Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Teoria dos Números - Nível 2

Prof. Samuel Feitosa

Aula 14

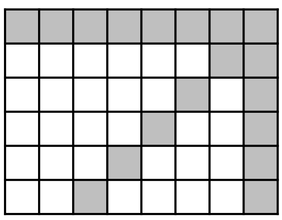
A Função Parte Inteira - I

1 O jogo de Wythoff

O objetivo da aula de hoje é resolver o seguinte problema:

Exemplo 1. *Dois jogadores jogam alternadamente removendo pedras de duas pilhas sobre uma mesa. Na sua vez, cada jogador pode remover qualquer quantidade de pedras de uma pilha ou igual número de pedras de ambas as pilhas. O ganhador é aquele que retirar a última pedra. Determine todas posições perdedoras.*

Uma boa estratégia para identificar as posições perdedoras nesse jogo, é associar o movimento dos jogadores ao movimento de uma peça em um tabuleiro. Suponha que inicialmente as duas pilhas possuem 5 e 7 pedras. Colocaremos uma peça no canto direito superior em um tabuleiro 8×6. O movimento de retirar x pedras da coluna de 5 será traduzido como um deslocamento vertical de x casas para baixo, enquanto que a mesma retirada da outra coluna será traduzido como um movimento horizontal para a esquerda de mesmo deslocamento. Um movimento de retirada de x pedras de ambas as colunas será traduzido como um deslocamento diagonal da direita para a esquerda dessa mesma quantidade de casas. O jogo terminará quando a peça chegar na casa do canto extremo esquerdo simbolizando que ambas as colunas estão com 0 pedras.



A posição $(0,0)$ é perdedora porque uma vez que um jogador a receba, ele terá perdido o jogo. Qualquer posição do tipo $(x,0),(0,x)$ ou (x,x), com $x > 0$, será uma posição vencedora. Marquemos essas posições no tabuleiro:

+					+		
+				+			
+			+				
+		+					
+	+						
−	+	+	+	+	+	+	+

As próximas posições perdedoras que encontramos são $(1,2)$,$(2,1)$. A partir dessa nova posição, podemos preencher o tabuleiro com as novas posições vencedoras.

+	+	+		+	+	+	
+	+	+	+	+	+		
+	+	+	+	+			
+	−	+	+	+	+	+	+
+	+	−	+	+	+	+	+
−	+	+	+	+	+	+	+

As próximas posições perdedoras que encontramos são $(3,5)$ e $(5,3)$. Como existe simetria entre as duas pilhas, basta procurarmos as posições perdedoras (x,y) com $x<y$. Repetindo o processo anterior, podemos listar as primeiras posições perdedoras ordenadas (x_n,y_n) com $x_n<y_n$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_n	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19
y_n	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31

As próximas seções nos ajudarão a estabelecer alguma padrão entre os valores de (x_n,y_n) em função de n.

2 Definição e Propriedades

Definição 2. *A parte inteira de um número real x é o maior inteiro $\lfloor x\rfloor$ que não é maior que x. Definimos a parte fracionária $\{x\}$ de x por $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$. (exemplos: $\lfloor 3\rfloor=3$, $\lfloor 3,5\rfloor=3$ e $\lfloor -4,7\rfloor=-5$)*

Teorema 3. *Sejam x e y números reais. Então:*

1. $\lfloor x\rfloor\leq x<\lfloor x\rfloor+1$ *e* $0\leq\{x\}<1$.
2. $\lfloor x+m\rfloor=\lfloor x\rfloor+m$ *se m é um inteiro.*
3. $\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\leq\lfloor x+y\rfloor\leq\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$.
4. $\left\lfloor\frac{\lfloor x\rfloor}{m}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor$ *se m é um inteiro positivo.*
5. *Se n e a são inteiros positivos,* $\left\lfloor\dfrac{n}{a}\right\rfloor$ *é o número de inteiros entre $1,2,...,n$ que são divisíveis por a.*

Demonstração. Os primeiros dois itens decorrem facilmente da definição e serão deixados a cargo do leitor.
Para provar (3), veja que:

