Aula 2 - POT - Teoria dos Números - Nível III - Princípios

Fabio E. Brochero Martinez
Carlos Gustavo T. de A. Moreira   Nicolau C. Saldanha
Eduardo Tengan

2 de Julho de 2012

Princípios

Nesta aula apresentaremos alguns princípios fundamentais: o *Princípio da Indução Finita* e o *Princípio da Casa dos Pombos.* Esta é uma versão do capítulo 0 de [1].

0.1 Princípio da Indução Finita

Seja $P(n)$ uma propriedade do número natural n, por exemplo:

- n pode ser fatorado em um produto de números primos;
- $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
- a equação $2x + 3y = n$ admite solução com x e y inteiros positivos.

Uma maneira de provar que $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq n_0$ é utilizar o chamado *Princípio da Indução Finita* (PIF), que é um dos axiomas que caracterizam o conjunto dos números naturais. O PIF consiste em verificar duas coisas:

1. (Base da Indução) $P(n_0)$ é verdadeira e
2. (Passo Indutivo) Se $P(n)$ é verdadeira para algum número natural $n \geq n_0$, então $P(n+1)$ também é verdadeira.

Na base da indução, verificamos que a propriedade é válida para um valor inicial $n = n_0$. O passo indutivo consiste em mostrar como utilizar a validade da propriedade para um dado n (a chamada *hipótese de indução*) para provar a validade da mesma propriedade para o inteiro seguinte $n + 1$. Uma vez verificados a base e o passo indutivo, temos uma "cadeia de implicações"

$$\begin{aligned} P(n_0) \text{ é verdadeira (base)} &\overset{\substack{\text{passo}\\ \text{indutivo}}}{\Longrightarrow} P(n_0+1) \text{ é verdadeira} \\ &\overset{\substack{\text{passo}\\ \text{indutivo}}}{\Longrightarrow} P(n_0+2) \text{ é verdadeira} \\ &\overset{\substack{\text{passo}\\ \text{indutivo}}}{\Longrightarrow} P(n_0+3) \text{ é verdadeira} \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

de modo que $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq n_0$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 0.1. *Demonstrar que, para todo inteiro positivo n,*

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Solução: Observemos que $1=\frac{1\cdot 2}{2}$ donde a igualdade vale para $n=1$ (base da indução). Agora suponha que a igualdade valha para $n=k$ (hipótese de indução):

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

Somando $k+1$ a ambos lados da igualdade, obtemos

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

de modo que a igualdade também vale para $n=k+1$. Pelo PIF, a igualdade vale para todo número natural $n\geq 1$. □

Exemplo 0.2. *Demonstrar que, para todo número natural n,*

$$M_n=n(n^2-1)(3n+2)$$

é múltiplo de 24.

Solução: Veja que se $n=0$ então $M_0=0$, que é um múltiplo de 24 (base da indução).

Agora, suponhamos que para certo inteiro k o número M_k é divisível por 24 (hipótese de indução) e vamos mostrar que M_{k+1} também é divisível por 24 (passo indutivo). Calculamos primeiramente a diferença

$$\begin{aligned}M_{k+1}-M_k&=(k+1)\big((k+1)^2-1\big)\big(3(k+1)+2\big)-k(k^2-1)(3k+2)\\&=k(k+1)[(k+2)(3k+5)-(k-1)(3k+2)]\\&=12k(k+1)^2.\end{aligned}$$

Um dos números naturais consecutivos k e $k+1$ é par donde $k(k+1)^2$ é sempre par e $12k(k+1)^2$ é divisível por 24. Por hipótese de indução, M_k é divisível por 24 e temos portanto que $M_{k+1}=M_k+12k(k+1)^2$ também é divisível por 24, como se queria demonstrar. □

Uma variante do PIF é a seguinte versão (às vezes apelidada de *princípio de indução forte* ou *princípio de indução completa*), em que se deve mostrar

1. (Base da Indução) $P(n_0)$ é verdadeira e
2. (Passo Indutivo) Se $P(k)$ é verdadeira para todo natural k tal que $n_0\leq k\leq n$, então $P(n+1)$ também é verdadeira.

