Transformações geométricas I: Translações

Seja $\vec{v}$ um vetor no plano e um segmento de medida a. Seja A um ponto do plano e seja A' um ponto tal que o segmento AA' tem a mesma direção e sentido do vetor $\vec{v}$ e possui comprimento a. Nesse caso dizemos que o ponto A' é obtido a partir do ponto A na direção e sentido do vetor $\vec{v}$ com distância a. Seja F' a imagem de uma figura F a partir de uma translação e sejam A e B dois pontos quaisquer de F tais que A' e B' são, respectivamente, suas imagens por uma translação. Como $AA' \parallel BB'$ e $AA' = BB'$ então o quadrilátero $AA'B'B$ é uma paralelogramo e, consequentemente, $AB \parallel A'B'$ e $AB = A'B'$. Portanto, se F' é a imagem de F por uma translação então os segmentos correspondentes dessas figuras são iguais, paralelos e possuem a mesma direção e sentido.

Problema 1. Sejam AB e CD dois segmentos tais que $AB \parallel DC$ e $AB = DC$. Prove que existe uma translação que leva AB em CD.

Solução. Como $AB \parallel DC$ e $AB = DC$ então $ABCD$ é um paralelogramo e, com isso, $AC \parallel BD$ e $AC = BD$. Portanto existe uma translação que leva AB em DC.

Problema 2. Sejam M e N os pontos médios dos lados de um quadrilátero AD e BC de um quadrilátero $ABCD$. Prove que se $2MN = AB + CD$ então $AB \parallel CD$.

Solução.
Sejam MB' e MC' as imagens de AB e CD, respectivamente, obtidas por translações. Os quadriláteros $AMB'B$ e $DMC'C$ são paralelogramos e, portanto,

$$BB' \parallel AM \quad \text{e} \quad BB' = AM,$$

$$CC' \parallel DM \quad \text{e} \quad CC' = DM.$$

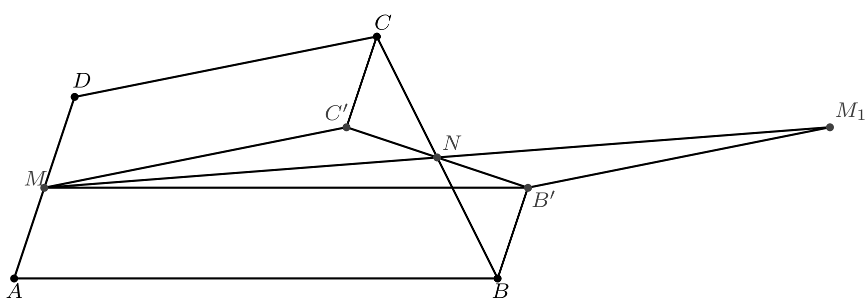
Como $AM = MD$ então $BB' \parallel CC'$ e $BB' = CC'$. Além disso, $BN = NC$, com isso,

$$\Delta BNB' \equiv \Delta CNC'.$$

Portanto, B, N e C são colineares. Seja M_1 o ponto sobre a reta MN tal que $MN = NM_1$. Como $NC' = NB'$ e $MN = NM_1$ então $MB'M_1C$ é um paralelogramo com $MC' = B'M_1$. Temos que $2MN = AB + CD \Leftrightarrow MM_1 = MB' + B'M_1$ o que é um absurdo pois contraria a desigualdade triangular. Portanto B' perntece ao segmento MM_1, ou seja,

$$MB' \parallel MN \parallel MC'.$$

Assim, $AB \parallel MN$ e $DC \parallel MN$.



Exercícios

1. Prove que uma sequência de duas translações pode ser substituída por uma simples translação.

2. Seja $ABCD$ um trapézio com $BC \parallel AD$ e seja M a interseção das bissetrizes dos ângulos $\angle A$ e $\angle B$. Além disso, seja N a interseção bas bissetrizes dos ângulos $\angle C$ e $\angle D$. Prove que $2MN = |AB + CD - BC - AD|$.

3. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com $AD = BC$. Sejam E e F os pontos médios dos segmentos CD e AB, respectivamente. Seja H a interseção de AD e FE e G a interseção de BC e FE. Prove que

$$\angle AHF = \angle BGF.$$

4. Seja P um ponto no interior de um retângulo $ABCD$ tal que $\angle BPC + \angle APD = 180°$. Determine $\angle BCP + \angle DAP$.

5. Seja P um ponto no interior de um paralelogramo $ABCD$ de área S. Prove que

$$AP \cdot CP + BP \cdot DP \geq S.$$

Bibliografia

1. Problems in plane and solid geometry - V.1 - Plane Geometry
Viktor Prasolov

2. Geometric transformations I
I.M. Yaglom

3. Euclidean and transformational geometry - A deductive inquiry
Shlomo Libeskind

4. Geometric transformations I
Kin Y. Li
Mathematical Excalibur - Volume 13, número 2 - Maio/Junho/2008

5. Mathematical Miniatures
Titu Andreescu e Svetoslav Savchev