

## Equações de Pell

### Uma Equação Famosa

Vejam um problema que servirá de motivação ao nosso estudo.

**Exemplo 1.** *Sejam  $F_n$  e  $L_n$  as seqüências de Fibonacci e Lucas, respectivamente, definidas por*

$$\begin{aligned} F_1 = 1, \quad F_2 = 1 \quad e \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n \geq 2, \\ L_1 = 1, \quad L_2 = 3 \quad e \quad L_{n+1} = L_n + L_{n-1}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

*Mostre que a equação  $5x^2 - y^2 = 4$  admite uma solução  $(x, y)$  em inteiros positivos se, e somente se,  $(x, y) = (F_{2n-1}, L_{2n-1})$  para algum natural  $n$ .*

Note que  $(1, 1)$  é a única solução com  $y \leq 2$ . Podemos supor, portanto, que  $y \geq 3$ . Sendo  $\alpha, \beta$  as duas raízes da equação  $x^2 - x - 1 = 0$ , é conhecido que

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad e \quad L_n = \alpha^n + \beta^n.$$

É trivial verificar que os pares  $(F_{2n-1}, L_{2n-1})$  satisfazem nossa equação. A parte difícil é mostrar que essas são as únicas soluções. Seja

$$S = \{(F_{2n-1}, L_{2n-1}), \quad n \geq 1\}.$$

Por absurdo, suponha que exista uma solução  $(x, y) \notin S$ , e tome aquela que minimiza o valor de  $x$ . Como  $x$  e  $y$  têm a mesma paridade, as frações  $(3x - y)/2$  e  $(3y - 5x)/2$  são inteiros positivos, pois

$$\begin{aligned} x^2 > -1 \quad \Rightarrow \quad 9x^2 > 5x^2 - 4 \quad \Rightarrow \quad 9x^2 > y^2 \quad \Rightarrow \quad 3x > y \\ & \qquad \qquad \qquad e \\ y^2 > 5 \quad \Rightarrow \quad 9y^2 > 5y^2 + 20 \quad \Rightarrow \quad 9y^2 > 25x^2 \quad \Rightarrow \quad 3y > 5x. \end{aligned}$$

Afirmamos que  $((3x - y)/2, (3y - 5x)/2)$  é uma solução da equação que não está em  $S$ . De fato,

$$5 \left( \frac{3x - y}{2} \right)^2 - \left( \frac{3y - 5x}{2} \right)^2 = \frac{20x^2 - 4y^2}{4} = 4,$$

e, se  $((3x - y)/2, (3y - 5x)/2) \in S$ , existiria  $n$  para o qual

$$\begin{aligned} \frac{3x - y}{2} = F_{2n-1} & \quad \text{e} \quad \frac{3y - 5x}{2} = L_{2n-1} \\ \iff x = F_{2n+1} & \quad \text{e} \quad y = L_{2n+1}, \end{aligned}$$

o que contraria o fato de  $(x, y)$  não estar em  $S$ . Para terminar, note que  $(3x - y)/2 < x$ , ou seja, obtemos uma solução cuja primeira coordenada é menor que  $x$ . Pelo método da Descida de Fermat, concluímos que todas as soluções estão em  $S$ .

**Exemplo 2.** (Vietnã 1999) A seqüência  $a_n$  é definida por  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$  e  $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ ,  $n \geq 1$ . A seqüência  $b_n$  é definida por  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 4$  e  $b_{n+2} = 3b_{n+1} - b_n$ ,  $n \geq 1$ . Mostre que os inteiros positivos  $(a, b)$  satisfazem  $5a^2 - b^2 = 4$  se, e somente se,  $\text{mdc}(a_n, b_n) = \text{mdc}(a, b)$ .

Veja que encontramos uma família infinita de soluções para o problema anterior. Curiosamente, essa família satisfaz uma recorrência linear bem simples. Note ainda que  $\sqrt{5}$  apareceu na fórmula que encontramos para  $F_{2n+1}$  e  $L_{2n+1}$ . Será que tudo isso foi coincidência? Nosso próximo objetivo será estudar mais detalhadamente equações como a do problema anterior.

