Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Teoria dos Números - Nível 2

Prof. Samuel Feitosa

Aula 7

Aula de Revisão e Aprofundamento

Observação 1. *É recomendável que o professor instigue seus alunos a pensarem nos problemas abaixo antes de resolvê-los na aula.*

Exemplo 2. *(ASHME 1990) Para quantos inteiros N entre 1 e 1990 a fração $\dfrac{N^2+7}{N+4}$ não é irredutível?*

Seja $d = (N+4, N^2+7)$. Um boa estratégia é procurar um múltiplo de $N+4$ próximo de N^2+7 pois assim conseguiremos estimar d. Usando a diferença de quadrados, $d \mid N^2-16$ e consequentemente $d \mid N^2+7-(N^2-16) = 23$. Como 23 é primo, a fração não será irredutível apenas quando $d = 23$. Para isso acontecer, basta que $23 \mid N+4$ pois $N^2+7 = N^2-16+23$. O maior múltiplo de 23 menor que 1990 é $1978 = 23 \cdot 86$ e $1990+4 < 23 \cdot 87$. Sendo assim, a quantidade de inteiros procurada é 86.

Exemplo 3. *Dados os primos p e q satisfazendo:*

$$q \mid p^2+1 \quad e \quad p \mid q^2-1.$$

Prove que o número $p+q+1$ é composto.

Como $p \mid q^2-1 = (q+1)(q-1)$, temos que $p \mid q+1$ ou $p \mid q-1$. No primeiro caso, $p+q+1$ é um múltiplo de p. No segundo caso, podemos escrever $q-1 = pk$ para algum natural k. Usando que $q \mid p^2+1$, concluímos que $q \mid p^2+1-(pk+1) = p(p-k)$. Como p e q não podem ser primos iguais, $q \mid p-k$. Temos três casos a considerar:

1. $p > k$. Então:

$$\begin{aligned} p-k &\geq kp+1, \\ (p+1)(1-k) &\geq 2 \end{aligned}$$

2. $p < k$. Então:

$$\begin{aligned} k - p &\geq kp + 1, \\ (k+1)(1-p) &\geq 2 \end{aligned}$$

3. $p = k$ e $q = p^2+1$. Como o único primo par é 2, segue que $p = 2$, $q = 5$ e $p+q+1 = 8$.

Os dois primeiros casos conduzem a um absurdo. Logo, ou $p + q + 1$ é múltiplo de p ou é igual à 8.

Exemplo 4. *(AIME 1985) Os números da sequência*

$$101, 104, 109, 116, \ldots$$

são da forma $a_n = 100 + n^2$, onde $n = 1, 2, 3, \ldots$ Para cada n, seja d_n o máximo divisor comum de a_n e a_{n+1}. Encontre o valor máximo de d_n quando n varia sobre todo o conjunto dos inteiros positivos.

Uma boa estratégia é buscar alguma fatoração que nos permita identificar fatores comuns entre os termos da sequência. Um termo genérico da sequência possui a forma $a_n = k + n^2$. Sendo assim, $a_{2k} = k(4k+1)$,$a_{2k+1} = (k+1)(4k+1)$ e consequentemente $mdc(a_{2k}, a_{2k+1}) = 4k+1$. Nosso próximo passo será mostrar que realmente esse é o valor máximo. Considere dois termos genéricos $a = a_n = k + n^2$, $b = a_{n+1} = k + (n+1)^2$ e seja $d = mdc(a, b)$. Usando que $d \mid b - a = 2n+1$, obtemos $d \mid (2n+1)(b-a) = 4n^2 - 1$. Como $d \mid 4a = 4n^2 + 4k$, segue que $d \mid 4n^2 + 4k - (4n^2 - 1) = 4k + 1$. Assim, $4k+1$ é realmente o maior valor possível entre os termos da sequência d_n.

Exemplo 5. *Prove que para qualquer inteiro $n > 1$, o número $n^5 + n^4 + 1$ não é um número primo.*

Considere a fatoração:

$$\begin{aligned} n^5 + n^4 + 1 &= n^5 + n^4 + n^3 - n^3 - n^2 - n + n^2 + n + 1 \\ &= n^3(n^2+n+1) - n(n^2+n+1) + (n^2+n+1) \\ &= (n^2+n+1)(n^3-n+1) \end{aligned}$$

Como $n > 1$, $n^3 - n + 1 > 1$ e obtemos assim o produto de dois inteiros maiores que 1.

Exemplo 6. *(Olimpíada Grega) Encontre todos os inteiros n para os quais $-5^4 + 5^5 + 5^n$ é um quadrado perfeito.*

Como $-5^4 + 5^5 = 2500$, queremos encontrar m e n tais que:

$$5^n = m^2 - 2500 = (m-50)(m+50).$$

Isto implica que $m + 50 = 5^j$ e $m - 50 = 5^i$, com $i < j$. Assim,

$$100 = 5^i(5^{j-i} - 1).$$

Usando a fatoração em primos de 100, encontramos que $i = 2$ e $j - i = 1$. Portanto, $m = 75$ e $n = 5$.

