Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 3

Prof. Cícero Thiago

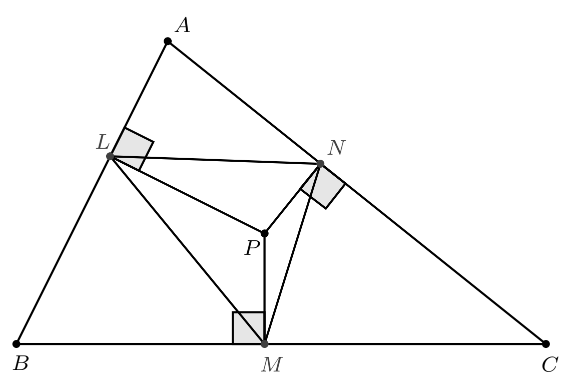
Aula 17

Triângulo Pedal

Seja P um ponto qualquer no plano do triângulo ABC e sejam L, M e N as projeções de P sobre as retas AB, BC e CA. O triângulo LMN será chamado de triângulo Pedal.

Teorema 1. Seja P um ponto qualquer no plano do triângulo ABC e sejam L, M e N as projeções de P sobre as retas AB, BC e CA. Então, $LN = AP \sin \angle A$, $LM = BP \sin \angle B$ e $MN = CP \sin \angle C$.

Demonstração.



Aplicando a lei dos senos no triângulo ALN temos que

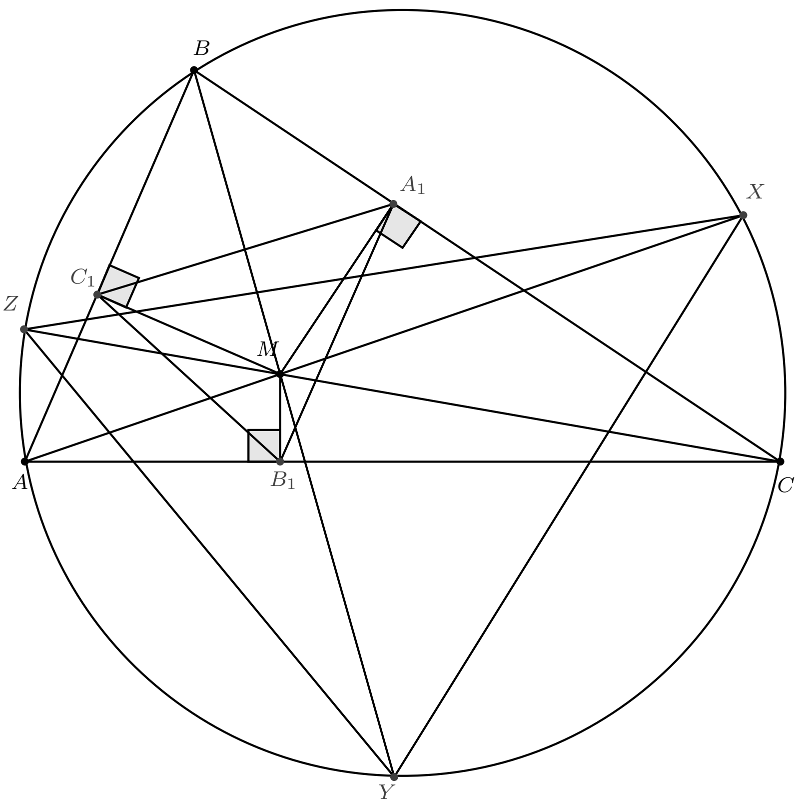
$$\frac{LN}{\sin \angle A} = AP \Leftrightarrow LN = AP \sin \angle A.$$

Analogamente, $LM = BP \sin \angle B$ e $MN = CP \sin \angle C$.

Teorema 2. Seja ABC um triângulo e $C(O,R)$ sua circunferência circunscrita. Seja M um ponto no plano do triângulo. Sejam A_1, B_1 e C_1 as projeções de M sobre os lados do triângulo. Então

$$\frac{\text{Área}(A_1B_1C_1)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{|R^2 - OM^2|}{4R^2}.$$

Demonstração.



