Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Teoria dos Números - Nível 2

Prof. Samuel Feitosa

Aula 2

Divisibilidade II

Definição 1. *Dados dois inteiros a e b, com $a \neq 0$, dizemos que a divide b ou que a é um divisor de b ou ainda que b é um múltiplo de a e escrevemos $a \mid b$ se o r obtido pelo algoritmo de divisão aplicado à a e b é 0, ou seja, se $b = aq$ para algum inteiro q.*

Lema 2. *Sejam a, b, c, d inteiros. Temos*

i) ("d divide") Se $d \mid a$ e $d \mid b$, então $d \mid ax + by$ para quaisquer x e y inteiros.

ii) ("Limitação") Se $d \mid a$, então $a = 0$ ou $|d| \leq |a|$.

iii) (Transitividade) Se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$.

Em particular, segue da propriedade i) que $d \mid a + b$ e $d \mid a - b$.

Exemplo 3. *(Olimpíada de Maio 2006) Encontre todos os naturais a e b tais que $a|b + 1$ e $b|a + 1$.*

Pela propriedade da Limitação, temos $a \leq b + 1$ e $b \leq a + 1$. Daí, $a - 1 \leq b \leq a + 1$. Vejamos os casos:

(i) $a = b$. Como $a|b + 1$ e $a \mid b$(pois $b = a$) temos que $a \mid [(b + 1) - b] = 1$. Assim, $a = 1$ Nesse caso, só temos a solução $(a, b) = (1, 1)$

(ii) $a = b + 1$. Como $b|a + 1$ e $b|a - 1$(pois $b = a - 1$) temos que $b|[(a + 1) - (a - 1)] = 2$. Assim, $b = 1$ ou $b = 2$ e nesse caso, só temos as soluções $(3, 2)$ e $(2, 1)$.

(iii) $a = b - 1$. Esse caso é análogo ao anterior e as soluções para (a, b) são $(1, 2)$ e $(2, 3)$.

Exemplo 4. *(Critério de Divisibilidade por 7) Existem alguns métodos práticos para decidirmos se um número é múltiplo de outro. Certamente o leitor já deve ter se deparado com algum critério de divisibilidade. Existe um critério por 7 bastante popular: Para saber se um inteiro é multiplo de 7, basta apagar seu último dígito, multiplicá-lo por 2 e o subtrair do número que restou. Se o resultado é múltiplo de 7, então o número original também é múltiplo de 7.*

Podemos aplicar esse algoritmo sucessivas vezes até que o resultado obtido seja facilmente verificável como um múltiplo de 7. Por exemplo, para o número 561421 podemos escrever:

$$\begin{aligned} 56142 - 2 &= 56140 \\ 5614 - 0 &= 5614 \\ 561 - 8 &= 553 \\ 55 - 6 &= 49 \end{aligned}$$

Como 49 é múltiplo de 7, nosso número original também é. Por que esse processo funciona? Se o nosso número original está escrito na forma $10a + b$, então o número obtido após a operação descrita é $a - 2b$. Basta mostrarmos que se $7 \mid a - 2b$, então $7 \mid 10a + b$. Se $7 \mid a - 2b$, pela propriedade (i) do lema, concluímos que $7 \mid 10a - 20b$. Como $7 \mid 21b$, também temos que $7 \mid [(10a - 20b) + 21b] = 10a + b$.

Exemplo 5. *Mostre que se* $7 \mid 3a + 2b$ *então* $7 \mid 4a - 2b$.

Veja que $7 \mid 7a$ e $7 \mid 3a + 2b$, então $7 \mid [7a - (3a + 2b)] = 4a - 2b$. Na prática, o que fizemos foi multiplicar o número $3a + 2b$ por algum inteiro para posteriormente subtraímos um múltiplo de 7 conveniente e obtermos o número $4a - 2b$. Existem outras formas de fazermos isso. Observe os números $3 \cdot 0, 3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, 3 \cdot 4, 3 \cdot 5, 3 \cdot 6$. O número $3 \cdot 6$ deixa o mesmo resto que 4 por 7, pois $3 \cdot 6 = 7 \cdot 2 + 4$. Como $7|3a + 2b$ podemos concluir que $7|(18a + 12b)$ e consequentemente $7 \mid [18a + 12b - 14a)] = 4a + 12b$. Mas $7 \mid 14b$, então $7 \mid [4a + 12b - 14b] = 4a - 2b$.