Exemplo 7. *(Irlanda) Sejam p um número primo, a e n e inteiros positivos. Prove que se*

$$2^p + 3^p = a^n,$$

então $n = 1$.

Se $p = 2$, claramente $a = 13$ e $n = 1$. Se $p > 2$, p é ímpar e $5 \mid 2^p + 3^p$. Consequentemente 5 divide a. Se fosse $n > 1$, $25 \mid a^n$ e teríamos:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \frac{a^n}{5} \\ &\equiv \frac{2^p + 3^p}{5} \\ &= 2^{p-1} - 2^{p-2} \cdot 3 + \ldots + 2 \cdot -3^{p-2} + 3^{p-1} \\ &\equiv 2^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + 2^{p-1} \\ &\equiv p2^{p-1} \pmod 5 \end{aligned}$$

A única possíbilidade é termos $p = 5$. Entretanto, $2^5 + 3^5$ não é uma potência perfeita não trivial. Logo, $n = 1$.

Exemplo 8. *Um inteiro $n > 1$ tem a seguinte propriedade: para todo divisor positivo d de n, $d + 1$ é um divisor de $n + 1$. Prove que n é primo.*

Seja p o menor fator primo de n e seja $d = \frac{n}{p}$. Então,

$$\frac{np + p}{n + p} = \frac{p(n+1)}{p(d+1)} = \frac{n+1}{d+1}$$

é um número inteiro. Como $n + p$ também divide $p(n + p)$, podemos concluir que $n + p \mid (np + p^2) - (np + p) = p^2 - p$. Em particular,

$$\begin{aligned} n + p &\leq p^2 - p \\ n &\leq p^2 - 2p \\ n &\leq p^2 - 2p + 1 = (p-1)^2 \\ n &< p^2 \\ d &< p. \end{aligned}$$

Em virtude da minimalidade de p, d não possui fatores primos e consequentemente $n = p$.

Exemplo 9. *(Olimpíada Russa) Mostre que qualquer natural pode ser escrito como a diferença de dois números naturais tendo o mesmo número de fatores primos.*

Se n é par, podemos escrevê-lo como $2n - n$ e é fácil verificar que $2n$ e n possuem o mesmo número de fatores primos. Seja d o menor primo ímpar que não divide n. Escreva $n = dn - (d-1)n$. O termo dn contém exatamente um primo a mais que n. Pela escolha de d, todos os outros fatores primos diferentes 2 do número $d - 1$ são divisores de n e assim $(d-1)n$ também contém extamente um primo a mais que n, a saber, o primo 2.

Exemplo 10. *Os números naturais a e b são tais que*

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$$

é um número inteiro. Mostre que o máximo divisor comun de a e b não é maior que $\sqrt{a+b}$.

Seja $d = mdc(a,b)$, com $a = md$ e $b = nd$. Então:

$$\frac{md+1}{nd} + \frac{nd+1}{md} = \frac{m^2d+m+n^2d+n}{mnd}$$

é um inteiro. Em particular, $d \mid m^2d+m+n^2d+n$ e consequentemente $d \mid m+n$. Daí,

$$\begin{aligned} d &\leq m+n \\ \sqrt{d} &\leq \sqrt{m+n} \\ d &\leq \sqrt{d(m+n)} \\ &= \sqrt{a+b} \end{aligned}$$

Exemplo 11. *Encontre todos os conjuntos $A \subseteq \mathbb{N}$ de pelo menos dois elementos tais que*

$$x, y \in A \implies \frac{x+y}{\operatorname{mdc}(x,y)} \in A.$$

Vamos dividir o problema em dois casos: Primeiro caso: Se $1 \notin A$.

Mostremos que nesse caso devemos ter $A = \{2, 3, \ldots\}$. Façamos isso seguindo as seguintes afirmações:

1. $2 \in A$.
   Para ver isso, basta tomar dois elementos iguais.

2. Existe elemento ímpar em A.

   Suponha, por absurdo, que não existe elemento ímpar em A. Seja $2k$ o menor elemento de par de A maior que 2. Logo,

   $$k+1 = \frac{2k+2}{mdc(2k,2)} \in A.$$

   Como $k+1 < 2k$, $k+1$ é ímpar. Absurdo! Note que todos os ímpares maiores que $k+1$ pertencem a A. Para tal, basta escolhermos 2 e $k+1$ para obtermos $k+3$ e aplicar isso sucessivamente.

3. $3 \in A$.

Tome $2l-1 > 2k+1$. Assim,

$$\begin{aligned}
(2l-1)(2k+1),(2k+1)\in A \quad &\Rightarrow \quad \frac{(2l-1)(2k+1)+(2k+1)}{2k+1}=2l\in A;\\
2l-1,2l+1\in A \quad &\Rightarrow \quad \frac{2l-1+2l+1}{mdc(2l-1,2l+1)}=4l\in A;\\
2l,4l\in A \quad &\Rightarrow \quad \frac{4l+2l}{mdc(4l,2l)}=3\in A
\end{aligned}$$

Isso mostra que todos os ímpares maiores ou iguais a 3 estão presentes. Para isso, basta tomar cada ímpar e o 2.

