Teorema 5. *(Teorema dos Restos) Se b_1 e b_2 deixam restos r_1 e r_2 na divisão por a, respectivamente, então:*

$$b_1 + b_2 \text{ deixa o mesmo resto que } r_1 + r_2 \text{ na divisão por } a$$

$$b_1 b_2 \text{ deixa o mesmo resto que } r_1 r_2 \text{ na divisão por } a.$$

Demonstração. Por hipótese, existem q_1, q_2 e q tais que: $b_1 = aq_1 + r_1$, $b_2 = aq_2 + r_2$ e $r_1 + r_2 = aq + r$, logo:

$$b_1 + b_2 = a(q_1 + q_2 + q) + r.$$

Como $0 < r < |a|$, $b_1 + b_2$ deixa resto r quando dividido por a. A demonstração para o produto é deixada ao cargo do leitor.

Observação 6. *Em alguns casos, é preferível que o professor faça uma demonstração do resultado anterior para $a = 3$ ou $a = 5$ apenas com o intuito de deixar os alunos mais confortáveis a respeito do resultado. É preferível que mais tempo seja gasto resolvendo exemplos e problemas. Na seção de congruências, os alunos terão um contato mais apropriado com o enunciado anterior.*

Exemplo 7. *Qual o resto que o número $1002 \cdot 1003 \cdot 1004$ deixa quando dividido por 7?*

Como 1002 deixa resto 1 por 7, o número acima deixa o mesmo resto que $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ por 7.

Exemplo 8. *Qual o resto que o número 4^{5000} deixa quando dividido por 3?*

Como 4 deixa resto 1 por 3, 4^{5000} deixa o mesmo resto que $\underbrace{1 \cdot 1 \cdots 1}_{5000} =$ 1 por 3.

Exemplo 9. *Qual o resto que o número 2^{2k+1} deixa quando dividido por 3?*

Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI)

Curso de Teoria dos Números - Nível 2

Aula 1 - Divisibilidade I

Samuel Barbosa Feitosa

Arquivo Original[1]

[1]**Documento:** "...gaia/educacional/matematica/pot2tn01/Aula01-DivisibilidadeI.pdf".

Sumário

1 Divisibilidade I

Teorema 1. *(Algoritmo da Divisão) Para quaisquer inteiros positivos a e b, existe um único par (q, r) de inteiros não negativos tais que $b = aq + r$ e $r < a$. Os números q e r são chamados de quociente e resto, respectivamente, da divisão de b por a.*

Exemplo 2. *Encontre um número natural N que, ao ser dividido por 10, deixa resto 9, ao ser dividido por 9 deixa resto 8, e ao ser dividido por 8 deixa resto 7.*

O que acontece ao somarmos 1 ao nosso número? Ele passa a deixar resto 0 na divisão por 10, 9 e 8. Assim, um possível valor para N é $10 \cdot 9 \cdot 8 - 1$.

Exemplo 3. *a) Verifique que $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)$*

b) Calcule o resto da divisão de 4^{2012} por 3.

Para o item a), usando a distributividade e efetuando os devidos cancelamentos no lado direito, podemos escrever:

$$a^n + a^{n-1} + \ldots + a^2 + a - a^{n-1} - a^{n-2} - \ldots - a - 1 = a^n - 1$$

Para o item b), veja que $3 = 4 - 1$ e assim é natural substituir os valores dados na expressão do primeiro item:

$$4^{2012} - 1 = 3(4^{2011} + \ldots + 4 + 1).$$

Isso significa que $q = (4^{2011} + \ldots + 4 + 1)$ e que $r = 1$.

Observação 4. *O teorema anterior admite um enunciado mais geral: Para quaisquer inteiros a e b, com $a \neq 0$, existe um único par de inteiros (q, r) tais que $b = aq + r$, $0 \leq r < |a|$. Por exemplo, o resto da divisão de -7 por -3 é 2 e o quociente é 3.*

Iremos agora estudar propriedades a respeito das operações com restos.

é um número inteiro.