A equação  $x^2 - dy^2 = N$ , onde  $d$  é natural e  $N$  é inteiro, é chamada *equação de Pell*. Jonh Pell contribuiu muito pouco para a análise desta equação. Ela recebeu seu nome apenas por um engano de Euler. Lagrange foi o primeiro a provar que, se  $d$  não é um quadrado perfeito, então  $x^2 - dy^2 = 1$  tem infinitas soluções. Estamos interessados em descrever todas as possíveis soluções desta equação, caso existam, e tentar obter alguns critérios para dizer quando ela não tem solução. Trataremos apenas do caso em que  $d$  não é um quadrado perfeito. O outro caso é deixado como exercício para o leitor.

**Observação 3.** (Para professores) Caso os alunos não estejam preparados para o formalismo nas próximas demonstrações, o professor poderá ater-se apenas aos problemas. Bastaria o aluno entender como se caracterizam as soluções de uma equação de Pell. Após alguma amadurecimento, ficaria mais fácil estudar as provas e entender porque as soluções só podem ser daquela forma.

A próxima proposição é um conhecido exercício de princípio da casa dos pombos.

**Proposição 4.** Se  $\xi$  é um número irracional, existem infinitos números racionais  $x/y$ , com  $\text{mdc}(x, y) = 1$ , tais que

$$\left| \xi - \frac{x}{y} \right| < \frac{1}{y^2}.$$

*Demonstração.* Considere a partição

$$[0, 1) = \left[0, \frac{1}{n}\right) \cup \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) \cup \dots \cup \left[\frac{n-1}{n}, 1\right).$$

Pelo princípio da casa dos pombos, dois dentre os números  $0, \{\xi\}, \{2\xi\}, \dots, \{n\xi\}$  estão em um mesmo intervalo da partição, digamos

$$\{k\xi\}, \{j\xi\} \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right), \quad 0 \leq k < j \leq n \text{ e } 0 \leq i < n.$$

Então

$$\begin{aligned} |\{j\xi\} - \{k\xi\}| &< \frac{1}{n} \\ |(j-k)\xi - ([j\xi] - [k\xi])| &< \frac{1}{n} \\ \left|\xi - \frac{x'}{y'}\right| &< \frac{1}{ny'}, \end{aligned}$$

onde  $x' = [j\xi] - [k\xi]$  e  $y' = j - k$ . Seja  $d = \text{mdc}(x', y')$ , com  $x' = dx$  e  $y' = dy$ ,  $\text{mdc}(x, y) = 1$ . Temos

$$\left|\xi - \frac{x}{y}\right| = \left|\xi - \frac{x'}{y'}\right| < \frac{1}{ny'} < \frac{1}{y'^2} < \frac{1}{y^2}.$$

Para obter infinitas soluções, tome  $m > 1/|\xi - x/y| \neq 0$ . Com o mesmo argumento acima, particionando agora o intervalo  $[0, 1)$  em  $m$  intervalos de mesmo tamanho, obtemos um par de inteiros  $(x_1, y_1)$  primos entre si,  $0 < y_1 < m$ , tais que

$$\left|\xi - \frac{x_1}{y_1}\right| < \frac{1}{my_1} < \left|\xi - \frac{x}{y}\right|$$

e portanto  $x_1/y_1$  é uma aproximação racional de  $\xi$  melhor do que  $x/y$ .

Dizemos que um inteiro  $n$  é livre de quadrados se não existe nenhum natural  $k > 1$  tal que  $k^2|n$ .

**Proposição 5.** *Seja  $d$  um inteiro positivo livre de quadrados. Existe uma constante  $M$  tal que a desigualdade*

$$|x^2 - dy^2| < M$$

*tem infinitas soluções inteiras positivas  $(x, y)$ .*

*Demonstração.* É claro que, se  $d$  é livre de quadrados, então  $\sqrt{d}$  é irracional. Pela proposição anterior, existem infinitos pares de inteiros  $(x, y)$ , com  $y > 0$  e  $\text{mdc}(x, y) = 1$ , tais que  $|x - y\sqrt{d}| < 1/y$ . Aplicando a desigualdade triangular, temos

$$\left|x + y\sqrt{d}\right| \leq \left|x - y\sqrt{d}\right| + 2y\sqrt{d} < \frac{1}{y} + 2y\sqrt{d}.$$

Multiplicando as duas desigualdades encontradas, obtemos

$$|x^2 - dy^2| < \frac{1}{y} \left( \frac{1}{y} + 2y\sqrt{d} \right) \leq 2\sqrt{d} + 1,$$

o que conclui a demonstração. ■

Se  $(x, y)$  é solução da equação de Pell, é claro que  $(\pm x, \pm y)$  também é. Suporemos, a partir daqui, que  $x, y > 0$ .

