$ é uma constante real. O lugar geométrico dos pontos P que satisfazem $\dfrac{AP}{PB} = k$ é uma circunferência conhecida como **circunferência de Apolônio**.

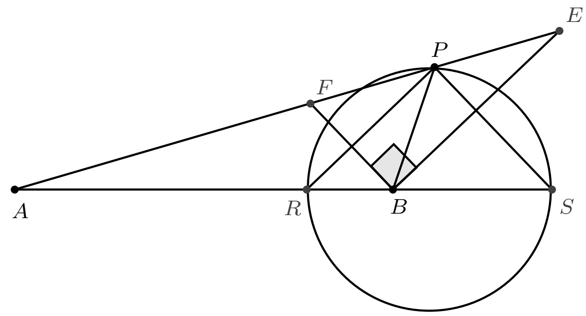
Demonstração. Primeiro observe que sobre a reta AB existem exatamente dois pontos do lugar geométrico. Por A e B trace segmentos paralelos MN e BQ com $BQ = 1$ e $MA = AN = k$. Sejam R e S as intersecções de QN e QM com AB, respectivamente.



Como os triângulos ANR e BQR são semelhantes então $\dfrac{AR}{RB} = \dfrac{AN}{BQ} = \dfrac{k}{1} = k$. Além disso, também são semelhantes os triângulos ASM e BSQ então $\dfrac{AS}{SB} = \dfrac{AM}{BQ} = \dfrac{k}{1} = k$. Portanto, R e S pertencem ao lugar geométrico. Suponha que P é um ponto do lugar geométrico, então $\dfrac{AP}{PB} = k = \dfrac{AR}{RB}$, portanto PR é a bissetriz interna do ângulo $\angle APB$ e como $\dfrac{AP}{PB} = k = \dfrac{AS}{SB}$ então PS é a bissetriz externa do mesmo ângulo, isto garante que P está sobre a circunferência de diâmetro RS (Porque o ângulo $\angle RPS = 90°$?).

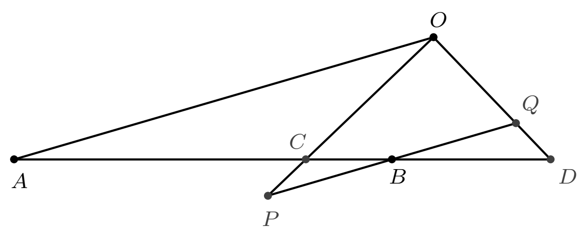


Reciprocamente, considere um ponto P sobre a circunferência de diâmetro RS. Demonstraremos que P é um ponto do lugar geométrico. Pelo ponto B trace paralelas BE e BF às retas PR e PS de tal forma que intersectem AP em E e F, respectivamente. Como os triângulos ARP e ABE são semelhantes com lados paralelos, pelo teorema de Tales temos que $\dfrac{AP}{PE} = \dfrac{AR}{RB} = k$. Pelo mesmo motivo os triângulos semelhantes ABF e ASP garantem que $\dfrac{AP}{PF} = \dfrac{AS}{SB} = k$. Assim, $PE = PF$, ou seja, P é o ponto médio do segmento EF e como o triângulo EBF é retângulo temos que $PB = PE = PF$. Portanto, $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AP}{PE} = k$, com isso podemos afirmar que P pertence ao lugar geométrico.



Teorema 5. Seja A, C, B e D uma quádrupla harmônica. Seja O um ponto que não pertence à reta AB. Se uma paralela pelo ponto B à OA intersecta OC e OD em pontos P e Q então $PB = PQ$.

Demonstração.



Temos que os triângulos OAC e PCB são semelhantes então

$$\frac{AO}{PB} = \frac{AC}{CB}.$$

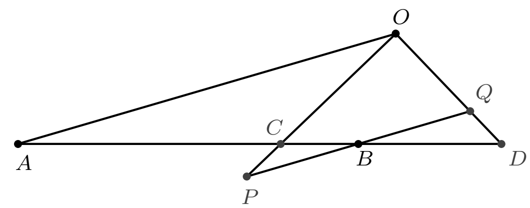
Além disso, os triângulos OAD e BQD são semelhantes então

$$\frac{AO}{BQ} = \frac{AD}{BD}.$$

Como A, C, B e D é uma quádrupla harmônica então $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{AD}{DB}$. Portanto, é fácil concluir que, $PB = BQ$.

Teorema 6. Sejam A, C, B e D quatros pontos colineares e seja O um ponto que não pertence à reta AB. Se a paralela à OA passando por B intersecta OC e OD em pontos P e Q, respectivamente, tais que $PB = BQ$ então A, C, B e D formam uma quádrupla harmônica.

Demonstração.



