Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Teoria dos Números - Nível 2

Prof. Samuel Feitosa

Aula 10

Divisores

Suponha que $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ é a fatoração em primos do inteiro n. Todos os divisores de n são da forma $m = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, onde $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$. Cada um desses números, aparece exatamente uma vez no produto:

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{\alpha_2}) \dots (1 + p_n + p_n^2 + \dots + p_k^{\alpha_k}),$$

quando o mesmo é expandido usando a distributividade. Como existem $\alpha_i + 1$ termos em cada parênteses, O número de termos dessa expansão é:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1).$$

Além disso, sabemos que:

$$1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{\alpha_i} = \frac{p_i^{\alpha_i + 1} - 1}{p_i - 1}.$$

Sendo assim, podemos concluir que:

Teorema 1. *Se $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ é a fatoração em primos de n, então:*

a) O número de divisores de n, denotado por $d(n)$, é: $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$.

b) A soma dos divisores de n, denotada por $\sigma(n)$, é:

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{\alpha_2}) \dots (1 + p_n + p_n^2 + \dots + p_n^{\alpha_n})$$

ou, de forma mais sucinta,

$$\left(\frac{p_1^{\alpha_1 + 1} - 1}{p_1 - 1}\right)\left(\frac{p_2^{\alpha_2 + 1} - 1}{p_2 - 1}\right) \dots \left(\frac{p_n^{\alpha_n + 1} - 1}{p_n - 1}\right)$$

Observação 2. *(Pareamento de divisores) Se d é um divisor de n, então $\frac{n}{d}$ também é um divisor de n.*

Portanto, pelo menos um dentre $\{d, \frac{n}{d}\}$ é um divisor de n menor ou igual a $\sqrt{n}$.

Exemplo 3. *Determine o número de divisores positivos de 2008^8 que são menores que 2008^4.*

O número de divisores de $2008^8 = 2^{24} \cdot 251^8$ é 225. Como n é um quadrado perfeito e em virtude da observação anterior, 112 desses divisores são menores que $\sqrt{2008^8} = 2008^4$ e 112 são maiores.

Exemplo 4. *Encontre a soma dos inversos dos divisores postivos de 496.*

Sejam $d_1, d_2, \ldots, d_n$ os divisores de 496 e K a soma de seus inversos. Usando a observação anterior, o conjunto $\{\frac{496}{d_1} + \frac{496}{d_2} + \ldots + \frac{496}{d_n}\}$ coincide com o conjunto $\{d_n + d_{n-1} + \ldots + d_1\}$ e daí:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_n} &= K \Rightarrow \\
\frac{496}{d_1} + \frac{496}{d_2} + \ldots + \frac{496}{d_n} &= 496K \Rightarrow \\
d_n + d_{n-1} + \ldots + d_1 &= 496K \Rightarrow \\
\frac{2^5 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{31^2 - 1}{31 - 1} &= 496K \Rightarrow \\
\frac{960}{496} &= K.
\end{aligned}$$

Portanto, $k = \frac{60}{31}$.

Exemplo 5. *Um número natural n possui exatamente dois divisores e $n+1$ possui exatamente 3 divisores. Encontre o número de divisores de $n+2$.*

Se n possui exatamente dois divisores, então $n = p$ é um número primo. Se $n+1$ possui um número ímpar de divisores, então $n+1 = x^2$ é um quadrado perfeito, para algum x inteiro positivo. Logo, $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = p$. Como p é primo, a única possibilidade é $x - 1 = 1$ e consequentemente $n = 3$. O número de divisores de $n + 2 = 5$ é 2.

Exemplo 6. *Encontre todos os inteiros n que possuem exatamente $\sqrt{n}$ divisores positivos.*

Para $\sqrt{n}$ ser inteiro, n deve ser um quadrado perfeito e assim podemos escrever:

$$n = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \ldots p_k^{2\alpha_k}.$$

A condição do problema é equivalente à:

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} = (2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) \ldots (2\alpha_k + 1).$$

Analisando o lado direito, podemos concluir que cada p_i é ímpar e consequentemente

$$p_i^{\alpha_i} \geq 3^{\alpha_i} \geq 2\alpha_i + 1.$$

Como devemos ter a igualdade, $p_1 = 3$ e $3^{\alpha_1} = 2\alpha_1 + 1$. Se $\alpha_1 > 1$, vale a desigualdade estrita(veja o problema 13). Logo, a única solução é $n = 9$.