Para o proximo exemplo, o leitor precisará lembrar dos critérios de divisibilidade por 9 e 3 vistos na aula passada.

Exemplo 6. *Usando os dígitos* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, *construímos vários números de sete dígitos distintos. Existem dois deles, distintos, tais que um divide o outro?*

Não. Suponha, por absurdo, que $m < n$ sejam dois desses números, com $m \mid n$. Claramente $m \mid n - m$ e $9 \mid n - m$, pois n e m possuem a mesma soma dos dígitos e consequentemente possuem o mesmo resto na divisão por 9. Por outro lado, sabemos a soma dos dígitos de m: $1 + 2 + \cdots + 7 = 3 \cdot 9 + 1$. Daí, m não possui fator 9 e podemos garantir que $9m \mid n - m$. Mas então $9m \leq n - m \Rightarrow 10m \leq n \Rightarrow n$ tem pelo menos oito dígitos, uma contradição.

Exemplo 7. *(Leningrado 1989) Seja* A *um número natural maior que 1, e seja* B *um número natural que é um divisor de* $A^2 + 1$. *Prove que se* $B - A > 0$, *então* $B - A > \sqrt{A}$.

Seja $B - A = q$. Assim, $A + q \mid A^2 + 1$. Como $(A - q)(A + q) = A^2 - q^2$ é divisível por $A + q$, podemos concluir que $A + q \mid [(A^2 + 1) - (A^2 - q^2)] = q^2 + 1$. Pela propriedade de limitação, $A + q \leq q^2 + 1$. Nessa desigualdade, não podemos ter $q = 1$ pois $A > 1$. Usando então que $q > 1$, temos $A \leq q^2 - q + 1 < q^2$, ou seja, $\sqrt{A} < q$.

Problema 8. *(AIME 1986) Qual é o maior inteiro* n *para o qual* $n^3 + 100$ *é divisível por* $n + 10$?

Para achar explicitamente o quociente de n^3+100 por $n+10$ podemos fazer uso de alguma fatoração. Utilizaremos a soma dos cubos $n^3+10^3=(n+10)(n^2-10n+100)$. Como,

$$n^3+100=(n+10)(n^2-10n+100)-900,$$

podemos concluir que o número 900 deve ser múltiplo de $n+10$. O maior inteiro n para o qual $n+10$ divide 900 é 890. Veja que se $n=890$, o quociente da divisão de n^3+100 por $n+10$ é $n^2-10n+100-1=890^2-10\cdot 890+99$.

Exemplo 9. *(Extraído de [1]) Encontre todos os inteiros positivos n tais que $2n^2+1 \mid n^3+9n-17$.*

Utilizando o "$2n^2+1$ divide" para reduzir o grau de $n^3+9n-17$, temos que

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2n^2+1 \mid n^3+9n-17 \\ 2n^2+1 \mid 2n^2+1 \end{cases} \\ \Longrightarrow\ & 2n^2+1 \mid (n^3+9n-17)\cdot 2+(2n^2+1)\cdot(-n) \\ \Longleftrightarrow\ & 2n^2+1 \mid 17n-34 \end{aligned}$$

Como o grau de $17n-34$ é menor do que o de $2n^2+1$, podemos utilizar a "limitação" para obter uma lista finita de candidatos a n. Temos $17n-34=0 \iff n=2$ ou $|2n^2+1| \leq |17n-34| \iff n=1,4$ ou 5. Destes candidatos, apenas $n=2$ e $n=5$ são soluções.

Exemplo 10. *(Leningrado 1990) Sejam a e b números naturais tais que b^2+ba+1 divide a^2+ab+1. Prove que $a=b$.*

Pela propriedade de limitação, $b^2+ba+1 \leq a^2+ab+1$ e daí $b \leq a$. Além disso, $b^2+ab+1 > a-b$. A igualdade $b(a^2+ab+1)-a(b^2+ba+1)=b-a$ implica que $a-b$ é divisível por b^2+ba+1. Se $a-b \neq 0$, então $b^2+ab+1 \leq a-b$. Mas isso é um absurdo, logo $a-b=0$.