Exemplo 0.3. *A* sequência de Fibonacci F_n *é a sequência definida recursivamente por*

$$F_0=0,\quad F_1=1\quad e\quad F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\ \text{para}\ n\geq 2$$

Assim, seus primeiros termos são

$$F_0 = 0, \ F_1 = 1, \ F_2 = 1, \ F_3 = 2, \ F_4 = 3, \ F_5 = 5, \ F_6 = 8, \ \ldots$$

Mostre que

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

onde $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *e* $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ *são as raízes de* $x^2 = x + 1$.

Solução: Temos que $F_0 = \frac{\alpha^0 - \beta^0}{\alpha - \beta} = 0$ e $F_1 = \frac{\alpha^1 - \beta^1}{\alpha - \beta} = 1$ (base de indução). Agora seja $n \geq 1$ e suponha que $F_k = \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta}$ para todo k com $0 \leq k \leq n$ (hipótese de indução). Assim,

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\ &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{(\alpha^n + \alpha^{n-1}) - (\beta^n + \beta^{n-1})}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

pois $\alpha^2 = \alpha + 1 \implies \alpha^{n+1} = \alpha^n + \alpha^{n-1}$ e analogamente $\beta^{n+1} = \beta^n + \beta^{n-1}$.

Observe que, neste exemplo, como o passo indutivo utiliza os valores de dois termos anteriores da sequência de Fibonacci, a base requer verificar a fórmula para os dois termos iniciais F_0 e F_1 e não apenas para o primeiro termo. □

Exemplo 0.4. *Prove usando o princípio da indução matemática que*

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Solução: Vejamos que se $n = 1$ temos que $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Suponhamos que para um certo n temos

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Para o caso seguinte temos que

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n \cdot (2n+2)} \overset{H.I.}{<} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2},$$

e assim basta mostrar que $\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \dfrac{2n+1}{2n+2} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2n+3}}$. Isso sua vez é equivalente a mostrar que $\dfrac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2n+3}}$, mas, elevando ao quadrado, também vai ser equivalente a mostrar $(2n+1)(2n+3) \leq (2n+2)^2$, o que (expandindo os dois lados) é claramente verdadeiro, o que conclui a prova. □

Exemplo 0.5. *Demonstrar que, para quaisquer naturais* $n \geq m$, *o coeficiente binomial*

$$\binom{n}{m} \overset{\text{def}}{=} \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

é inteiro.

Solução: Procederemos por indução sobre a soma $m+n$. Se $m+n=0$ então $m=n=0$ e $\binom{0}{0}=1$ é inteiro (base de indução). Para o passo indutivo, observe primeiramente que para $0<m<n$ temos a seguinte identidade de binomiais

$$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1}$$

que segue diretamente das definições:

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1}&=\frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!}+\frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}\\&=\frac{\big((n-m)+m\big)(n-1)!}{m!(n-m)!}=\binom{n}{m}.\end{aligned}$$

Agora suponhamos que $\binom{n}{m}$ é inteiro para $m+n\leq k$ (hipótese de indução). Note que podemos supor também que $0<m<n$, já que se $m=n$ ou $m=0$ temos $\binom{n}{m}=1$ e o resultado vale trivialmente. Assim, se $m+n=k+1$, temos que $\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1}$ é inteiro também pois cada somando da direita é inteiro pela hipótese de indução. □

Exemplo 0.6. *Sejam $x_1,\ldots,x_n$ números reais positivos. Neste exercício vamos provar que*

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}.$$

Tal desigualdade é conhecida como desigualdade das médias aritmética e geométrica.

(a) Utilize o PIF para mostrar a desigualdade das médias para $n=2^k$.

(b) Sejam $x_1,\ldots,x_n$ reais positivos fixados e $A=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ a média aritmética destes números. Suponha que a desigualdade valha para $n+1$ números reais positivos quaisquer; aplicando-a para $x_1,\ldots,x_n,A$, conclua que a desigualdade vale também para quaisquer n números reais positivos.

(c) Combinando os itens anteriores, prove a desigualdade para todo n natural.

