Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Teoria dos Números - Nível 2

Prof. Samuel Feitosa

Aula 19

A Função Parte Inteira - II

Exemplo 1. *Considere um tabuleiro T, de dimensões $m \times n$, onde m e n são inteiros positivos. Prove que uma diagonal de T passa por exatamente $m+n-mdc(m,n)$ quadradinhos 1×1.*

Suponhamos os quadradinhos de lado unitário. Vamos fazer primeiro o caso em que $mdc(m,n) = 1$. Esse tabuleiro em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pode ser reperesentado por um retângulo de vértices : $O = (0,0), A = (m,0), B = (m,n), C = (0,n)$. Queremos porvar que a diagonal OB passa por exatamente $m+n-1$ quadradinhos. Quando esta diagonal corta um quadradinho, um segmento de reta dela, fica totalmente contido no quadradinho. Basta contarmos em quantos segmentos esses quadradinhos dividem OB.

Se um vértice, digamos (a,b), de algum dos quadradinhos do tabuleiro está em OB, usando semelhança de triângulos podemos concluir que:

$$\begin{aligned} a &= \frac{m}{n}b \Rightarrow \\ an &= bm \end{aligned}$$

Como $m|an$ e $mdc(m,n) = 1$, temos $m \mid a$ resultando que $a = 0$ ou $a \geq m$. No primeiro caso $(a,b) = O$ e no segundo, como $a \leq m$ pois a está no inteiror do retângulo, temos $(a,b) = B$. Assim, OB não contém vértices de quadradinhos diferentes de O e B. Consequentemente OB corta cada uma das retas $x = 1,2,...,m-1$ e $y = 1,2,...,n-1$ em pontos distintos determinando assim $m+n-2$ pontos sobre OB. Juntando esses $m+n-2$ pontos marcados sobre a diagonal com O e B teremos $m+n$ pontos e por conseguinte OB corta $m+n-1$ quadradinhos. Agora se $mdc(m,n) = d$ podemos escrever $m = dm_1, n = dn_1$ com $mdc(m_1,n_1) = 1$. Divida agora o tabuleiro em d sub-tabuleiros : $T_i = \{O_i = ((i-1)m_1,(i-1)n_1), A_i = (im_1,0), B_i = (im_1,in_1), C_i = (0,in_1)\}$ para $1 \leq i \leq d$. Basta usar o que fizemos para cada um desses sub-tabuleiros.

Exemplo 2. *Suponha que* $mdc(p, q) = 1$. *Então*

$$\sum_{i=1}^{q-1} \left\lfloor \frac{ip}{q} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{p-1} \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Prova: Considere o retângulo $T = O = (0,0), A = (q,0), B = (q,p), C = (0,p)$. Claramente existem $(p-1)(q-1)$ pontos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ no interior do retângulo T. Pelo exemplo anterior, não pode existir pontos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ na diagonal OB. Por simetria, existem $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$ pontos no interior do retângulo OAB. Dado $1 \leq i \leq (q-1)$ existem exatamente $\left\lfloor \frac{ip}{q} \right\rfloor$ pontos da forma $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ no interior do triângulo OAB. Assim $\sum_{i=1}^{q-1} \left\lfloor \frac{ip}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$.

Conjugados

Suponha que α seja um irracional e que estamos interessados em calcular o resto de $\lfloor \alpha^n \rfloor$ mod m. Nesse caso, tentaremos encontrar β tal que $0 < \beta < 1$, $\alpha + \beta$ e $\alpha\beta \in \mathbb{Z}$. Para entendermos o propósito disso, considere a equação: $x^2 - ax - b = 0$ onde $a = \alpha + \beta$ e $b = \alpha\beta$. Como α e β são raízes:

$$\begin{aligned} \alpha^2 = a\alpha + b \quad &\Rightarrow \quad \alpha^{n+1} = a\alpha^n + b\alpha^{n-1} \\ \beta^2 = a\beta + b \quad &\Rightarrow \quad \beta^{n+1} = a\beta^n + b\beta^{n-1} \end{aligned}$$