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor &\leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor \\ &= \lfloor \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \{x\} + \{y\} \rfloor \\ &= \lfloor x + y \rfloor. \end{aligned}$$

Como $\{x\} + \{y\} < 2$, $\lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor \leq 1$ e daí:

$$\begin{aligned} \lfloor x + y \rfloor &= \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor \\ &\leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1. \end{aligned}$$

Para provar (4), seja $\lfloor x \rfloor = qm + r$ com $0 \leq r < m - 1$, então:

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{m} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r}{m} \right\rfloor = q.$$

Como $0 \leq \{x\} < 1$,

$$q = q + \left\lfloor \frac{r + \{x\}}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{qm + r + \{x\}}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor.$$

Finalmente, para provar (5), sejam $a, 2a, ..., ja$ todos os inteiros positivos $\leq n$ que são divisíveis por a. Então,

$$\begin{aligned} ja \leq n < (j+1)a &\Rightarrow j \leq \frac{n}{a} < j + 1 \\ &\Rightarrow j = \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Observação 4. *Em alguns dos problemas desta seção, será usada a notação de somatório. Recomenda-se que o professor escrevar por extenso os primeiros somatórios até que os alunos se sintam confortáveis com a manipulação dos índices.*

Teorema 5 (*Fórmula de Polignac*)**.** *Seja p um primo. Então o maior expoente p na fatoração em primos de $n!$ é:*

$$t_p(n) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor.$$

Demonstração. O que significa $\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$? Ele conta o número de inteiros positivos menores ou iguais a n divisíveis por p^i. Cada múltiplo de p contribui com um expoente 1 para p em $n!$, cada múltiplo de p^2 contribui com expoente 2 para p em $n!$ e assim sucessivamente. Então, $\sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$ é a soma de todas essas contribuições (veja que um múltiplo de p^i é contado i vezes em $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor, ..., \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$).

Observação 6. *Se p é primo e p^α é a maior potência de p que divide n, usaremos a notação $p^\alpha \parallel n$.*

Exemplo 7. *Em quantos zeros termina a representação decimal de $1000!$?*

Para determinarmos o número de zeros, basta determinarmos a maior potência de 10 que divide $1000!$. Existem mais fatores 2 do que fatores 5 e assim bastará encontrarmos o expoente de 5 na fatoração de $1000!$. Pelo teorema anterior, tal número é:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{1000}{5^i} \right\rfloor = 200 + 40 + 8 + 1 = 249.$$

Exemplo 8. *Mostre que* $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \left\lfloor x + \frac{i}{k} \right\rfloor = \lfloor kx \rfloor$.

Sejam $a = \lfloor x \rfloor$, $b = \{x\}$ e $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ tal que $\dfrac{j}{k} \leq b < \dfrac{j+1}{k}$. Então $\lfloor kb \rfloor = j$. Além disso, $\lfloor b + i/k \rfloor = 0$ se $i < k - j$ e $\lfloor b + j/k \rfloor = 1$ se $k - j \leq i \leq k - 1$. Daí,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} \lfloor b + i/k \rfloor &= \sum_{i=k-j}^{k-1} \lfloor b + i/k \rfloor \\ &= j \\ &= \lfloor kb \rfloor \end{aligned}$$

Exemplo 9. *Mostre que $\lfloor x + y \rfloor + \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.*

Sejam $a = \{x\}$ e $b = \{y\}$. A desigualdade é equivalente à

$$2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + \lfloor a + b \rfloor \leq 2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + \lfloor 2a \rfloor + \lfloor 2b \rfloor.$$

que pode ser reescrita como:

$$\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + \lfloor a + b \rfloor \leq \lfloor 2a \rfloor + \lfloor 2b \rfloor.$$

Temos que $0 \leq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor < 2$ e $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor = 0$. Se $\lfloor a + b \rfloor = 1$ segue que pelo menos um dentre a, b é maior ou igual à $1/2$. Daí,

$$\begin{aligned} \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + \lfloor a + b \rfloor &= 1 \\ &\leq \lfloor 2a \rfloor + \lfloor 2b \rfloor. \end{aligned}$$

Caso contrário, $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + \lfloor a + b \rfloor = 0$ e a desigualdade segue.