Solução: Primeiro observemos que se $a,b>0$ então

$$0\leq(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=(a+b)^2-4ab,$$

logo $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$, assim a desigualdade vale para $n=2$. Agora mostremos que se a desigualdade vale para k então a desigualdade vale para $2k$. De fato

$$\begin{aligned}\frac{x_1+\cdots+x_{2k}}{2k}&=\frac{\frac{x_1+\cdots+x_k}{k}+\frac{x_{k+1}+\cdots+x_{2k}}{k}}{2}\\&\geq\frac{\sqrt[k]{x_1\cdots x_k}+\sqrt[k]{x_{k+1}\cdots x_{2k}}}{2}\\&\geq\sqrt{\sqrt[k]{x_1\cdots x_k}\sqrt[k]{x_{k+1}\cdots x_{2k}}}=\sqrt[2k]{x_1\cdots x_{2k}}.\end{aligned}$$

Assim a desigualdade é verdadeira para $2,4,8,\ldots,2^n,\ldots$. Suponhamos que a desigualdade é verdadeira para $n+1$, e sejam $x_1,\ldots,x_n$ reais positivos, definamos $A = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ e $G = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$, temos que mostrar que $A \geq G$, mas de fato sabemos que

$$A = \frac{x_1 + \cdots + x_n + A}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{x_1 \cdots x_n A} = G^{\frac{n}{n+1}} A^{\frac{1}{n+1}}.$$

Daqui facilmente concluímos o que queríamos demonstrar. $\square$

Um terceiro disfarce do PIF é o chamado *princípio da boa ordenação* (PBO) dos números naturais, que afirma que todo subconjunto A não vazio de $\mathbb{N}$ tem um elemento mínimo. (Você sabe dizer por que o princípio da boa ordem não vale para o conjunto $\mathbb{Z}$ de todos os inteiros?)

Vejamos a equivalência entre os dois princípios. Assuma primeiramente o PBO e seja $P(n)$ uma propriedade para a qual $P(0)$ é verdadeira e $P(n)$ verdadeira implica $P(n+1)$ verdadeira. Seja B o conjunto dos n tais que $P(n)$ é falsa; devemos mostrar que $B = \emptyset$. Suponha que não; pelo PBO o conjunto B possui um menor elemento b. Como $0 \notin B$ (pois $P(0)$ é verdadeira por hipótese) temos que $b \geq 1$ e assim $b - 1 \in \mathbb{N}$ e pela minimalidade de b temos que $b - 1 \notin B$, ou seja, $P(b-1)$ é verdadeira. Mas por hipótese temos então que $P(b)$ também é verdadeira, o que é um absurdo, logo $B = \emptyset$.

Assuma agora o PIF e seja $A \subset \mathbb{N}$ um subconjunto não vazio. Defina agora o conjunto $B = \{b \in \mathbb{N} \mid a \notin A \text{ para todo } a < b\}$. Trivialmente $0 \in B$. Afirmamos que existe $k \in B$ tal que $k+1 \notin B$ e nesse caso k será o menor elemento de A. De fato, se isto não acontecer, teremos que $0 \in B$ e $k \in B$ implica que $k+1 \in B$. Logo, pelo PIF, $B = \mathbb{N}$ e $A = \emptyset$, o que é absurdo.

Exemplo 0.7. *Demonstrar que toda função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ monótona não-crescente (isto é, $n \leq m \implies f(n) \geq f(m)$) é constante a partir de um certo número natural.*

Solução: Seja $A \subset \mathbb{N}$ a imagem de f. Pelo PBO, tal conjunto possui elemento mínimo a_0. Seja n_0 um natural tal que $f(n_0) = a_0$. Como a função é monótona não-crescente então para todo $n \geq n_0$ temos que $f(n) \leq f(n_0)$, mas pela definição de a_0 temos $f(n) \geq a_0$. Logo $f(n) = a_0$ para todo $n \geq n_0$, como queríamos demonstrar. $\square$

Observação 0.8. *Dado um conjunto S, uma relação $\prec$ em S é chamada de* ordem parcial *em S se ela satisfaz os seguintes axiomas:*

1. *(Reflexividade) $a \prec a$ para todo $a \in S$.*
2. *(Anti-simetria) se $a \prec b$ e $b \prec a$ então $a = b$.*
3. *(Transitividade) se $a \prec b$ e $b \prec c$ então $a \prec c$.*

Dizemos que $\prec$ é uma ordem total *se, dados quaisquer $a, b \in S$, ou $a \prec b$ ou $b \prec a$. Uma ordem total $\prec$ em S é uma* boa ordem *se todo subconjunto A de S possui um elemento mínimo, isto é, um elemento $a \in A$ tal que $a \prec b$ para todo $b \in A$. É possível demonstrar que para todo conjunto S podemos definir uma ordem total em S que é uma boa ordem. Este fato usa o axioma da escolha (e na verdade é equivalente a ele) e está fora do propósito deste livro. Veja por exemplo [3].*

Problemas Propostos

0.1. *Demonstrar por indução que para $n \geq 1$ natural*

(a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

(c) $(1^5 + 2^5 + \cdots + n^5) + (1^7 + 2^7 + \cdots + n^7) = 2(1 + 2 + \cdots + n)^4$.