**Teorema 6.** *Se  $d$  é um inteiro positivo livre de quadrados, então a equação  $x^2 - dy^2 = 1$  tem infinitas soluções inteiras. Ademais, existe uma solução  $(x_1, y_1)$ , chamada de solução fundamental, tal que toda solução é da forma  $(x_n, y_n)$ ,  $n \geq 1$ , onde  $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ .*

*Demonstração.* Vamos mostrar a existência de uma solução. Pela proposição anterior, existem infinitos pares de inteiros  $(x, y)$  tais que  $|x^2 - dy^2| < M$ . Existe, portanto, um inteiro  $m$ ,  $1 \leq m \leq M$ , tal que a equação  $|x^2 - dy^2| = m$  tem infinitas soluções. Módulo  $m$ , cada solução está no conjunto finito

$$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\} \times \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\},$$

e daí, com um argumento análogo ao anterior, existe um par  $(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$  tal que uma quantidade infinita de soluções  $(x, y)$  satisfaz  $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{a}, \bar{b})$ . Em particular, existem soluções distintas  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  tais que  $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ . Temos

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + y_1\sqrt{d}}{x_2 + y_2\sqrt{d}} &= \frac{(x_1 + y_1\sqrt{d})(x_2 - y_2\sqrt{d})}{m} \\ &= \frac{(x_1x_2 - dy_1y_2) + (x_2y_1 - x_1y_2)\sqrt{d}}{m} \\ &= u + v\sqrt{d}, \end{aligned}$$

onde  $u, v$  são inteiros, pois

$$\begin{aligned} x_1x_2 - dy_1y_2 &\equiv x_1^2 - dy_1^2 \equiv 0 \pmod{m} \\ x_2y_1 - x_1y_2 &\equiv x_1y_1 - x_1y_1 \equiv 0 \pmod{m}. \end{aligned}$$

Ademais,

$$\begin{aligned} u^2 - dv^2 &= (u + v\sqrt{d}) \cdot (u - v\sqrt{d}) \\ &= \frac{x_1 + y_1\sqrt{d}}{x_2 + y_2\sqrt{d}} \cdot \frac{x_1 - y_1\sqrt{d}}{x_2 - y_2\sqrt{d}} \\ &= \frac{x_1^2 - dy_1^2}{x_2^2 - dy_2^2} \\ &= 1, \end{aligned}$$

mostrando a existência de solução. Vejamos agora como são as soluções.

Diremos que uma solução  $(x_1, y_1)$  é maior que uma solução  $(x_2, y_2)$  se  $x_1 + y_1\sqrt{d} > x_2 + y_2\sqrt{d}$ . Seja  $(x_1, y_1)$  a menor solução, com  $x_1, y_1 > 0$ . Chamaremos esta solução de *fundamental*. Dada outra solução  $(x, y)$ , vamos mostrar que existe  $n$  para o qual  $x + y\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ . De fato, se esse não é o caso, para algum  $n$  valem as seguintes desigualdades

$$(x_1 + y_1\sqrt{d})^n < x + y\sqrt{d} < (x_1 + y_1\sqrt{d})^{n+1},$$

e daí

$$1 < (x + y\sqrt{d}) (x_1 + y_1\sqrt{d})^{-n} < x_1 + y_1\sqrt{d}$$

$$1 < (x + y\sqrt{d}) (x_1 - y_1\sqrt{d})^n < x_1 + y_1\sqrt{d}$$

$$1 < A + B\sqrt{d} < x_1 + y_1\sqrt{d},$$

onde  $(A, B)$  é uma solução formada por inteiros positivos (prove!). Isso contraria a minimalidade do par  $(x_1, y_1)$ . Assim, toda solução  $(x, y)$  deve satisfazer  $x + y\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ , para algum  $n \geq 1$ , e uma fácil verificação mostra que esses pares são de fato soluções da equação. ■