Exemplo 7. *(Suiça 2011) Encontre todos os inteiros positivos n para o qual n^3 é o produto de todos os divores de n*

Claramente $n = 1$ é solução. Suponha que $n > 1$ e sejam $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$ os divisores de n. Pela observação 2, podemos agrupar os divisores em pares cujo produto é n, assim:

$$\begin{aligned} n^6 &= (d_1 d_2 \ldots d_k)(d_1 d_2 \ldots d_k) \\ &= (d_1 d_k)(d_2 d_{k-1}) \ldots (d_k d_1) \\ &= n^{d(n)} \end{aligned}$$

Consequentemente, $6 = d(n)$ e $n = p^5$ ou $n = pq^2$ com p e q primos distintos. Fica a cargo do leitor verificar que essas soluções satisfazem o enunciado.

Exemplo 8. *(Irlanda 1995) Para cada inteiro positivo n tal que $n = p_1p_2p_3p_4$, onde p_1, p_2, p_3 e p_4 são primos distintos, sejam:*

$$d_1 = 1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_{16} = n,$$

os 16 inteiros positivos que dividem n. Prove que se $n < 1995$, então $d_9 - d_8 \neq 22$.

Suponha que $n < 1995$ e $d_9 - d_8 = 22$. Note inicialmente que d_8 não pode ser par pois n seria divisível por 4 contradizendo o fato de que n possui quatro fatores primos distintos. Consequentemente d_8, d_9 e n são ímpares. Também temos a fatoração: $35 \cdot 57 = 1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$. Então, usando a observação 2, $d_8 d_9 = n$. Se $d_8 \geq 35$ teríamos $d_9 < d_8$ para manter $n < 1995$ e isso seria um absurdo. Logo, $d_8 < 35$. Os divisores $d_1, d_2, \ldots, d_8$ são produtos de primos ímpares distintos. Como $3 \cdot 5 \cdot 7 > 35$, nenhum dentre $d_1, d_2, \ldots, d_8$ é grande o suficiente para possuir três fatores primos distintos. Como n possui somente quatro fatores primos distintos, quatro desses d_i's devem ser o produto de dois primos ímpares. Os menores números que são o produto de dois primos são:

$$15, 21, 33, 35, \ldots$$

e consequentemente devemos ter $d_8 \geq 35$, uma contradição.

Exemplo 9. *Prove que não existe inteiro positivo n tal que $\sigma(n) = n^k$ para algum inteiro positivo k.*

Afirmamos que $n = 1$ é a única solução. Suponha que $n > 1$ seja solução e sejam

$$d_1 = 1 < d_2 < \ldots < d_k = n,$$

os divisores de n. Então

$$\sigma(n) = d_1 + d_2 + \ldots + d_k < 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} < n^2.$$

Além disso,

$$n < n + 1 \leq d_1 + d_2 + \ldots + d_k = \sigma(n).$$

Daí,

$$n < n^k < n^2,$$

e obtemos um absurdo.

Exemplo 10. *(Olimpíada de Leningrado 1989) Duas pessoas jogam um jogo. O número* 2 *está inicialmente escrito no quadro. Cada jogador, na sua vez, muda o número atual N no quadro negro pelo número $N + d$, onde d é um divisor de N com $d < N$. O jogador que escrever um número maior que* 19891988 *perde o jogo. Qual deles irá vencer se ambos os jogadores são perfeitos.*

Nesse problema, basta determinarmos apenas aquele que possui a estratégia vencedora. Note que o início do jogo é estritamente determinado: $2 \to 3 \to 4$. Suponha que o segundo jogador vence o jogo. Após o movimento $4 \to 5$ do primeiro jogador, o segundo só pode jogar $5 \to 6$. Isto significa que 6 é uma posição vencedora. Entretanto, o primeiro jogador pode obter a posição 6 jogando $4 \to 6$, uma contradição. Logo, o primeiro jogador possui a estratégia vencendora.