Temos que $B_1C_1 = AM\sin\angle A$, $A_1C_1 = BM\sin\angle B$ e $B_1C_1 = CM\sin\angle C$. Segue que

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AM}{2R},\ \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{BM}{2R},\ \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{CM}{2R}.$$

Sejam X, Y e Z são as interseções de AM, BM e CM, respectivamente, com $C(O,R)$. Então

$$\begin{aligned}\angle A_1B_1C_1 &= \angle A_1B_1M + \angle MB_1C_1 = \angle A_1CM + \angle MAC_1\\ &= \angle ZYB + \angle BYX = \angle ZYX.\end{aligned}$$

Analogamente, $\angle B_1C_1A_1 = \angle YZX$ e $\angle B_1A_1C_1 = \angle YXZ$. Portanto, os triângulos $A_1B_1C_1$ e XYZ são semelhantes e

$$\frac{A_1B_1}{XY} = \frac{R_{A_1B_1C_1}}{R}.$$

Como os triângulos MAB e MYX são semelhantes temos que

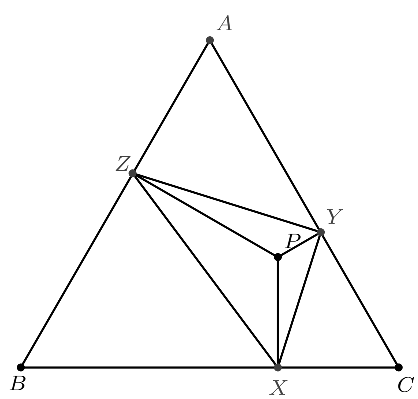
$$\frac{XY}{AB} = \frac{MX}{MB}.$$

Combinando os resultados obtidos temos

$$\begin{aligned}\frac{\text{Área}(A_1B_1C_1)}{\text{Área}(ABC)} &= \frac{R}{R_{A_1B_1C_1}} \cdot \frac{A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot A_1C_1}{AB \cdot BC \cdot AC} \\ &= \frac{MX}{MB} \cdot \frac{MA}{2R} \cdot \frac{MB}{2R} \\ &= \frac{MA \cdot MX}{4R^2} = \frac{|R^2 - OM^2|}{4R^2}.\end{aligned}$$

Problema 1. Prove que os lados do triângulo pedal de qualquer ponto interior de um triângulo equilátero são proporcionais às distâncias de P aos vértices correspondentes.

Solução.