**Exemplo 7.** *Encontre todos os triângulos cujos lados são inteiros consecutivos e cuja área é inteira.*

Sejam  $a = n - 1$ ,  $b = n$ ,  $c = n + 1$  os lados do triângulo. Pela fórmula de Herão, a área do triângulo é

$$A = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)} = \frac{n}{4} \sqrt{3(n^2 - 4)}.$$

$A$  é inteiro se e somente se  $n$  é par e  $3(n^2 - 4)$  é um quadrado perfeito. Substituindo  $n$  por  $2x$  e  $A$  por  $ny$ , obtemos a equação  $3x^2 - 3 = y^2$ . Então  $y$  é divisível por 3, digamos  $y = 3z$ , e daí a equação anterior equivale à equação de Pell  $x^2 - 3z^2 = 1$ . A solução fundamental dessa última é  $(x_1, z_1) = (2, 1)$ , donde todas as outras soluções são geradas pelas recorrências  $x_{n+1} = 2x_n + 3z_n$  e  $z_{n+1} = x_n + 2z_n$ ,  $n \geq 1$ . Os triângulos procurados são os que têm lados de medidas  $2x_n - 1$ ,  $2x_n$  e  $2x_n + 1$ , cuja área é  $3x_n z_n$ .

**Exemplo 8.** *Encontre o menor inteiro positivo  $n$  para o qual  $19n + 1$  e  $95n + 1$  sejam ambos quadrados perfeitos.*

Sejam  $19n + 1 = x^2$  e  $95n + 1 = y^2$ . Então  $5x^2 - y^2 = 4$ , que é a equação analisada no problema 45. Suas soluções são os pares  $(F_{2m-1}, L_{2m-1})$ ,  $m \geq 1$ . Para que  $n$  seja mínimo,

basta calcular o menor número da seqüência de Fibonacci múltiplo de 19, que é  $F_{17} = 1597$ . Assim,

$$n = \frac{F_{17}^2 - 1}{19} = 134232.$$

**Exemplo 9.** Dado  $n > 1$ , mostre que existe um conjunto  $S$  de  $n$  pontos no plano tal que:

1. Não existem três pontos de  $S$  colineares;
2. A distância entre quaisquer dois pontos de  $S$  é um inteiro.

Como a equação de Pell  $x^2 - 2y^2 = -1$  admite a solução  $(1, 1)$ , ela admite infinitas. Sejam então  $a_1, a_2, \dots, a_n$  inteiros satisfazendo as seguintes condições:

- (i)  $a_i^2 + 1 = 2b_i^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;
- (ii)  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ .

Tome  $S = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ , onde  $P_1, P_2, \dots, P_n$  são pontos sobre a circunferência unitária definidos por

$$P_i = \left( \frac{2a_i}{a_i^2 + 1}, \frac{a_i^2 - 1}{a_i^2 + 1} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Um cálculo simples mostra que a distância entre quaisquer dois pontos de  $S$  é racional. Multiplicando as coordenadas desses pontos pelo mínimo múltiplo comum dos denominadores de todas as frações das distâncias entre dois pontos, obtemos um conjunto de  $n$  pontos sobre uma mesma circunferência, em particular não existindo três colineares, tais que a distância entre quaisquer dois deles é inteira.

**Problema 10.** (IMO 1975) Existem 1975 pontos sobre uma circunferência de raio 1 de modo que a distância entre quaisquer dois desses pontos é racional?

**Problema 11.** Seja  $n \geq 3$  um inteiro. Mostre que existe um conjunto  $S$  de  $n$  pontos no plano tal que a distância entre quaisquer dois pontos de  $S$  é irracional e a área de qualquer triângulo com vértices em  $S$  é racional.

**Problema 12.** Prove que a equação  $x^2 - dy^2 = -1$  não tem solução se  $d$  é divisível por um primo da forma  $4k + 3$ .

**Problema 13.** Sejam  $d, k$  inteiros positivos tais que  $d$  não é um quadrado perfeito. Mostre que existem infinitos pares de inteiros positivos  $(x, y)$  tais que  $k|y$  e  $x^2 - dy^2 = 1$ .