Problemas Propostos

Problema 11. *Mostre que se $3 \mid a+7b$ então $3 \mid a+b$.*

Problema 12. *Mostre que se $7 \mid a+3b$ então $\mid 13a+11b$*

Problema 13. *Mostre que se $19 \mid 3x+7y$ então $19 \mid 43x+75y$*

Problema 14. *Mostre que se $17 \mid 3a+2b$ então $17 \mid 10a+b$*

Problema 15. *Encontre todos os inteiros positivos n tais que $n+2009$ divide n^2+2009 e $n+2010$ divide n^2+2010.*

Problema 16. *Seja $n>1$ e k um inteiro positivo qualquer. Prove que $(n-1)^2|(n^k-1)$ se, e somente se , $(n-1)|k$.*

Problema 17. *(OBM 2005) Prove que a soma $1^k + 2^k + \ldots + n^k$, onde n é um inteiro e k é ímpar, é divisível por $1 + 2 + \ldots + n$.*

Problema 18. *O número de seis dígitos $X = \overline{abcdef}$ satisfaz a propriedade de que $\overline{abc} - \overline{def}$ é divisível por 7. Prove que X também é divisível por 7.*

Problema 19. *(Bielorússia 1996) Inteiros m e n, satisfazem a igualdade*

$$(m-n)^2 = \frac{4mn}{m+n-1}.$$

a) Prove que $m + n$ é um quadrado perfeito.

b) Encontre todos os pares (m, n) satisfazendo a equação acima.

Problema 20. *(Olimpíada de Leningrado) Os números naturais a,b e c têm a propriedade que a^3 é divisível por b, b^3 é divisível por c e c^3 é divisível por a. Prove que $(a + b + c)^{13}$ é divisível por abc.*

Problema 21. *(OBM 2000) É possível encontrar duas potências de 2, distintas e com o mesmo número de algarismos, tais que uma possa ser obtida através de uma reordenação dos dígitos da outra? (Dica: Lembre-se do critério de divisibilidade por 9)*

Problema 22. *(IMO 1998) Determine todos os pares de inteiros positivos (x, y) tais que $xy^2 + y + 7$ divide $x^2y + x + y$.*

Dicas e Soluções

11. Como $3 \mid 6b$, segue que $3 \mid [(a + 7b) - 6b] = a + b$.

12. Como $7 \mid a + 3b$, segue que $7 \mid 13a + 39b = (13a + 11b) + 28b$. Mas $7 \mid 28b$, portanto $7 \mid [(13a + 11b) + 28b - 28b] = 13a + 11b$.

13. Como $19 \mid 3x + 7y$, segue que $19 \mid 27(3x + 7y) = (43x + 75y) + (38x + 114y)$. Mas $19 \mid 19(2x+6y)$, portanto $19 \mid [(43x+75y)+(38x+114y)-19(2x+6y)] = 43x+75y$.

14. Como $17 \mid 3a + 2b$, segue que $17 \mid 27a + 18b = (10a + b) + 17(a + b)$.

16. Veja que

$$\frac{n^k - 1}{(n-1)^2} = \left(\frac{n^{k-1} - 1}{n-1} + \frac{n^{k-2} - 1}{n-1} + \ldots + \frac{n-1}{n-1} + \frac{k}{n-1}\right).$$

Como os números $\frac{n^l-1}{n-1}$ sempre são inteiros, o número do lado esquerdo da equação será inteiro se, e somente se, o número $\frac{k}{n-1}$ for inteiro.

17. Comece dividindo o problema quando em dois casos: n é par ou n é ímpar. Sabemos que $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Para n ímpar, basta mostrar que o número em questão é divisível por n e $\frac{n+1}{2}$. O próximo passo é lembrar do problema 33 da aula 1. Pela fatoração de x^n+y^n, temos que $i^k+(n-i)^k$ é divisível por n. Faça outros tipos de pares para mostrar a divisibilidade por $\frac{n}{2}$. O caso quando n é par é análogo.