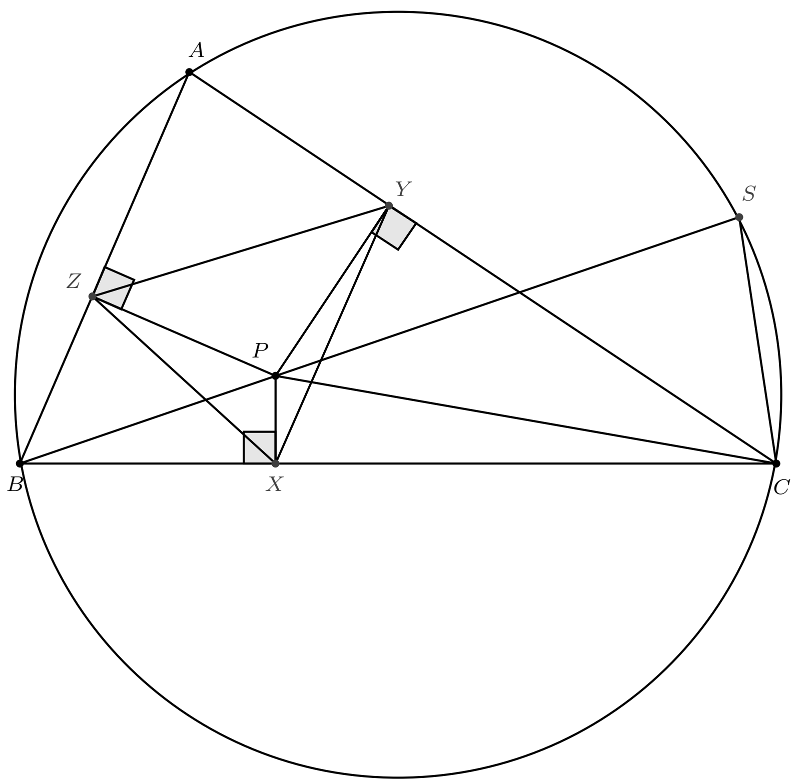


Pelo teorema 1 temos que $ZY = PA \sin \angle A = PA \sin 60°$. Analogamente, $XZ = PB \sin 60°$ e $XY = PC \sin 60°$. Portanto, $\dfrac{ZY}{PA} = \dfrac{XZ}{PB} = \dfrac{XY}{PC} = \sin 60°$.

Problema 2. (Romênia) Seja P um ponto no interior do triângulo ABC. Prove que

$$PA \cdot \frac{\sin \angle A}{\sin(\angle BPC - \angle A)} = PB \cdot \frac{\sin \angle B}{\sin(\angle CPA - \angle B)} = PC \cdot \frac{\sin \angle C}{\sin(\angle APB - \angle C)}.$$

Solução.



Temos que $ZY = PA \cdot \sin \angle A$, $ZX = PA \cdot \sin \angle B$ e $XY = PC \cdot \sin \angle C$. Além disso, $\angle ZXY = \angle ZXP + \angle YXP = \angle ZBS + \angle YCP = \angle ACS + \angle YCP = \angle PCS$. Dessa forma,

$$\angle BPC = \angle PCS + \angle PSC = \angle ZXY + \angle A \Leftrightarrow \angle ZXY = \angle BPC - \angle A.$$

Aplicando a lei dos senos no triângulo XYZ obtemos imediatamente o resultado desejado.

Problema 3. Considere um triângulo ABC. Sejam AD e AE as bissetrizes interna e externa, respectivamente, do ângulo $\angle A$. Seja F um ponto sobre o círculo circunscrito do ΔAED e K, L e M os pés das perpendiculares de F a BC, AB e AC, respectivamente. Prove que $KL = KM$.

Problema 4. Seja ABC um triângulo inscrito em um círculo de raio R e seja P um ponto no interior do triângulo. Prove que

$$\frac{PA}{BC^2} + \frac{PB}{CA^2} + \frac{PC}{AB^2} \geq \frac{1}{R}.$$

Problema 5. Seja P um ponto no interior do triângulo ABC. Se p_a, p_b e p_c são as distâncias de P aos lados do triângulo ABC, prove que

$$PA + PB + PC \geq 2(p_a + p_b + p_c),$$

com igualdade acontecendo se, e somente se, o triângulo ABC é equilátero e P é o circuncentro. (Desigualdade de Erdos - Mordell)

Problema 6. Seja P um ponto no interior do triângulo ABC. Prove que

$$aPA + bPB + cPC \geq 4 \cdot \text{Área}(ABC).$$

Problema 7. (Balkan) Seja ABC um triângulo acutângulo. Sejam A_1, B_1 e C_1 as projeções do baricentro G sobre os lados do triângulo. Prove que

$$\frac{2}{9} \leq \frac{\text{Área}(A_1B_1C_1)}{\text{Área}(ABC)} \leq \frac{1}{4}.$$

Problema 8. (IMO) Seja P um ponto no interior de triângulo ABC. Prove que pelo menos um dos ângulos $\angle PAC$, $\angle PBC$ e $\angle PCA$ é menor ou igual a $30°$.

Bibliografia

1. Mathematical Reflections - the first two years
Titu Andreescu

2. Notas de aula do professor Marcelo Mendes de Oliveira.

3. Inequalities
Radmila Bulajich, José Antonio Gómez Ortega e Rogelio Valdez Delgado