1.1 Problemas Propostos

Problema 18. *Encontre os inteiros que, na divisão por 7, deixam um quociente igual ao resto.*

Problema 19. *Determinar os números que divididos por 17 dão um resto igual ao quadrado do quociente correspondente.*

Problema 20. *(OCM 1985) Encontre o quociente da divisão de $a^{128}-b^{128}$ por*

$$(a^{64}+b^{64})(a^{32}+b^{32})(a^{16}+b^{16})(a^{8}+b^{8})(a^{4}+b^{4})(a^{2}+b^{2})(a+b)$$

Problema 21. *(OCM 1994) Seja $A = 777\dots77$ um número onde o dígito "7" aparece 1001 vezes. Determinar o quociente e o resto da divisão de A por 1001.*

Problema 22. *Encontre um inteiro que deixa resto 4 na divisão por 5 e resto 7 na divisão por 13.*

Problema 23. *Encontre o menor inteiro que, dividido por 29 deixa resto 5, e dividido por 31 dá resto 28.*

Problema 24. *Prove que, para todo inteiro positivo n o número n^5-5n^3+4n é divisível por 120.*

Problema 25. *(Fatorações Importantes)*

a) Seja $S = 1+z+z^2+z^3+\ldots+z^{n-1}$. Veja que $S+z^n = 1+zS$ então $S(z-1) = z^n-1$.

Conclua que, para quaisquer x e y vale:

$$x^n-y^n = (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+x^2y^{n-3}+xy^{n-2}+y^{n-1})$$

Note que 2^0 deixa resto 1 por 3, 2^1 deixa resto 2 por 3, 2^2 deixa resto 1 por 3, 2^3 deixa resto 2 por 3, 2^4 deixa resto 1 por 3. Precebeu alguma coisa? Como 100 é par, o resto deverá ser 1. Como 2^2 deixa resto 1, então $2^{2k} = \underbrace{2^2\cdot 2^2\cdot\ldots\cdot 2^2}_{k}$ deixa o mesmo resto que $\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{k} = 1$ e $2^{2k+1} = 2^{2k}\cdot 2$ deixa o mesmo resto que $1\cdot 2 = 2$ por 3.

Exemplo 10. *Qual o resto de n^3+2n na divisão por 3?*

Se o resto de n por 3 é r, o resto de n^3+2n é o mesmo de r^3+2r. Para $r=0$, esse resto seria 0. Para $r=1$, seria o mesmo resto de 3 que é 0. Finalmente, para $r=2$, o resto seria o mesmo de $8+4=12$ que também é 0. Assim, não importa qual o resto de n por 3, o número n^3+2n sempre deixará resto 0. Uma ideia importante nessa solução foi dividí-la em casos. Também poderíamos ter resolvido esse exemplo apelando para alguma fatoração:

$$n^3+2n = n^3-n+3n = n(n^2-1)+3n = n(n-1)(n+1)+3n.$$

Como $n-1$, n e $n+1$ são consecutivos, um deles é múltiplo de 3. Assim, o último termo da igualdade anterior é a soma de dois múltiplos de 3 e consequentemente o resto procurado é 0.

Observação 11. *Fatorações podem ser muito úteis para encontrarmos os valores explícitos de q e r.*

Exemplo 12. *Prove que, para cada n natural,*

$$(n+1)(n+2)\cdots(2n)$$

é divisível por 2^n.

Veja que

$$(n+1)(n+2)\cdots(2n) = \frac{1\cdot 2\cdots 2n}{1\cdot 2\cdots n}$$

Para cada número natural k no produto escrito no denominador, temos uma aparição de $2k$ no produto escrito no numerador. Basta efetuarmos os cancelamentos obtendo:

$$(n+1)(n+2)\cdots(2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1).$$

Exemplo 13. *(Olimpíada de Leningrado 1991) Cada um dos naturais a, b, c e d é divisível por $ab-cd$, que também é um número natural. Prove que $ab-cd=1$.*

Se chamarmos $p = ab-cd$, teremos $a = px$, $b = py$, $c = pz$ e $d = pt$ onde x, y, z e t são inteiros. Assim, $p = p^2(xy-zt)$. Consequentemente $1 = p(xy-zt)$ e concluímos que $p = 1$, pois p é natural.

Exemplo 14. *A soma digital $D(n)$ de um inteiro positivo n é definida recursivamente como segue:*

$$D(n) = \begin{cases} n & \text{se } 1 \le n \le 9, \\ D(a_0 + a_1 + \ldots + a_m) & \text{se } n > 9, \end{cases}$$

onde a_0, a_1, ..., a_m são todos os dígitos da expressão decimal de n na base 10, i.e.,

$$n = a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$$

Por exemplo, $D(989) = D(26) = D(8) = 8$. Prove que: $D((1234)n) = D(n)$, para $n = 1, 2, 3 \ldots$

Como $10^n - 1^n = (10-1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 1)$, podemos concluir que 10^n sempre deixa resto 1 na divisão por 9. Assim, $n = a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$, deixa o mesmo resto que $a_m + a_{m-1} + \ldots + a_0$ na divisão por 9. Desse modo, $D(n)$ nada mais é do que o resto na divisão por 9 do número n. Como 1234 deixa resto 1 por 9, o número $(1234)n$ deixa o mesmo resto que $1 \cdot n$ por 9, ou seja, $D((1234)n) = D(n)$.