4. Todos os números pares estão em A.
   Para isso, tome $2k-1$ e $(2k-1)^2$:

$$\frac{(2k-1)^2+(2k-1)}{2k-1}=2k\in A,$$

para todo o $k\geq 2$.

Segundo caso: Se $1\in A$.

Nesse caso, afirmamos que $A=\mathbb{N}$. Veja que:

$$\begin{aligned}
1\in A \quad &\Rightarrow \quad \frac{1+1}{1}=2\in A\\
x\in A \quad &\Rightarrow \quad \frac{x+1}{mdc(1,x)}=x+1\in A
\end{aligned}$$

Sendo assim, repetindo esse processo, seguirá por indução que $A=\mathbb{N}$.

Exemplo 12. *(Olimpíada Matemática Argentina) Sejam $p_1,p_2,\ldots,p_n$ números primos. Bruno deve escolher $n+1$ inteiros positivos que utilizem apenas estes primos em sua decomposição. Bernardo deve escolher alguns desses números de modo que o produto deles seja um quadrado perfeito. Determine se é possível, para algum n, que Bruno escolha seus $n+1$ números de maneira que Bernardo não consiga cumprir seu objetivo.*

Vamos mostrar que Bernardo sempre consegue cumprir seu objetivo. Para decidirmos se um número natural é quadrado perfeito, basta analisarmos a paridade dos expoentes de seus fatores primos. Para cada número $p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_n^{m_n}$ escolhido por Bruno, associe a n-upla de zeros e uns, $(r_1,r_2,\ldots,r_n)$, onde cada r_i é o resto na divisão por 2 de m_i. A multiplicação de dois inteiros se traduz na soma módulo 2 de tais uplas, i.e., a n-upla associada ao produto $p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_n^{m_n}\cdot p_1^{l_1}p_2^{l_2}\ldots p_n^{l_n}$ é igual à $(r_1+q_1 \pmod 2, r_2+q_2 \pmod 2,\ldots,r_n+q_n \pmod 2)$ onde r_i e q_i são os restos na divisão por 2 de m_i e l_i, respectivamente. Nosso problema pergunta se é possivel Bernardo encontrar algumas uplas que somadas deem a upla $(0,0,0,\ldots,0)$. Como temos $n+1$ uplas, podemos formar $2^{n+1}-1>2^n$ somas de subconjuntos não vazios de uplas. Cada soma corresponde a uma nova upla, como existem apenas 2^n tipos de uplas distintas, alguma delas se repetirá dentre as somas (pelo princípio da casa dos pombos). Suponha que para dois conjuntos de uplas A e B tenhamos a mesma upla associada como soma, então a soma dos elementos de A e B que não pertencem à $A \cap B$ corresponde à upla $(0, 0, \ldots, 0)$.

Problemas Propostos

Problema 13. *Sejam $p > 2$ um primo ímpar e n um inteiro positivo. Prove que p divide*

$$1^{p^n} + 2^{p^n} + \ldots + (p-1)^{p^n}.$$

Problema 14. *(Olimpíada Romena) Sejam a, b, c, d inteiros não nulos com $a \neq c$ e tais que*

$$\frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + b^2}.$$

Prove que $a^2 + b^2 + c^2$ não pode ser um número primo.

Problema 15. *Encontre todos os n tais que $n!$ é um quadrado perfeito.*

Problema 16. *(Hungria) O produto de alguns primos é dez vezes maior que a sua soma. Quais são esses primos?(não necessariamnete distintos).*

Problema 17. *Qual o máximo divisor comum entre dois números de Fibonacci consecutivos?*
Observação: Os números de Fibonacci são os números da sequência definida por $F_1 = F_2 = 1$ e $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Problema 18. *Mostre que a soma de dois primos consecutivos nunca é o dobro de um primo.*

Problema 19. *(Israel) Se S_n é a soma dos n primeiros números primos, prove que há ao menos um quadrado perfeito entre S_n e S_{n+1}*

Problema 20. *(Olimpíada Balcânica) Prove que, para todo natural dado n, existe um natural $m > n$ tal que a representação decimal de 5^m é obtida da representação decimal de 5^n pelo acréscimo de algarismos à esquerda de 5^n.*

Problema 21. *(Inglaterra 1995)*

a) Encontre o primeiro inteiro positivo cujo quadrado termina em três quatros.

b) Encontre todos os inteiros positivos cujo quadrado termina em três quatros.

c) Mostre que nenhum quadrado perfeito termina em quatro quatros.

Exemplo 22. *(Olimpíada Indiana) Seja n um inteiro positivo tal que n é um divisor da soma*

$$1 + (1^{n-1} + 2^{n-1} + \ldots + (n-1)^{n-1}).$$

Prove que n não é divisível por qualquer quadrado maior que 1.

Problema 23. *Seja S um conjunto de primos tal que $a, b \in S$ (a e b não precisam ser distintos) implicam $ab + 4 \in S$. Mostre que S tem que ser vazio*

Dicas e Soluções

1. Em breve!