18. Veja que $X=10^3\cdot\overline{abc}+\overline{def}=1001\overline{abc}-(\overline{abc}-\overline{def})$. Como 1001 é multiplo de 7, concluímos que X é a soma de dois múltiplos de 7.

19. Somando $4mn$ em ambos os lados, obtemos:

$$\begin{aligned}(m+n)^2 &= \frac{4mn}{m+n-1}+4mn\\ &= \frac{4mn(m+n)}{m+n-1}\Rightarrow\\ (m+n) &= \frac{4mn}{m+n-1}\\ &= (m-n)^2.\end{aligned}$$

Assim, $m+n$ é o quadrado de um inteiro. Se $m-n=t$, então $m+n=t^2$ e $(m,n)=(\frac{t^2+t}{2},\frac{t^2-t}{2})$. É fácil verificar que para qualquer t inteiro esse par é solução do problema.

20. Analise a expansão pelo binômio de Newton.

21. Não. Suponha, por absurdo, que existam duas potências de 2, $2^m<2^n$, satisfazendo o enunciado. Como 2^n é um múltiplo de 2^m, podemos ter: $2^n=2\cdot 2^m, 4\cdot 2^m, 8\cdot 2^m,\ldots$. Além disso, como ambos possuem a mesma quantidade de dígitos, temos $1<\frac{2^n}{2^m}<10$. Assim, as únicas possibilidade são $2^n=2\cdot 2^m, 4\cdot 2^m, 8\cdot 2^m$. Pelo critério de divisibilidade por 9, como 2^m e 2^n possuem os mesmos dígitos, podemos concluir que 2^n-2^m é um múltiplo de 9. Entretanto, nenhuma das possibilidade anteriores satisfaz essa condição e chegamos em um absurdo.

22. Começaremos usando a ideia do exemplo 10. A igualdade $y(x^2y+x+y)-x(xy^2+y+7)=y^2-7x$ implica que y^2-7x é divisível por xy^2+y+7. Se $y^2-7x\geq 0$, como $y^2-7x<xy^2+y+7$, segue que $y^2-7x=0$. Assim, $(x,y)=(7t^2,7t)$ para algum $t\in\mathbb{N}$. É fácil checar que esses pares são realmente soluções. Se $y^2-7x<0$, então $7x-y^2>0$ é divisível por xy^2+y+7. Daí, $xy^2+y+7\leq 7x-y^2<7x$, que nos permite concluir que $y\leq 2$. Para $y=1$, temos $x+8\mid 7x-1$ e consequentemente $x+8\mid 7(x+8)-(7x-1)=57$. Então as únicas possibilidades são $x=11$ e $x=49$, cujos pares correspondentes são $(11,1),(49,1)$. Para $y=2$, temos $4x+9\mid 7x-4$ e consequentemente $7(4x+9)-4(7x-4)=79$ é divisível por $4x+9$. Nesse caso, não obtemos nenhuma solução nova. Todas as soluções para (x,y) são: $(7t^2,7t)(t\in\mathbb{N}),(11,1)$ e $(49,1)$.

Referências

[1] F. E. Brochero Martinez, C. G. Moreira, N. C. Saldanha, E. Tengan - Teoria dos Números um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro, Projeto Euclides, IMPA, 2010.

[2] E. Carneiro, O. Campos and F. Paiva, Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 (Níveis Júnior e Senior), Ed. Realce, 2005.

[3] S. B. Feitosa, B. Holanda, Y. Lima and C. T. Magalhães, Treinamento Cone Sul 2008. Fortaleza, Ed. Realce, 2010.

[4] D. Fomin, A. Kirichenko, Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991, MathPro Press, Westford, MA, 1994.

[5] D. Fomin, S. Genkin and I. Itenberg, Mathematical Circles, Mathematical Words, Vol. 7, American Mathematical Society, Boston, MA, 1966.

[6] I. Niven, H. S. Zuckerman, and H. L. Montgomery, An Introduction to the Theory of Numbers.