Observação 15. *O exemplo anterior contém o critério de divisibilidade por 9, i.e., n deixa o mesmo resto que $D(n)$ na divisão por 9. O critério de divisibilidade por 3 é análogo pois $10n$ também sempre deixa resto 1 por 3.*

Exemplo 16. *Encontre todos os pares de inteiros positivos a e b tais que $79 = ab + 2a + 3b$.*

Fatoremos a expressão anterior. Somando 6 aos dois lados da equação, obtemos:

$$\begin{aligned} 85 &= 6 + ab + 2a + 3b \\ &= (3+a)(2+b) \end{aligned}$$

Assim, $(3+a)$ e $(2+b)$ são divisores positivos de 85 maiores que 1. Os únicos divisores positivos de 85 são 1, 5, 17, 85. Logo, os possíveis pares de valores para $(3+a, 2+b)$ são $(5,\ 17)$ ou $(17,\ 5)$ que produzem as soluções $(a, b) = (2,\ 15)$ e $(14,\ 3)$.

Problema 17. *(Olimpíada Russa) Prove que se $\dfrac{2^n-2}{n}$ é um inteiro, então $\dfrac{2^{2^n-1}-2}{2^n-1}$ também é um inteiro.*

Se $k = \dfrac{2^n-2}{n}$, então

$$\begin{aligned} \frac{2^{2^n-1}-2}{2^n-1} &= \frac{2(2^{2^n-2}-1)}{2^n-1} \\ &= 2\left(\frac{2^{nk}-1}{2^n-1}\right) \\ &= 2\left(\frac{(2^n-1)(2^{n(k-1)} + 2^{n(k-2)} + \ldots + 2^n + 1)}{2^n-1}\right) \\ &= 2(2^{n(k-1)} + 2^{n(k-2)} + \ldots + 2^n + 1) \quad , \end{aligned}$$

Os divisores de 1997^2 são $\{\pm 1, \pm 1997, \pm 1997^2\}$. Resolvendo os sistemas correspondentes à essas possibilidades, temos: $(x, y) = (1999, 1997^2 + 1996)$, $(1997, -1997^2 + 1996)$, $(3995, 3993)$, $(1, -1)$, $(1997^2 + 1998, 1997)$, $(-1997^2 + 1998, 1995)$.

1.3 Referências

Referências

[1] F. E. Brochero Martinez, C. G. Moreira, N. C. Saldanha, E. Tengan - Teoria dos Números um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro, Projeto Euclides, IMPA, 2010.

[2] E. Carneiro, O. Campos and F. Paiva, Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 (Níveis Júnior e Senior), Ed. Realce, 2005.

[3] S. B. Feitosa, B. Holanda, Y. Lima and C. T. Magalhães, Treinamento Cone Sul 2008. Fortaleza, Ed. Realce, 2010.

[4] D. Fomin, A. Kirichenko, Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991, MathPro Press, Westford, MA, 1994.

[5] D. Fomin, S. Genkin and I. Itenberg, Mathematical Circles, Mathematical Words, Vol. 7, American Mathematical Society, Boston, MA, 1966.

[6] I. Niven, H. S. Zuckerman, and H. L. Montgomery, An Introduction to the Theory of Numbers.

b) Mostre que se n é ímpar vale:

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots + x^2y^{n-3} - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Problema 26. *Prove que, o número $1^{99} + 2^{99} + 3^{99} + 4^{99} + 5^{99}$ é múltiplo de 5.*

Problema 27. *Mostre que o número $1^n + 8^n - 3^n - 6^n$ é múltiplo de 10 para todo natural n.*

Problema 28. *Encontre o resto da divisão $37^{10} - 1$ por 11.*

Problema 29. *Prove que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ é divisível por 7.*

Problema 30. *Encontre o último dígito do número 1989^{1989}.*

Problema 31. *Mostre que se n divide a então $2^n - 1$ divide $2^a - 1$.*

Problema 32. *(Cone Sul 1996) Provar que o número*

$$\frac{1995 \cdot 1997^{1996} - 1996 \cdot 1997^{1995} + 1}{1996^2}$$

é um inteiro.