(d) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx = \dfrac{\operatorname{sen} \frac{(n+1)x}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{nx}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}$.

0.2. *Seja F_n o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci. Demonstrar que para todo natural $n \geq 1$ temos*

(a) $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$.

(b) $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$.

(d) $\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots = F_{n+1}$, *onde na soma interpretamos* $\binom{m}{k} = 0$ *se* $k > m$.

0.3. *Demonstrar que*

(a) $n^3 - n$ *é um múltiplo de* 6 *para todo natural* n.

(b) $5^n - 1$ *é múltiplo de* 24 *para todo número natural* n *par.*

(c) $2^n + 1$ *é múltiplo de* 3 *para todo natural ímpar* n.

0.4. *Mostre que para todo natural $n \geq 4$*

(a) $2^n < n!$.

(b) $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$.

0.5. *Dado um inteiro positivo n, definimos $T(n, 1) = n$ e, para todo $k \geq 1$, $T(n, k+1) = n^{T(n,k)}$. Prove que existe $c \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geq 1$, $T(2010, k) < T(2, k + c)$. Determine o menor inteiro positivo c com essa propriedade.*

0.6. *Mostre que para todo n e k inteiros positivos*

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}.$$

0.7. *Demonstre a fórmula do* binômio de Newton *para n natural:*

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n.$$

0.8. *Encontrar com demonstração uma expressão para o multinômio*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$$

em termos dos coeficientes multinomiais

$$\binom{n}{i_1, \ldots, i_k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{i_1! \cdots i_k!}$$

onde $i_1 + \cdots + i_k = n$.

0.9. *Considere* n *retas em posição geral em um plano, isto é, sem que haja duas retas paralelas ou três retas concorrentes em um mesmo ponto.*

(a) Determine em função de n *o número de regiões em que as retas dividem o plano.*

(b) Demonstre que é possível colorir essas regiões com duas cores sem que duas regiões vizinhas tenham a mesma cor (duas regiões são vizinhas se elas possuem um segmento de reta em comum).

0.10. *Demonstrar que para cada número natural* n *existe um número natural* M *satisfazendo simultaneamente as seguintes duas condições:*

(i) M *possui* n *dígitos pertencentes ao conjunto* $\{1, 2\}$.

(ii) M *é divisível por* 2^n.

0.11 (IMO1987)**.** *Mostre que não existe uma função* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tal que* $f(f(n)) = n + 1987$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

0.2 Princípio da Casa dos Pombos

É intuitivamente claro que se colocamos $n + 1$ objetos em n gavetas então haverá ao menos uma gaveta com mais de um objeto. Isto é exatamente o que afirma o chamado *Princípio da Casa dos Pombos* (PCP) ou *Princípio das Gavetas de Dirichlet*: se temos $kn + 1$ pombos e n casinhas, então existirá uma casinha onde haverá pelo menos $k + 1$ pombos. De fato, se em todas as casas houvesse no máximo k pombos, então o número de pombos não poderia ultrapassar kn.

O PCP parece bastante inocente, mas tem muitas aplicações interessantes, especialmente em argumentos de *existência* em que não se determina o objeto procurado explicitamente. Como exemplos falam mais do que 10^3 palavras, vejamos alguns.