Temos que os triângulos OAC e PCB são semelhantes então

$$\frac{AO}{PB} = \frac{AC}{CB}.$$

Além disso, os triângulos OAD e BQD são semelhantes então

$$\frac{AO}{BQ} = \frac{AD}{BD}.$$

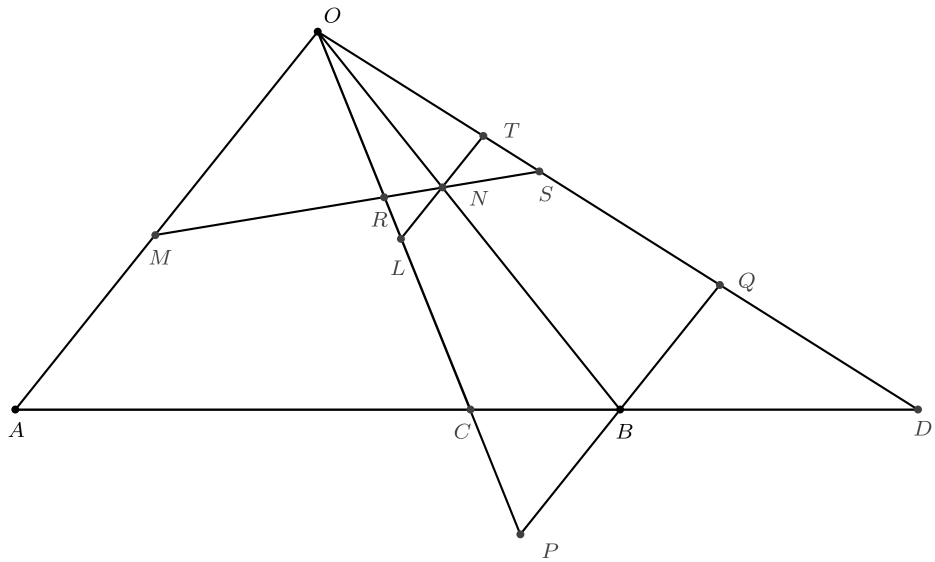
Como $PB = BQ$, então $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{AD}{DB}$. Portanto, é fácil concluir que, A, C, B e D é uma quádrupla harmônica.

Teorema 7. Seja A, C, B e D uma quádrupla harmônica e um ponto O que não pertence à reta AB. Sejam M, R, N e S as intersecções de OA, OC, OB e OD, respectivamente, com uma reta arbitrária. Então, M, R, N e S formam uma quádrupla harmônica.

Demonstração. Pelos pontos B e N trace paralelas à OA que intersectam OC e OD, respectivamente, nos pontos P, Q e L, T. É fácil ver que

$$\frac{PB}{LN} = \frac{OB}{ON} = \frac{BQ}{NT}.$$

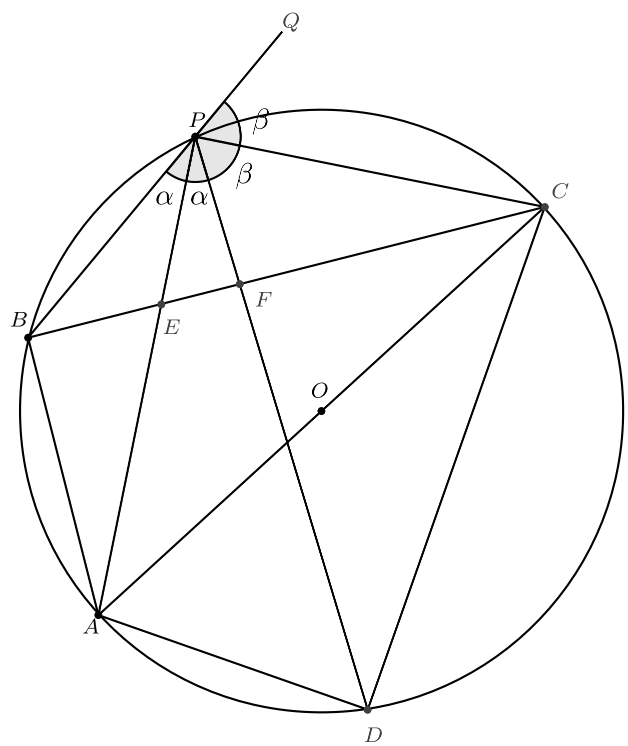
Como A, C, B e D formam uma quádrupla harmônica então, pelo teorema 5, que $PB = BQ$. Com isso, $LN = NT$ e, portanto, M, R, N e S formam uma quádrupla harmônica pelo teorema 6.



Problema 1. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência tal que $AB = AD$ e AC é um diâmetro. Seja P um ponto sobre o arco BC que não contém A e D. Se PA e PD intersectam o lado BC nos pontos E e F, respectivamente, e $BE = 3$ e $EF = 2$, determine FC.

