Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 3

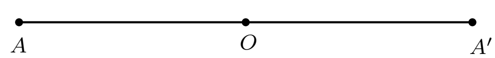
Prof. Cícero Thiago

Aula 18

## Transformações geométricas II - Simetria e rotação.

### 1. Simetria com relação a um ponto.

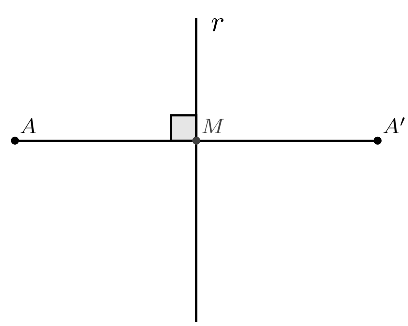
Dizemos que o ponto $A'$ é o simétrico de $A$ com relação a um ponto fixo $O$ se, e somente se, o ponto $O$ for o ponto médio do segmento $AA'$.




Sejam $F$ e $F'$ duas figuras simétricas com relação ao ponto $O$ e sejam $AB$ e $A'B'$ os segmentos correspondentes nessas duas figuras. É fácil ver que $ABA'B'$ é um paralelogramo pois as diagonais cortam - se em seus pontos médios.

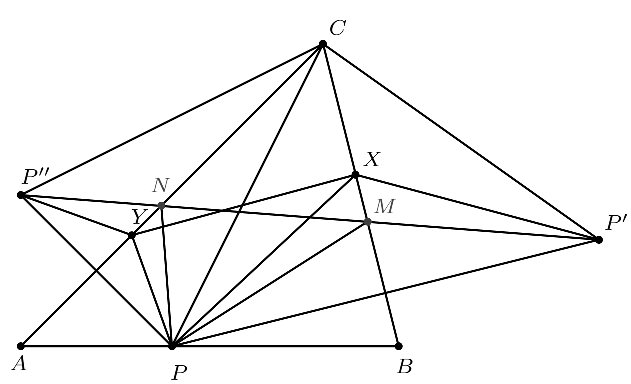
### 2. Simetria com relação a uma reta.

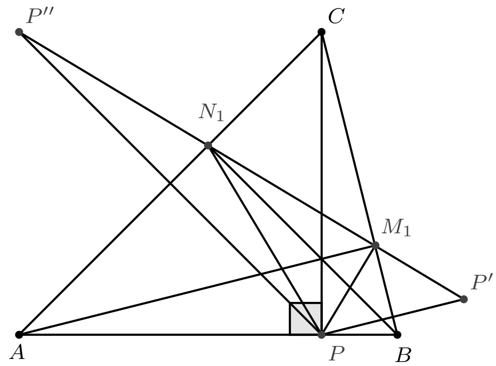
Dizemos que o ponto $A'$ é o simétrico de $A$ com relação à reta $r$ se, e somente se, a reta $r$ é a mediatriz do segmento $AA'$.



**Problema 1.** (Problema de Fagnano) Determine o triângulo de perímetro mínimo inscrito em um triângulo acutângulo.

**Solução.** Seja $ABC$ um triângulo acutângulo. Queremos achar pontos $M$, $N$ e $P$ sobre os lados $BC$, $CA$ e $AB$, respectivamente, tais que o perímetro do triângulo $MNP$ seja mínimo. Inicialmente vamos considerar uma versão mais simples do problema. Fixe o ponto $P$ sobre o lado $AB$. Vamos achar os pontos $M$ e $N$ sobre $BC$ e $CA$, respectivamente, tais que o triângulo $MNP$ tenha perímetro mínimo. (O mínimo irá depender da escolha do ponto $P$.) Seja $P'$ o simétrico de $P$ com relação à reta $BC$ e $P''$ o simétrico de $P$ com relação à reta $AC$. Então $CP' = CP = CP''$, $\angle PC'B = \angle PCB$ e $\angle P''CA = \angle PCA$. Se $\angle BCA = \gamma$, então $\angle P'CP'' = 2\gamma$. Mas, $2\gamma < 180°$, pois $\gamma < 90°$. Consequetemente, a reta $P'P''$ intersecta os lados $BC$ e $AC$ do triângulo $ABC$ nos pontos $M$ e $N$, respectivamente, e o perímetro do triângulo $MNP$ é igual à $P'P''$. De maneira semelhante, se $X$ é um ponto sobre $BC$ e $Y$ um ponto sobre $AC$, o perímetro do triângulo $XPY$ é igual ao comprimento da poligonal $P'XYP''$, que é maior ou igual a $P'P''$. Como isso, o perímetro do triângulo $PXY$ é maior ou igual ao perímetro do triângulo $PMN$ e a igualdade ocorre se, e somente se, $X = M$ e $Y = N$. Agora, precisamos encontrar o ponto $P$ sobre o lado $AB$ tal que o segmento $P'P''$ tenha comprimento mínimo. Veja que $P'P''$ é a base do triângulo isósceles $P''P'C$ com ângulo $\angle P''CP' = 2\gamma$ constante e lados $CP' = CP'' = CP$. Então, basta escolher $P$ sobre $AB$ tal que $CP' = CP$ seja mínimo, mas isso acontece quando $P$ é o pé da altura relativa ao vértice $C$. Se $P$ é o pé da altura relativa ao vértice $C$ então $M$ e $N$ serão os pés das outras duas alturas. Para provar isso, sejam $M_1$ e $N_1$ os pés das alturas do triângulo $ABC$ relativas aos vértices $A$ e $B$, respectivamente. Então $\angle BM_1P' = \angle BM_1P = \angle BAC = \angle CM_1N_1$, mostrando que o ponto $P'$ está sobre a reta $M_1N_1$. De maneira análoga, $P''$ está sobre a reta $M_1N_1$ e, portanto, $M = M_1$ e $N = N_1$. Dessa forma, de todos os triângulos inscritos no triângulo $ABC$ o triângulo órtico é o que tem o menor perímetro.