Exemplo 10. *Mostre que se m e n são inteiros positivos, então $\dfrac{(2m)!(2n)!}{(m)!(n)!(m+n)!}$ é um inteiro.*

Pelo teorema anterior, basta mostrarmos que:

$$\left\lfloor \frac{2m}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m+n}{p^k} \right\rfloor,$$

para todo primo p e todo inteiro k. A desigualdade segue do exemplo anterior.

Exemplo 11. *Prove que $\binom{2n}{n}$ divide $MMC\{1, 2, ..., 2n\}$.*

Seja p um primo. Se $p^\alpha \parallel \binom{2n}{n}$ e $p^\beta \leq 2n < p^{\beta+1}$, pelo teorema anterior, temos:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{2n}{p^j} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor \\ &= \sum_{j=1}^{\beta} \left\lfloor \frac{2n}{p^j} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor \\ &\leq \beta, \end{aligned}$$

pois $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = 0$ ou 1. Como $p^\beta \parallel MMC\{1, 2, ..., 2n\}$ e $\alpha \leq \beta$, segue o resultado.

Exemplo 12. *Mostre que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^i} + \frac{1}{2} \right\rfloor = n.$$

O número de inteiros que são múltiplos de 2^k, mas não de 2^{k+1} é $\lfloor n/2^k \rfloor - \lfloor n/2^{k+1} \rfloor$. Se $n = 2^{k+1}q + r$, esse número é $q + \lfloor r/2^k \rfloor$. Para $x \in [0, 1)$, é verdade que $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x + 1/2 \rfloor$. Assim,

$$\begin{aligned} \lfloor n/2^k \rfloor - \lfloor n/2^{k+1} \rfloor &= q + \lfloor r/2^k \rfloor \\ &= \lfloor r/2^k + 1/2 + q \rfloor \\ &= \lfloor r/2^{k+1} + 1/2 \rfloor \end{aligned}$$

Somando a quantidade de números que são múltiplos de 2^k mas não de 2^{k+1} entre 1 e n para $k = 0, 1, \ldots$ obtemos a quantidade total de números, ou seja,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^i} + \frac{1}{2} \right\rfloor = n.$$

Teorema 13. *Seja $v_p(n)$ a soma dos dígitos da representação de n na base p. Mostre que o expoente de p na fatoração em primos de $n!$ é $\dfrac{n - v_p n}{p - 1}$.*

Demonstração. Seja $k_p(n!)$ o maior expoente de p que divide $n!$. Considere a representação de n na base p: $n = d_0 + d_1 p + ... + d_r p^r$ onde $0 \leq d_i < p$. Então,

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor &= d_1 + d_2 p + \ldots + d_r p^{r-1}, \\
\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor &= d_2 + d_3 p + \ldots + d_r p^{r-2}, \\
&\cdots \\
\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor &= d_r.
\end{aligned}$$

Somando tudo, obtemos:

$$\begin{aligned}
k_p(n!) &= d_1 + d_2(p+1) + d_3(p^2+p+1) + \cdots + d_r(p^{r-1} + \cdots + 1) \\
&= \frac{1}{p-1}\big(d_1(p-1) + d_2(p^2-1) + \cdots + d_r(p^r-1)\big) \\
&= \frac{n - v_p(n)}{p-1}
\end{aligned}$$

Exemplo 14. *Seja $B(m)$ o conjunto dos inteiros r tais que 2^r é um termo na representação na base 2 de n. Por exemplo, $B(100) = \{2, 5, 6\}$ pois $100 = 2^2 + 2^5 + 2^6$. Prove que $\binom{n}{k}$ é ímpar se, e somente se, $B(k) \subseteq B(n)$.*

Aproveitando a notação dos teoremas anteriores, $t_2(n) = n - v_2(n)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} \equiv 1 \pmod 2 \quad &\Leftrightarrow \quad [n - v_2(n)] - [(k - v_2(k)) - ((n-k) - v_2(n-k))] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad v_2(k) + v_2(n-k) - v_2(n) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad v_2(k) + v_2(n-k) = v_2(n).
\end{aligned}$$

A última equação nos diz que na soma das representações na base 2 de $n-k$ e k não ocorre a operação de "vai um", ou seja, $B(k) \subseteq B(n)$.