Solução. Como $AB = AD$ então $\angle BPA = \angle APD = \alpha$. Como $\angle APC = 90^\circ$ então $\angle FPC = 90^\circ - \alpha = \beta$ e $\angle QPC = 90^\circ - \alpha = \beta$. Portanto, PE e PC são bissetrizes interna e externa do ângulo $\angle BPF$, respectivamente e, com isso, B, E, F e C formam um quádrupla harmônica então

$$\frac{BE}{EF} = \frac{BC}{FC} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{FC + 5}{FC} \Leftrightarrow FC = 10.$$



Problema 2. (Turquia) Seja ABC um triângulo com $AB \neq AC$. As bissetrizes interna e externa relativas ao vértice A intersectam a reta BC em D e E, respectivamente. Se os pés das perpendiculares baixadas de um ponto F do círculo de diâmentro DE sobre as retas BC, CA e AB são K, L e M, respectivamente, prove que $KL = KM$.

Solução. O círculo de diâmetro DE é um círculo de Apolônio do triângulo ABC relativo ao vértice A então

$$\frac{FB}{FC} = \frac{AB}{AC}. \ (1)$$

Pela lei dos senos temos que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin \angle C}{\sin \angle B}. \ (2)$$

De (1) e (2) temos que

$$\frac{FB}{FC} = \frac{\sin \angle C}{\sin \angle B} \Leftrightarrow$$

$$FB \sin \angle B = FC \sin \angle C. \ (3)$$

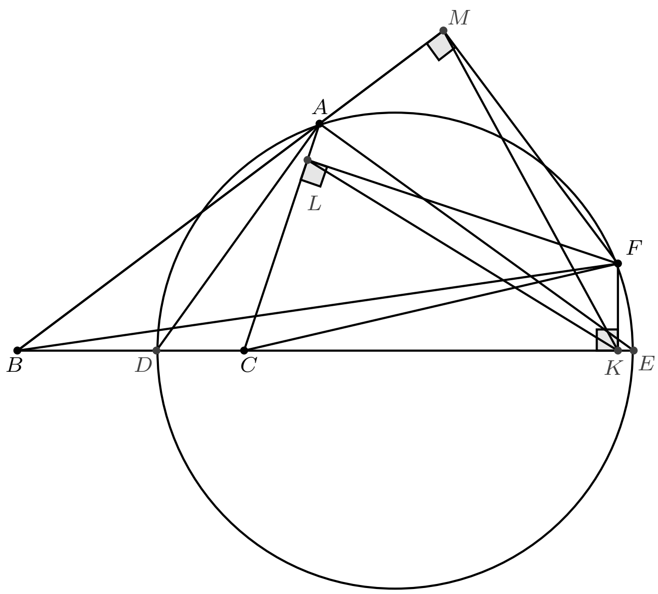
Como o círculo de diâmetro BF passa pelos pontos K e M, então

$$KM = FB \sin \angle B.$$

De maneira similar, temos que

$$KL = FC \sin \angle C.$$

Portanto, de (3), temos que $KL = KM$.



Exercícios propostos

1. Em um triângulo ABC, BD e BE são as bissetrizes interna e externa, respectivamente. Se $AD = 5$ e $DC = 3$, determine a medida do segmento CE.

2. Seja ABC um triângulo e sejam D o pé da bissetriz relativa ao vértice A, I o incentro e I_a o ex - incentro oposto ao vértice A. Prove que A, I, D e I_a formam uma quádrupla harmônica.

3. Em um triângulo não equilátero, a reta que passa pelo baricentro e pelo incentro é paralela a um dos lados do triângulo. Demonstre que os lados do triângulo estão em progressão aritmética.

4. (Shortlist IMO) Seja ABC um triângulo, e sejam D, E, F os pontos de tangência do círculo inscrito no triângulo ABC com os lados BC, CA e AB respectivamente. Seja X um ponto no interior do triângulo ABC tal que o círculo inscrito no triângulo XBC tangencia XB, XC e BC em Z, Y e D, respectivamente. Prove que $EFZY$ é inscritível.

5. (TST Jr Balkan - Romênia) Seja ABC um triângulo retâgulo com $\angle A = 90°$ e D um ponto sobre o lado BC. Sejam E o simétrico de A com relação a BD e F o ponto de intersecção de CE com a perpendicular a BC por D. Prove que AF, DE e BC são concorrentes.

Bibliografia

1. Geometría - Teoría y práctica.
Fernando Alva Gallegos

2. College Geometry - An introduction to the modern geometry of the triangle and the circle.
Nathan Altshiller - Court

3. Geometría
Radmila Bulajich Manfrino e José Antonio Gómez Ortega

4. Harmonic Division and its Applications
Cosmin Pohoata