Se $K_n = \alpha^n + \beta^n$, temos $K_{n+1} = aK_n + bK_{n-1}$. Como a e b são inteiros e $K_1 = \alpha + \beta \in \mathbb{Z}$, $K_2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \in \mathbb{Z}$, segue que $K_n \in \mathbb{Z}$ para todo natural n. Além disso,

$$\begin{aligned} K_n \in \mathbb{Z} \quad &\Rightarrow \\ \{\alpha^n\} + \lfloor \alpha^n \rfloor + \{\beta^n\} + \lfloor \beta^n \rfloor \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Consequentemente $\{\alpha^n\} + \{\beta^n\} \in \mathbb{Z}$. Como $0 < \{\alpha^n\} + \{\beta^n\} < 2$, devemos obrigatoriamente ter $\{\alpha^n\} + \{\beta^n\} = 1$. Usando que $0 < \beta < 1$, também podemos concluir que $\lfloor \beta^n \rfloor = 0$ e por conseguinte $K_n = \lfloor \alpha^n \rfloor + 1$. Conhecendo-se a recursão de K_n, podemos facilmente determinar o período dos restos dos termos da sequência na divisão por m. Os próximos exemplos servirão para ilustrar essa heurística. Também podemos modificar um pouco a idéia anterior para tratar do caso $-1 < \beta < 0$.

Exemplo 3. *Prove que, para todo natural* n *temos:*

$$3 \mid \left\lfloor \left(\frac{7 + \sqrt{37}}{2} \right)^n \right\rfloor.$$

Prova: Sejam $\alpha = \frac{7+\sqrt{37}}{2}$ e $\beta = \frac{7-\sqrt{37}}{2}$. Se $K_n = \alpha^n + \beta^n$, então:

$$K_{n+1} = 7K_n - 3K_{n-1}.$$

Como $K_1 = 7 \equiv 1 \pmod 3$ e $K_2 = 43 \equiv 1 \pmod 3$. Temos que todos os termos da sequência K_n são inteiros e que todo deixam resto 1 na divisão por 3 pois $K_{n+1} \equiv 7K_n \equiv K_n \pmod 3$. Portanto,

$$\lfloor \alpha^n \rfloor + 1 = K_n \equiv 1(\mod 3) \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 4. *Encontre a maior potência de 2 que divide* $\lfloor (3+\sqrt{11}))^{2n+1} \rfloor$.

Sejam $\alpha = 3+\sqrt{11}$, $\beta = 3-\sqrt{11}$ e $K_n = \alpha^n + \beta^n$. Então, $K_{n+1} = 6K_n + 2K_{n-1}$.

[1]Lema: $2^{n+1} \mid K_{2n}$ e $2^{n+1} \parallel K_{2n+1}$

Provaremos o lema por indução. Suponha que $2^{k+1} \mid K_{2k}$ e que $2^{k+1} \parallel K_{2k+1}$, ou seja, $K_{2k} = 2^{k+1}a$ e $K_{2k+1} = 2^{k+1}b$ com $b \equiv 1 \pmod 2$. Então:

$$\begin{aligned} K_{2k+2} &= 6 \cdot 2^{k+1}b + 2 \cdot 2^{k+1}a = 2^{k+2}(3b+a) \\ K_{2k+2} &= 6 \cdot 2^{k+2}(3b+a) + 2 \cdot 2^{k+1}a = 2^{k+2}(18b+7a) \end{aligned}$$

e o resultado segue. Assim,

$$\begin{aligned} K_{2n+1} &= \lfloor \alpha^{2n+1} \rfloor + \lfloor \beta^{2n+1} \rfloor + \{\beta^{2n+1}\} + \{\alpha^{2n+1}\} \\ &= \lfloor \alpha^{2n+1} \rfloor + (-1) + 1 \\ &= \lfloor \alpha^{2n+1} \rfloor \end{aligned}$$

pois $-1 < \beta < 0$ e consequentemente $\lfloor \beta^{2n+1} \rfloor = -1$. Daí, em virtude do lema, a maior potência de 2 é 2^{n+1}.