Observação 15. *Esse exemplo também mostra que $\binom{n}{k} \equiv 0 \pmod 2$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ se, e somente se, n é uma potência de 2.*

Exemplo 16. *(Olimpíada Rioplatense) Seja r um real tal que*

$$\left\lfloor r + \frac{19}{100} \right\rfloor + \left\lfloor r + \frac{20}{100} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor r + \frac{92}{100} \right\rfloor = 554.$$

Calcule $\lfloor 100r \rfloor$.

Sejam $\lfloor r \rfloor = a$ e $\{x\} = b$. Podemos reescrever a equação como:

$$74a + \sum_{i=0}^{73} \left\lfloor b + \frac{19+i}{100} \right\rfloor = 554.$$

Como $0 \leq \left\lfloor b + \frac{19+i}{100} \right\rfloor < 2$ *para todo* $i \in \{0, 1, \ldots, 73\}$, *segue que* $74a \leq 554 \leq 74a + 74$. *Não podemos ter* $554 = 74(a+1)$ *pois* $74 \nmid 554$. *Logo,* $a < 554/74 < a+1$ *e por conseguinte* $a = \lfloor 554/74 \rfloor = 7$. *Assim,*

$$\sum_{i=0}^{73} \left\lfloor b + \frac{19+i}{100} \right\rfloor = 554 - 74 \cdot 7 = 36.$$

Pelo primeiro exemplo,

$$\sum_{i=0}^{99} \left\lfloor b + \frac{i}{100} \right\rfloor = j.$$

onde $\frac{j}{100} \leq b < \frac{j+1}{100}$. *Não podemos ter* $\left\lfloor r + \frac{19}{100} \right\rfloor = 1$ *pois nesse caso teríamos*

$$\sum_{i=0}^{73} \left\lfloor r + \frac{19+i}{100} \right\rfloor \geq 73 \neq 36.$$

Logo, $\left\lfloor r + \frac{i}{100} \right\rfloor = 0$ *para todo* $i \leq 19$. *Como* $\left\lfloor r + \frac{i}{100} \right\rfloor = 1$ *se* $100 - j \leq i \leq 99$, *temos:*

$$\begin{aligned}
\lfloor 100b \rfloor &= j \\
&= \sum_{i=0}^{99} \left\lfloor r + \frac{i}{100} \right\rfloor \\
&= \sum_{i=19}^{92} \left\lfloor r + \frac{i}{100} \right\rfloor + \left(\left\lfloor r + \frac{93}{100} \right\rfloor \ldots \left\lfloor r + \frac{99}{100} \right\rfloor \right) \\
&= 36 + 7 \\
&= 43.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\lfloor 100r \rfloor &= 100a + \lfloor 100b \rfloor \\
&= 700 + 43 \\
&= 743.
\end{aligned}$$

Exemplo 17. *Prove que existe um natural n tal que a representação decimal de* n^2 *começa (da esquerda para a direita) com o número 201120112011...2011 (2011 vezes).*

Podemos encontrar n tal que n^2 *comece com qualquer sequência de dígitos* $(c_1c_2...c_r) = m$. *Tome k suficientemente grande tal que* $2\sqrt{m} < 10^{k-1}$. *Seja* $n = \lfloor 10^k\sqrt{m} + 1 \rfloor$. *Então,*

$$\begin{aligned}
0 < 10^k\sqrt{m} < n \leq 10^k\sqrt{m} + 1 \quad &\Rightarrow \\
10^{2k}m < n^2 \leq 10^{2k}m + 2.10^k\sqrt{m} + 1 \quad &\Rightarrow \\
10^{2k}m < n^2 \leq 10^{2k}m + 10^{2k-1} + 1 \quad &\Rightarrow \\
10^{2k}m < n^2 < 10^{2k}(m+1).&
\end{aligned}$$