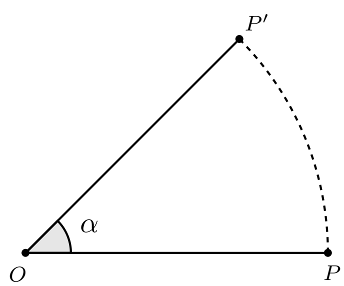





**Problema 2.** (Cone Sul) Seja $ABC$ um triângulo e sejam $AN$, $BM$ e $CP$ as alturas relativas aos lados $BC$, $CA$ e $AB$, respectivamente. Sejam $R$, $S$ as projeções de $N$ sobre os lados $AB$, $BC$, respectivamente, e $Q$, $W$ as projeções de $N$ sobre as alturas $BM$ e $CP$, respectivamente. (a) Prove que $R$, $Q$, $W$, $S$ são colineares;
(b) Prove que $MP = RS - QW$.

**3. Rotação.**

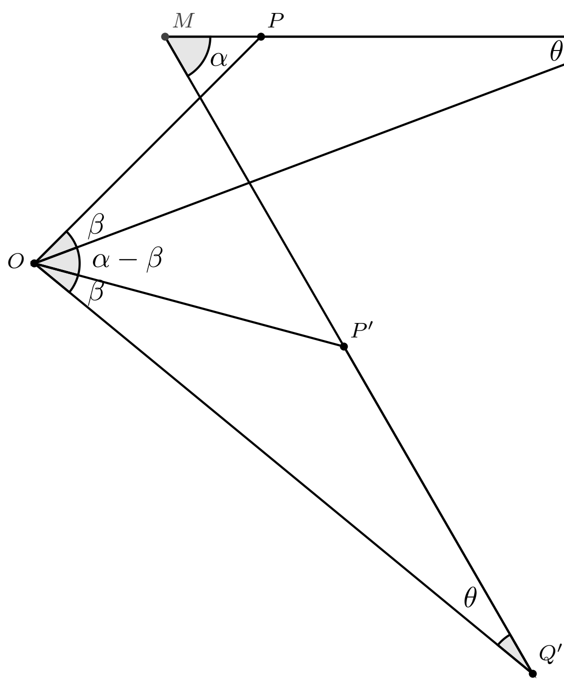
Seja $O$ um ponto fixo de um plano orientado e um ângulo $\alpha$ dizemos que $P'$ é a imagem de $P$ por uma rotação de centro $O$ e ângulo $\alpha$ se $OP' = OP$ e $\angle P'OP = \alpha$.




**Teorema 1.** Seja $O$ um ponto fixo de um plano orientado e um ângulo $\alpha$. Além disso, sejam $P$ e $Q$ pontos do plano distintos de $O$ e suas imagens $P'$ e $Q'$ pela rotação de centro $O$ e ângulo $\alpha$. Então $PQ = P'Q'$ e a medida do ângulo formado pelas retas $PQ$ e $P'Q'$ é $\alpha$.