Exemplo 0.9. *Do conjunto* $A = \{1, 2, \ldots, 99, 100\}$*, escolhemos ao acaso 51 números. Demonstrar que entre os números escolhidos sempre existem dois que são consecutivos.*

SOLUÇÃO: Para provar isto, primeiro escolhamos gavetas adequadas ao problema. Distribuímos os números de A em 50 "gavetas" assim construídas:

$$\{1, 2\} \quad \{3, 4\} \quad \{5, 6\} \quad \cdots \quad \{99, 100\}$$

Como há 50 gavetas das quais retiramos 51 números, sempre existirá uma gaveta da qual escolhemos dois números e estes, graças à nossa construção, serão consecutivos. Podemos generalizar este resultado considerando os números $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ e escolhendo dentre eles $n + 1$ números ao acaso. $\square$

Exemplo 0.10. *Do conjunto $A = \{1, 2, \ldots, 99, 100\}$, escolhemos ao acaso 55 números. Demonstrar que entre os números escolhidos sempre existem dois tais que sua diferença é 9.*

SOLUÇÃO: Como no exemplo anterior o problema é descobrir como formar as gavetas. Consideremos as gavetas numeradas $0, 1, 2, \ldots, 8$, onde o número n é colocado na gaveta i se, e só se, o resto na divisão de n por 9 é i. Como escolhemos $55 = 9 \times 6 + 1$ números, pelo PCP existirá uma gaveta j na qual há 7 ou mais números escolhidos. Mas em cada gaveta há no máximo 12 números (por exemplo, o conjunto $\{1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 100\}$ possui exatamente 12 elementos). Segue, como no problema anterior, que existirão dois números que serão "consecutivos" em tal conjunto, isto é, dois números cuja diferença é 9. $\square$

Exemplo 0.11. *Demonstrar que qualquer conjunto de n inteiros possui um subconjunto não vazio cuja soma dos elementos é divisível por n.*

SOLUÇÃO: Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ os elementos do conjunto, e definamos as "somas parciais" $s_j = a_1 + \cdots + a_j$ para $j = 1, \ldots, n$. Se algum dos s_j é divisível por n o problema fica resolvido. Se nenhum é divisível por n, então os possíveis restos na divisão por n são $1, 2, \ldots, n-1$ e como há n somas parciais pelo PCP existem duas s_j e s_k com $j < k$ que deixam o mesmo. Portanto $s_k - s_j = a_{j+1} + \cdots + a_k$ é divisível por n e $\{a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_k\}$ é o subconjunto procurado.

Por outro lado, observemos que n é a quantidade mínima de elementos para que se verifique tal condição, no sentido em que existem conjuntos A com $n-1$ elementos tais que a soma dos elementos de todo subconjunto não vazio de A não é divisível por n. Por exemplo, $A = \{1, n+1, 2n+1, \ldots, (n-1)n + 1\}$ é um destes conjuntos (verifique!). $\square$

Exemplo 0.12. *Seja α um número real. Demonstrar que, para todo inteiro $n \geq 2$, existe um inteiro $0 < k < n$ tal que o módulo da diferença entre $k\alpha$ e seu inteiro mais próximo é menor ou igual a $\frac{1}{n}$.*

SOLUÇÃO: Vamos denotar por $\{x\}$ a *parte fracionária* do número real x, isto é, o único real que satisfaz $0 \leq \{x\} < 1$ e $x = m + \{x\}$ para algum $m \in \mathbb{Z}$.

Considere $\{k\alpha\}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Particione o intervalo $[0, 1)$ em n partes de tamanho $\frac{1}{n}$:

$$[0,1) = \Big[0, \frac{1}{n}\Big) \cup \Big[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\Big) \cup \Big[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\Big) \cup \cdots \Big[\frac{n-1}{n}, 1\Big)$$

Se $\{k\alpha\} \in [0, \frac{1}{n})$ ou $\{k\alpha\} \in [\frac{n-1}{n}, 1)$ para algum $k = 1, \ldots, n-1$, o problema acabou. Caso contrário, pelo PCP haverá duas partes fracionárias $\{j\alpha\}$ e $\{k\alpha\}$

com $1 \le j < k \le n-1$ pertencentes a um mesmo intervalinho dentre os $n-2$ restantes. Sendo $x = (k-j)\alpha$, teremos

$$\{x\} = \begin{cases} \{k\alpha\} - \{j\alpha\} & \text{se } \{k\alpha\} \ge \{j\alpha\} \\ 1 + \{k\alpha\} - \{j\alpha\} & \text{se } \{k\alpha\} < \{j\alpha\} \end{cases}$$