Assim, n^2 *começa com a sequência de dígitos m.*

Exemplo 18. *(OBM 1999) Prove que há pelo menos um algarismo diferente de zero entre a* 1000000^a *e a* 3000000^a *casa decimal de* $\sqrt{2}$ *após a vírgula.*

Suponha que não, então $10^{2\cdot 10^6}\lfloor 10^{10^6}\sqrt{2}\rfloor = \lfloor 10^{3\cdot 10^6}\sqrt{2}\rfloor$. *Se* $k = \lfloor 10^{10^6}\sqrt{2}\rfloor$, *temos:*

$$\begin{aligned}
10^{2\cdot 10^6}k \le 10^{3\cdot 10^6}\sqrt{2} < 10^{2\cdot 10^6}k + 1 \quad &\Rightarrow \\
\frac{k}{10^{\cdot 10^6}} < \sqrt{2} < \frac{k}{10^{\cdot 10^6}} + \frac{1}{10^{3\cdot 10^6}} \quad &\Rightarrow \\
\frac{k^2}{10^{2\cdot 10^6}} < 2 < \frac{k^2}{10^{2\cdot 10^6}} + \frac{2k}{10^{4\cdot 10^6}} + \frac{1}{10^{6\cdot 10^6}} &
\end{aligned}$$

Como $\dfrac{2k}{10^{2\cdot 10^6}} < \dfrac{2\sqrt{2}10^{10^6}}{10^{2\cdot 10^6}} \le \dfrac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
k^2 < 2\cdot 10^{2\cdot 10^6} < k^2 + 1 \quad &\Rightarrow \\
0 < 2\cdot 10^{2\cdot 10^6} - k^2 < 1. &
\end{aligned}$$

Isso é um absurdo pois $2\cdot 10^{2\cdot 10^6} - k^2 \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 19. *(Sequência de Beatty) Se* α *e* β *são irracionais satisfazendo* $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ *então, as sequências*

$$\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor, \ldots;$$

e

$$\lfloor \beta \rfloor, \lfloor 2\beta \rfloor, \lfloor 3\beta \rfloor, \ldots;$$

incluem todos os números naturais exatamente uma vez.

Primeiramente, provemos a unicidade. Suponha que $\lfloor k\alpha \rfloor = \lfloor l\beta \rfloor = n$, *como* α *e* β *são irracionais,* $n < k\alpha < n+1$ *e* $n < l\beta < n+1$. *Assim,*

$$\begin{aligned}
\frac{k}{n+1} + \frac{l}{n+1} &< \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \\
&< \frac{k}{n} + \frac{l}{n}
\end{aligned}$$

Isso nos diz que $\dfrac{k+l}{n+1} < 1 < \dfrac{k+l}{n}$. *Temos um absurdo pois a desigualdade anterior diz que o inteiro* $k+l$ *está entre dois inteiros consecutivos.*

Mostremos agora que todo natural aparece nas sequências. Dado $n \in \mathbb{N}$, *existe* $k \in \mathbb{Z}_+$ *tal que*

$$\frac{k-1}{n} < \frac{1}{\alpha} < \frac{k}{n}.$$

Dividamos o intervalo $[k/(n+1), k/n]$ *em duas partes. Se* $\dfrac{k-1}{n} < \dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{k}{n}$*, temos* $\lfloor k\alpha \rfloor = n$*. Se por outro lado,* $\dfrac{k-1}{n} < \dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{k}{n+1}$*, temos:*

$$\begin{aligned} \frac{k-1}{n} < 1 - \frac{1}{\beta} < \frac{k}{n+1} &\quad \Rightarrow \\ \frac{n+1-k}{n+1} < \frac{1}{\beta} < \frac{n+1-k}{n} &\quad \Rightarrow \\ \lfloor (n+1-k)\beta \rfloor = n & \end{aligned}$$