### Outros Resultados

Para o leitor familiarizado com frações contínuas, basta sabermos as  $n$ -ésimas convergências da expansão de  $\sqrt{d}$  para determinarmos as soluções de  $x^2 - dy^2 = 1$ , como diz a proposição abaixo:

**Proposição 14.** *Todas as soluções de  $x^2 - dy^2 = 1$  podem ser encontradas em  $x_n = h_n$ ,  $y_n = k_n$ , onde  $\frac{h_n}{k_n}$  são as  $n$ -ésimas convergências da expansão em frações contínuas de  $\sqrt{d}$ . Se  $r$  é o período da expansão em frações contínuas de  $\sqrt{d}$  temos:*

- I) *Se  $r$  é par então  $x^2 - dy^2 = -1$  não tem solução e todas soluções positivas de  $x^2 - dy^2 = 1$  são dadas por  $x = h_{nr-1}$ ,  $y = k_{nr-1}$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$*
- II) *Se  $r$  ímpar então  $x = h_{nr-1}$ ,  $y = k_{nr-1}$  produzem todas as soluções de  $x^2 - dy^2 = -1$  quando  $n = 1, 3, 5, \dots$ , e todas as soluções de  $x^2 - dy^2 = 1$  quando  $n = 2, 4, 6, \dots$*

**Proposição 15.** (Equação de Pell generalizada) *Consideremos  $ax^2 - by^2 = c$ , onde  $a$  e  $b$  não são simultaneamente iguais a 1 e eles também não são divisíveis por nenhum quadrado, então as soluções são obtidas da seguinte maneira: Se  $c = 1$ , e ambos  $a$  e  $b$  são diferentes de 1, determine primeiro a solução fundamental se existir. Todas as outras soluções são obtidas da solução fundamental  $(x_0, y_0)$  por  $x_n\sqrt{a} + y_n\sqrt{b} = (x_0\sqrt{a} + y_0\sqrt{b})^{2n+1}$ . Se  $c \neq 1$ , primeiro determine a solução fundamental da equação  $ax^2 - by^2 = 1$ . Se  $a$  ou  $b$  é igual a 1, então esta equação tem no máximo um solução fundamental  $(x_0, y_0)$ . Se  $(x'_0, y'_0)$  é uma solução fundamental de  $ax^2 - by^2 = c$  todas as outras são obtidas de  $x_n\sqrt{a} + y_n\sqrt{b} = (x_0\sqrt{a} + y_0\sqrt{b})^n (x'_0\sqrt{a} + y'_0\sqrt{b})$ . Se nem  $a$  ou  $b$  for igual a 1, as soluções são geradas por  $x_n\sqrt{a} + y_n\sqrt{b} = (x_0\sqrt{a} + y_0\sqrt{b})^{2n} (x'_0\sqrt{a} + y'_0\sqrt{b})$ .*

**Corolário 16.** *Suponha que  $N$  é um inteiro não nulo e que  $d$  seja livre de quadrados. Se  $x^2 - dy^2 = N$  tem uma solução, então tem infinitas.*

**Proposição 17.** *Seja  $d$  um inteiro que não é um quadrado perfeito, sejam  $\frac{h_n}{k_n}$  as  $n$ -ésimas convergências da expansão em fração contínua de  $\sqrt{d}$ . Seja  $N$  um inteiro tal que  $|N| < d$ . Então qualquer solução positiva de  $x = s, y = t$  de  $x^2 - dy^2 = N$  com  $\text{mdc}(s, t) = 1$  satisfaz  $s = h_n, t = k_n$  para algum  $n$ .*

## Problemas Propostos

**Problema 18.** *Mostre que existem infinitos inteiros  $n$  para os quais  $n^2 + (n + 1)^2$  é um quadrado perfeito.*

**Problema 19.** *Dado um inteiro positivo  $k$ , mostre que não existem inteiros  $(x, y)$  tais que  $x^2 - (k^2 - 1)y^2 = -1$ .*

**Problema 20.** *Mostre que, se  $d \equiv 1 \pmod{4}$ , então a equação  $x^2 - dy^2 = -1$  tem solução.*

**Problema 21.** *(Banco IMO 2002) Existe um inteiro positivo  $m$  para o qual a equação*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} = \frac{m}{a+b+c}$$