Problema 33. *Mostre que para n ímpar, n divide $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$*

Problema 34. *Existe um natural n tal que $n^n + (n+1)^n$ é divisível por 2011?*

Problema 35. *Quantos números inteiros positivos n existem tais que $n + 3$ divide $n^2 + 7$?*

Problema 36. *Encontre o número de inteiros n tais que*

1. $1000 < n < 8000$.
2. $n^{n+1} + (n+1)^n$ é divisível por 3.

Problema 37. *Sejam m e n naturais tais que $mn+1$ é múltiplo de 24, mostre que $m+n$ também é múltiplo de 24.*

Problema 38. *(Irlanda 1997) Encontre todos os pares de inteiros (x,y) tais que $1+1996x+1998y=xy$.*

1.2 Dicas e Soluções

18. Os números são $0,\ 8,\ 16,\ 24,\ \ldots,\ 8\cdot 7$.

19. Escreva $n=17q+q^2$ e note que $0\le q^2<17$. Assim, $q=0,\,1,\,2,\,3,\,4$.

20. Use a diferença de quadrados sucessivas vezes para obter $(a-b)$ como quociente.

21. O número do problema é igual a $\dfrac{7(10^{1001}-1)}{9}$. Além disso, $\dfrac{10^{999}+1}{10^3+1}$ é inteiro e $\dfrac{10^{1001}-1}{10^3+1}=100\cdot\dfrac{10^{999}+1}{10^3+1}-\dfrac{100}{10^3+1}$

22. Os números que satisfazem essa propriedade são os números da forma $65k+59$.

24. Basta mostrar que n^5-5n^3+4n é múltiplo de 3, 8 e 5. Na divisão por 5, temos quatro restos possíveis: 0, 1, 2, 3, 4. Assim, o número n^5-5n^3+4n possui o mesmo resto na divisão por 5 que um dos cinco números: $0^5-5\cdot 0^3+40$, $1^5-5\cdot 1^3+4$, $2^5-5\cdot 2^3+8$, $3^5-5\cdot 3^3+12$, $4^5-5\cdot 4^3+16$. Como todos esses números são múltiplos de 5, segue que n^5-5n^3+4n é múltiplo de 5 para todo n inteiro. O procedimento com 3 e 8 é semelhante.

25. Para o item a), troque z por $\dfrac{x}{y}$. Para o item b), substitua y por $-y$ no item anterior.

26. Pelo problema anterior, como 99 é ímpar temos: $1^{99}+4^{99}=(1+4)(1^{98}+1^{97}\cdot 4+\ldots+1\cdot 4^{97}+4^{98})$. Daí, segue que $1^{99}+4^{99}$ é

múltiplo de 5. Analogamente podemos mostrar que $2^{99}+3^{99}$ é múltiplo de 5.

27. O número em questão é mútiplo de 2 pois é a soma de dois ímpares e dois pares. Para ver que também é múltiplo de 5, basta notar que 5 divide 1^n-6^n e 8^n-3^n. Isso pode ser facilmente mostrado usando a fatoração do exercício 25.

31. Se $a=nk$, temos $(2^n-1)(2^{n(k-1)}+2^{n(k-2)}+\ldots+2^n+1)=2^{nk}-1$.

32. Veja que $1995\cdot 1997^{1996}-1996\cdot 1997^{1995}+1=1995\cdot(1997^{1996}-1)-1996\cdot(1997^{1995}-1)$. Pela fatoração de x^n-y^n,

$$\frac{1996\cdot(1997^{1995}-1)}{1996^2}=(1997^{1994}+1997^{1993}+\ldots+1)\quad,$$

é inteiro. Além disso, pela mesma fatoração,

$$\frac{1995\cdot(1997^{1996}-1)}{1996^2}=1995\cdot\left(\frac{1997^{1995}-1}{1996}+\frac{1997^{1994}-1}{1996}+\ldots+\frac{1997-1}{1996}+\frac{1996}{1996}\right)\quad,$$

é uma soma de números inteiros.

33. Como n é impar,

$$(n-i)^n+i^n=((n-i)+i)((n-i)^{n-1}-(n-i)^{n-2}i+\ldots-(n-i)i^{n-2}+i^{n-1}).$$

34. Faça $n=1005$ e use a fatoração de x^n+y^n.

37. Fatore a expressão como:

$$(x-1998)(y-1996)=xy-1998y-1996x+1998\cdot 1996=1997^2.$$