Problemas Propostos

Problema 5. *(Teste de Seleção do Brasil para a Cone Sul)Prove que para todo inteiro positivo k , a parte interia do número $(7+4\sqrt{3})^k$ é ímpar.*

Problema 6. *(Olimpíada Iraniana) Mostre que,* $k^n - \lfloor k^n \rfloor = 1 - \dfrac{1}{k^n}$ *onde* $k = 2+\sqrt{3}$.

Problema 7. *(Hungria 2000) Se $A = (1000+\sqrt{1000^2+1})^{1000}$, determine o 2000-ésimo algarismo após a vírgula de sua representação decimal.*

Problema 8. *Prove que para todo inteiro $m > 2$ existe um irracional r que depende de m, tal que $\lfloor r^k \rfloor \equiv -1(\mod m)$.*

Problema 9. *Considere a sequêcica de reais positivos $a_1, a_2, ...$, tal que $a_1 = 1$ $a_n = a_{n+1} + a_{n+2}$, para todo inteiro $n > 0$. Prove que o dígito das unidades de $\dfrac{1}{a_i}$ não pode ser 0,3,5 ou 8 para todo $i \in \mathbb{N}$.*

[1] $a^n \parallel b$ significa que $a^n \mid b$ mas $a^{n+1} \nmid b$

Problema 10. *(Seletiva do Brasil para a IMO-2001) Encontre todos os naturais n tais que $\alpha^n - n^2\alpha$ é um inteiro onde $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.*

Problema 11. *(Revista Eureka)Seja α a maior raiz da equação $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. Prove que $\lfloor \alpha^{2004} \rfloor$ é divisível por 17.*

Problema 12. *(Taiwan 1998) Mostre que, para inteiros positivos m e n , $mdc(m,n) = 2\sum_{k=0}^{m-1} \left\lfloor \dfrac{kn}{m} \right\rfloor + m + n - mn$.*

Problema 13. *(Balcânica 2003) Seja $ABCD$ um tabuleiro $m \times n$ de quadrados unitários. Assuma que $mdc(m,n) = 1$ e m, n são ímpares. Os pontos de interseção entre a diagonal principal AC e os lados dos quadrados unitários são $A_1, A_2, ..., A_k$, nesta ordem $(k \geq 2)$ e $A_1 = A, A_k = C$. Prove que $A_1A_2 - A_2A_3 + A_3A_4 - ... + (-1)^k A_{k-1}A_k = \dfrac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}$.*

Problema 14. *(Geórgia 1998) dado $n > 5$, as retas $x = n$ e $y = n$ são desenhadas no plano cartesiano. considere os pontos com coordenadas inteiras no interior (ou bordo) do quadrado formado por essas retas e pelos eixos. Quantos desses pontos tem a soma das coordenadas multiplo de 5?*

Problema 15. *Um jogador solitário recebe após cada jogada a ou b pontos (a e b são inteiros positivos com $a < b$) e estes se acumulam jogada após jogada. Existem 35 valores impossíveis para a pontuação acumulada e um desses valores é 58. Encontre a e b.*

Referências

[1] E. Carneiro, O. Campos and F. Paiva, Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 (Níveis Júnior e Senior), Ed. Realce, 2005.

[2] S. B. Feitosa, B. Holanda, Y. Lima and C. T. Magalhães, Treinamento Cone Sul 2008. Fortaleza, Ed. Realce, 2010.

[3] D. Fomin, A. Kirichenko, Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991, MathPro Press, Westford, MA, 1994.

[4] D. Fomin, S. Genkin and I. Itenberg, Mathematical Circles, Mathematical Words, Vol. 7, American Mathematical Society, Boston, MA, 1966.

[5] I. Niven, H. S. Zuckerman, and H. L. Montgomery, An Introduction to the Theory of Numbers.