Exemplo 11. *(Olimpíada de Leningrado) Duas pilhas de palitos sobre uma mesa contém* 100 *e* 252 *palitos, respectivamente. Dois jogadores jogam o seguinte jogo: Cada jogador em sua vez pode remover alguns palitos de uma das pilhas de modo que o número de palitos retirados seja um divisor do número de palitos da outra pilha. O jogador que fizer o último movimento vence. Qual dos dois jogadores irá vencer se ambos são perfeitos?*

O primeiro jogador perde. Em cada momento do jogo, podemos registrar o expoente da maior potência de 2 que divide os números de palitos em cada pilha. Por exemplo, no início os números são $(2, 2)$. A estratégia do segundo jogador é manter esse números sempre iguais. Suponha que, em um dado momento, as pilhas possuem $2^m \cdot a$ e $2^m \cdot b$ palitos com a e b ímpares. O par registrado será (m, m). Vejamos o que acontece quando retiramos um divisor d da segunda pilha do número de palitos da primeira. Se 2^m é a maior potência de 2 que divide d, então 2^{m+1} dividirá o número de palitos da primeira pilha e consequentemente o par registrado terá números diferentes. Se 2^k, com $k < m$, é a maior potência de 2 que divide d, então 2^k será a maior potência de 2 que divide o número de palitos da primeira pilha e novamente o par registrado terá números diferentes. Assim, sempre que um jogador receber um par registrado com números iguais, ele irá passar um par registrado com números diferentes para o outro jogador. Suponha agora que, na sua vez, as pilhas possuem $2^m \cdot a$ e $2^n \cdot b$ palitos, com $m < n$ e $a \equiv b \equiv 1 \pmod 2$. Basta o jogador retirar 2^m palitos da segunda pilha para passar um par registrado com números iguais a (m, m). Como inicialmente as pilhas possuem números registrados iguais, o segundo jogador pode sempre manter essa propriedade e consequentemente o único que pode passar uma pilha com zero palitos pela primeira vez é o primeiro jogador.

Problemas Propostos

Problema 12. *Mostre que se k é um inteiro positivo então $3^k \geq 2k+1$ e vale a desigualdade estrita quando $k > 1$.*

Problema 13. *(Rússia 2001) Encontre todos os n tais que quaisquer divisores primos distintos a e b de n o número $a+b-1$ também é um divisor de n*

Problema 14. *O número $3^{32}-1$ tem exatamente dois divisores que são maiores que 75 e menores que 85. Qual o produto desses dois divisores?*

Problema 15. *(Irã 2012) Sejam a e b inteiros positivos de modo que o número de divisores positivos de a,b, ab é 3,4 e 8, respectivamente. Encontre o número de divisores positivos de b^2.*

Problema 16. *(Olimpíada de São Petesburgo) Enconte todos os inteiros positivos n tais que $3^{n-1}+5^{n-1}$ divide 3^n+5^n.*

Problema 17. *Sejam $1 = d_1 < d_2 < \ldots. < d_k = n$ o conjunto de todos os divisores de um inteiro positivo n. Determine todos os n tais que:*

$$d_6^2 + d_7^2 - 1 = n.$$

Problema 18. *Um divisor $d > 0$ de um inteiro positivo n é dito ser um divisor unitário se $mdc(d, \frac{n}{d}) = 1$. Suponha que n é um inteiro positivo tal que a soma de seus divisores unitários é $2n$. Prove que n não pode ser ímpar.*

Referências

[1] F. E. Brochero Martinez, C. G. Moreira, N. C. Saldanha, E. Tengan - Teoria dos Números ? um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro, Projeto Euclides, IMPA, 2010.

[2] E. Carneiro, O. Campos and F. Paiva, Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 (Níveis Júnior e Senior), Ed. Realce, 2005.

[3] S. B. Feitosa, B. Holanda, Y. Lima and C. T. Magalhães, Treinamento Cone Sul 2008. Fortaleza, Ed. Realce, 2010.

[4] D. Fomin, A. Kirichenko, Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991, MathPro Press, Westford, MA, 1994.

[5] D. Fomin, S. Genkin and I. Itenberg, Mathematical Circles, Mathematical Words, Vol. 7, American Mathematical Society, Boston, MA, 1966.

[6] I. Niven, H. S. Zuckerman, and H. L. Montgomery, An Introduction to the Theory of Numbers.