*tem infinitas soluções inteiras positivas  $a, b, c$ ?*

**Problema 22.** *Determine todos os pares  $(k, n)$  de inteiros positivos tais que*

$$1 + 2 + \dots + k = (k + 1) + (k + 2) + \dots + n.$$

**Problema 23.** *Encontre todos os números da forma  $m(m+1)/3$  que são quadrados perfeitos.*

**Problema 24.** *Encontre todos os números triangulares que são quadrados perfeitos.*

**Problema 25.** *Resolva a equação  $(x + 1)^3 - x^3 = y^2$  em inteiros positivos.*

**Problema 26.** *Encontre todos os inteiros positivos  $n$  para os quais  $2n + 1$  e  $3n + 1$  sejam ambos quadrados perfeitos e mostre que todos esses inteiros são divisíveis por 40.*

**Problema 27.** *Seja  $n$  um inteiro positivo tal que  $3n + 1$  e  $4n + 1$  são ambos quadrados perfeitos. Mostre que  $n$  é divisível por 56.*

**Problema 28.** *Prove que existem infinitos inteiros positivos  $n$  para os quais  $n^2 + 1$  divide  $n!$ .*

**Problema 29.** *Prove que a equação*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$$

*admite infinitas soluções inteiras positivas  $(x, y, z)$ .*

**Problema 30.** *Encontre todos os inteiros positivos  $n$  para os quais existem inteiros positivos distintos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  tais que*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \dots + \frac{n}{a_n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

**Problema 31.** *(Vietnã 1992) Encontre todos os pares de inteiros positivos  $(x, y)$  satisfazendo a equação*

$$x^2 + y^2 - 5xy + 5 = 0.$$



**Problema 32.** *Encontre todos os naturais  $n$  para os quais  $n + 1$  e  $3n + 1$  são ambos quadrados perfeitos.*

**Problema 33.** *Encontre todos os pares de naturais  $(m, n)$  satisfazendo a igualdade*

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = m^2.$$

**Problema 34.** *(Banco IMO 1967) Qual fração  $p/q$ , onde  $p, q$  são inteiros positivos menores que 100, é a mais próxima de  $\sqrt{2}$ ? Encontre todos os dígitos após a vírgula da representação decimal dessa fração que coincidem com os dígitos da representação decimal de  $\sqrt{2}$ .*

**Problema 35.** *(Banco IMO 2003) Seja  $b > 5$  um inteiro. Para cada natural  $n$ , seja  $x_n$  a representação na base  $b$  do número*

$$\underbrace{11 \dots 1}_{n-1} \underbrace{22 \dots 2}_n 5.$$

*Prove que a seguinte condição é verdadeira se e somente se  $b = 10$ :*

*“Existe um inteiro positivo  $n_0$  tal que, para cada  $n > n_0$ , o número  $x_n$  é um quadrado perfeito.”*

**Problema 36.** *(Torneio das Cidades 1997) Prove que a equação*

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1997$$

*tem infinitas soluções inteiras  $(x, y, z)$ .*

**Problema 37.** *(Irlanda 1995) Determine todos os inteiros  $a$  para os quais a equação*

$$x^2 + axy + y^2 = 1$$

*tem infinitas soluções inteiras positivas  $(x, y)$  tais que  $x \neq y$ .*

## Referências

- [1] F. E. Brochero Martinez, C. G. Moreira, N. C. Saldanha, E. Tengan - Teoria dos Números ? um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro, Projeto Euclides, IMPA, 2010.
- [2] E. Carneiro, O. Campos and F. Paiva, Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 (Níveis Júnior e Senior), Ed. Realce, 2005.
- [3] S. B. Feitosa, B. Holanda, Y. Lima and C. T. Magalhães, Treinamento Cone Sul 2008. Fortaleza, Ed. Realce, 2010.

- [4] D. Fomin, A. Kirichenko, Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991, MathPro Press, Westford, MA, 1994.
- [5] D. Fomin, S. Genkin and I. Itenberg, Mathematical Circles, Mathematical Words, Vol. 7, American Mathematical Society, Boston, MA, 1966.
- [6] I. Niven, H. S. Zuckerman, and H. L. Montgomery, An Introduction to the Theory of Numbers.