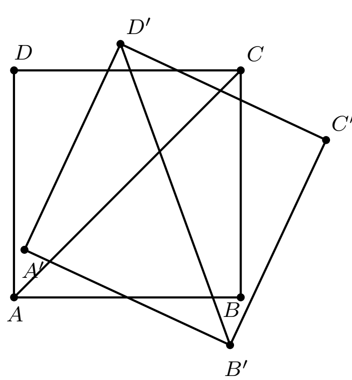
**Demonstração.**
É fácil ver que os triângulos $OPQ$ e $OP'Q'$ são congruentes pois $\angle POQ = \angle POP' - \angle QOP' = \angle QOQ' - \angle QOP' = \angle P'OQ'$, $OP = OP'$ e $OQ = OQ'$. Prolongue $P'Q'$ até

intersectar $PQ$ no ponto $M$. O quadrilátero $MQQ'O$ é inscritível pois $\angle PQO = \angle P'Q'O$ e, com isso, $\angle QMQ' = \angle QOQ' = \alpha$.

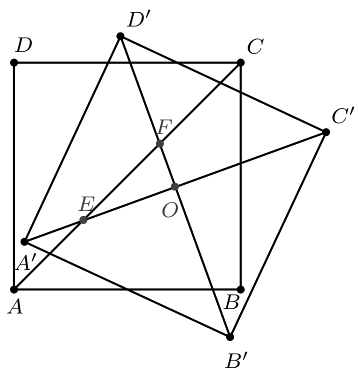



**Problema 3.** (OBM) Na figura, o quadrado $A'B'C'D'$ foi obtido a partir de uma rotação no sentido horário do quadrado $ABCD$ de 25 graus em torno do ponto médio de $AB$. Qual é o ângulo agudo, em graus, entre as retas $AC$ e $B'D'$?

(a) 5 (b) 25 (c) 45 (d) 65 (e) 85



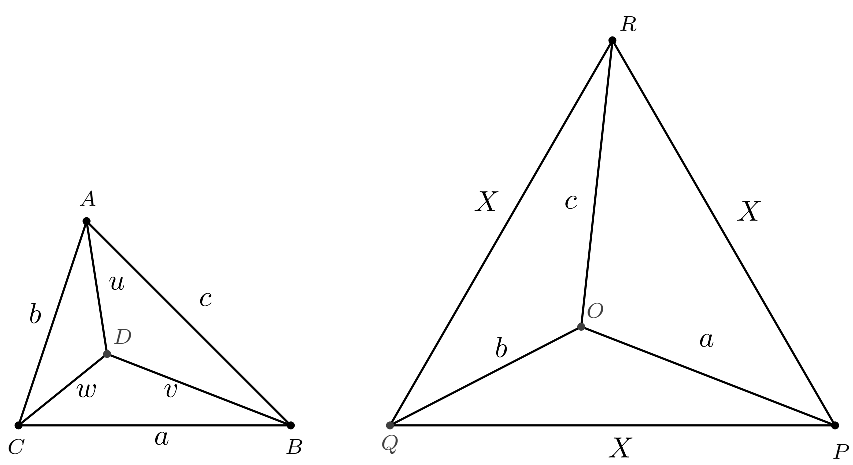

**Solução.**




Pelo teorema 1 temos que o ângulo agudo entre $AC$ e $A'C'$ é $\angle CEC' = 25^\circ$. Como $A'C'$ e $B'D'$ são as diagonais do quadrado então o ângulo entre eles é $\angle D'OA' = 90^\circ$. Portanto, o ângulo desejado será $\angle EFO = 65^\circ$.

**Problema 4.** (Ponto de Fermat) Seja $ABC$ um triângulo acutângulo. Encontrar o ponto interior que minimiza a soma $AP + BP + CP$.

**Problema 5.** (USAMO) Dois triângulos $ABC$ e $PQR$ como mostra a figura abaixo são tais que $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 120^\circ$. Prove que $X = u + v + w$.



**Problema 6.** Seja $P$ um ponto no interior do quadrado $ABCD$. Prove que as perpendiculares baixadas desde $A$, $B$, $C$ e $D$ sobre $PB$, $PC$, $PD$ e $PA$, respectivamente, são concorrentes.

**Problema 7.** (Cone Sul) Seja $ABC$ um triângulo isósceles com $AB = AC$. Uma reta $l$ passando pelo incentro $I$ de $ABC$ intersecta $AB$ e $AC$ em $D$ e $E$, respectivamente. $F$ e $G$ são pontos sobre $BC$ tais que $BF = CE$ e $CG = BD$. Mostre que o ângulo $\angle FIG$ é constante.

**Problema 8.** Prove que composição de duas rotações de ângulos $\alpha$ e $\beta$, respectivamente, é uma rotação de ângulo de medida $\alpha + \beta$. Se os centros das duas rotações forem diferentes determine o centro da nova rotação.

**Problema 9.** (Teorema de Napoleão) Seja $ABC$ um triângulo escaleno. Se exteriormente são construídos triângulos equiláteros $ABM$, $BCN$ e $ACP$, prove que os baricentros desses triângulos são vértices de um triângulo equilátero.