Em qualquer caso, n *faz parte da sequência.*

3 A solução do problema inicial

Voltemos ao exemplo inicial. Veja que toda linha ou coluna do tabuleiro deve possuir no máximo uma posição perdedora. Se a k*-ésima coluna não possuir nenhuma posição perdedora, para cada uma de suas casinhas, poderemos encontrar um posição perdedora na mesma linha ou diagonal e isso implicaria na existência de uma infinidade de posições perdedoras entre as* $k-1$ *primeiras colunas. O mesmo argumeto se aplica para as linhas. Consequentemente, cada natural aparece exatamente uma vez dentre os termos da sequência* $x_0, x_1, \ldots; y_0, y_1, \ldots$*. Além disso, também é fácil concluir que as sequências* (x_n) *e* (y_n) *são crescentes. Induzidos do exemplo anterior, isso nos leva a conjecturar a existência de dois irracionais* α *e* β *que possam de alguma forma gerar os termos das posições perdedoras.*

A inserção dos pontos (x_n, y_n) *em um gráfico sugere que esses pontos estão próximos a alguma reta. Isso poderia ser traduzido dizendo que o quociente* y_n/x_n *é próximo a algum valor. De fato, se* $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$*,* $x_n \approx \alpha n$ *e* $y_n \approx (\alpha+1)n$*. Como as posições são números inteiros, podemos conjecturar que:*

Conjectura 20. *Se* $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$*, então* $(x_n, y_n) = (\lfloor n \cdot \alpha \rfloor, \lfloor n \cdot (\alpha+1) \rfloor)$

Veja que α *é irracional e que:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} &= \frac{2\alpha+1}{\alpha^2+\alpha} \\ &= \frac{2\alpha+1}{2\alpha+1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Provemos a afirmação anterior por indução. Ela é facilmente verificável para os casos iniciais apresentados na primeira tabela. Suponha sua validade para todos os inteiros no conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, k\}$*. Provemos que o mesmo também pe válido para* $k+1$*. Seja* t *o menor natural que não está no conjunto* $\{x_0, x_1, \ldots, x_k, y_0, y_1, \ldots, y_k\}$*. Como as sequências*

x_n e y_n são crescentes e $x_n < y_n$, se $x_{k+1} \neq t$, o inteiro t não aprecerá entre os termos das sequências e isso contradiz nossa observação inicial. Em virtude da unicidade de repsentação da sequência de Beatty, o inteiro $\lfloor \alpha(k+1) \rfloor$ ainda não apareceu dentre os termos das $k+1$ primeiras posições perdedoras. Se $t < \lfloor \alpha(k+1) \rfloor$, como x_n é crescente, deve existir j tal que $\lfloor (\alpha+1)j \rfloor = t$ com $j > k$. Nesse caso,

$$\begin{aligned} t &= \lfloor (\alpha+1)j \rfloor \\ &\geq \lfloor (\alpha+1)(k+1) \rfloor \\ &= \lfloor \alpha(k+1) \rfloor + k + 1 \\ &> \lfloor \alpha(k+1) \rfloor \end{aligned}$$

Contrariando a suposição inicial sobre t. Logo, devemos ter $x_{k+1} = \lfloor \alpha(k+1) \rfloor$. Seja $l = y_{k+1} - x_{k+1}$. Se $l < k+1$, O movimento diagonal

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) \to (x_l, y_{k+1} - x_{k+1} + x_l) = (x_l, y_l),$$

passa uma posição perdedora para contradizendo o fato de que (x_{k+1}, y_{k+1}) era uma posição perdedora. Se $l > k+1$, $y_{k+1} > \lfloor (\alpha+1)(k+1) \rfloor$ e o jogador naquela posição pode remover pedras de apenas uma pilha obtendo:

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) \to (\lfloor \alpha(k+1) \rfloor, \lfloor (\alpha+1)(k+1) \rfloor).$$

Usando novamente hipótese de indução e lembrando que $y_i - x_i \neq k+1$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$, qualquer movimento do próximo jogador, conduzirá a uma posição em que exatamente uma das pilhas possui um número de pedras igual a um dos números $x_0, y_0, \ldots, x_k, y_k$. Assim, o oponente poderá passar uma posição perdedora. Novamente temos um absurdo pois (x_{k+1}, y_{k+1}). Logo, $y_{k+1} - x_{k+1} = k+1$ e consequentemente $y_{k+1} = \lfloor (\alpha+1)(k+1) \rfloor$ concluindo a prova da conjectura para $k+1$.

Problemas Propostos

Problema 21. *Mostre que a parte fracionária do número $\sqrt{4n^2+n}$ não é maior que $0,25$.*

Problema 22. *Sejam $\{a_i\}_{0 \leq i \leq r}$, inteiros não negativos com $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_r$. Mostre que $\dfrac{n!}{a_1!a_2!\ldots a_r!}$ é um inteiro.*

Problema 23. *Prove que, para qualquer n natural, $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n+2^{i-1}}{2^i} \right\rfloor = n$.*

Problema 24. *Seja p um divisor primo do número $\dbinom{2n}{n}$, com $p \geq \sqrt{2n}$. Então o expoente de p na fatoração em primos do do número $\dbinom{2n}{n}$ é igual a 1.*

Problema 25. *(Coréia 1997) Expresse* $\sum_{k=1}^{n}\lfloor\sqrt{k}\rfloor$ *em termos de* n *e* $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

Problema 26. *(Canadá 1998) Determine o número de soluções reais da equação*

$$\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{a}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{a}{5}\right\rfloor=a.$$

Problema 27. *Encontre todos o reais* α *tais que a igualdade* $\lfloor\sqrt{n}\rfloor+\lfloor\sqrt{n+\alpha}\rfloor=\lfloor\sqrt{4n+1}\rfloor$ *é verdadeira para todos os naturais* n.

Problema 28. *Se* a, b, c *são reais e* $\lfloor na\rfloor+\lfloor nb\rfloor=\lfloor nc\rfloor$ *para todo* n *natural, então* $a\in\mathbb{Z}$ *ou* $b\in\mathbb{Z}$.

Problema 29. *Sejam* a, b, c *e* d *números reais. Suponha que* $\lfloor an\rfloor+\lfloor bn\rfloor=\lfloor cn\rfloor+\lfloor dn\rfloor$ *para todos os inteiros positivos* n. *Mostre que pelo menos um dentre* $a+b, a-c, a-d$ *é inteiro.*

Problema 30. *Seja* $n\geq 3$ *um inteiro positivo. Mostre que é possível eliminar no máximo dois elementos do conjunto* $\{1,2,\ldots,n\}$ *de modo que a soma dos números restantes seja um quadrado perfeito.*

Problema 31. *Sejam* a, m, b *inteiros dados, com* $mdc(a,m)=1$. *Calcule* $\displaystyle\sum_{x=0}^{m-1}\left\lfloor\frac{ax+b}{m}\right\rfloor$.

Problema 32. *Encontre todos os naturais* n *tais que* $2^{n-1}\mid n!$.

Problema 33. *Determine os pares* (a,b) *de reais tais que* $a\lfloor bn\rfloor=b\lfloor an\rfloor$ *para todo inteiro positivo* n.

Problema 34. *Se* p *é primo , então* $\binom{p^k}{i}\equiv 0 \pmod{p}$*(para* $1\leq i\leq p^k-1$*).*

Problema 35. *Prove que* $\lfloor(\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+2})^3\rfloor$ *é divisível por 8.*

Problema 36. *Prove que,* $t_1+t_2+\ldots+t_n=\left\lfloor\frac{n}{1}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\ldots+\left\lfloor\frac{n}{n}\right\rfloor$, *onde* t_n *é o número de divisores do natural* n.

Problema 37. *Prove que, se* p *é um número primo, então a diferença* $\binom{n}{p}-\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor$ *é divisível por* p.