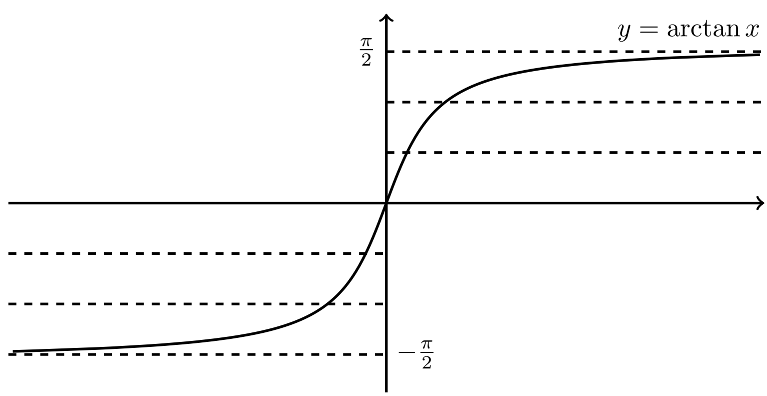
e portanto $\{x\} \in [0, \frac{1}{n})$ ou $\{x\} \in [\frac{n-1}{n}, 1)$, assim $k-j$ satisfaz as condições do problema. □

Exemplo 0.13. *Demonstrar que dados 7 números reais sempre é possível escolher 2 deles, digamos a e b, tais que*

$$\left|\frac{a-b}{1+ab}\right| < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Solução: Vejamos inicialmente que a função $y = \tan x$ é crescente entre $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, e além disso, para cada real r existe um único ângulo θ neste intervalo com $r = \tan\theta$.

Portanto, dados os 7 números reais, a cada um deles podemos fazer corresponder um ângulo no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, e dividindo tal intervalo em 6 partes iguais, i.e., em 6 intervalos de comprimento $\frac{\pi}{6}$, abertos à esquerda, existirão 2 ângulos θ e γ que estejam no mesmo intervalo, e portanto, $|\theta - \gamma| < \frac{\pi}{6}$.



Podemos supor sem perda de generalidade que $a = \tan\theta > \tan\gamma = b$ e como a função tangente é crescente,

$$\frac{a-b}{1+ab} = \frac{\tan\theta - \tan\gamma}{1 + \tan\theta\tan\gamma} = \tan(\theta - \gamma) < \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

como queríamos demonstrar. □

Problemas Propostos

0.12. *Escolhem-se 7 pontos no interior de um retângulo de dimensões 2×3. Demonstrar que sempre é possível encontrar dois pontos tal que sua distância é menor ou igual a $\sqrt{2}$.*

0.13. *Escolhem-se 9 pontos no interior de um quadrado de lado* 1. *Demonstrar que é possível escolher 3 deles de tal forma que a área do triângulo que formam é menor ou igual a* $\frac{1}{8}$.

0.14. *Dadas 6 pessoas numa festa, demonstrar que necessariamente existem 3 pessoas que se conhecem mutuamente ou 3 pessoas que não se conhecem mutuamente. Suponha que a relação de conhecer é simétrica. Este é um caso particular do teorema de Ramsey, veja por exemplo [2].*

0.15. *Do conjunto* $A = \{1, 2, \ldots, 99, 100\}$ *escolhemos 51 números. Demonstrar que, entre os 51 números escolhidos, existem dois tais que um é múltiplo do outro.*

0.16. *Dado um número irracional* u, *demonstrar que sempre é possível encontrar infinitos números racionais* $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, *de tal forma que*

$$\left| u - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

0.17 (IMO1985)**.** *Dado um conjunto* M *com 1985 inteiros positivos distintos, nenhum dos quais tem divisores primos maiores do que* 23, *mostre que há 4 elementos em* M *cujo produto é uma quarta potência.*

0.18 (OIbM1998)**.** *Determinar o mínimo valor de* n *para o qual, de todo subconjunto de* $\{1, 2, \ldots, 999\}$ *com* n *elementos, é possível selecionar quatro inteiros diferentes* a, b, c, d *tais que* $a + 2b + 3c = d$.

0.19. *Demonstrar que de qualquer conjunto de* $2^{n+1} - 1$ *números inteiros positivos é possível escolher* 2^n *elementos de tal forma que sua soma é divisível por* 2^n.

0.20 (IMO2001)**.** *Sejam* $n_1, n_2, \ldots, n_m$ *inteiros com* m *ímpar. Denotemos por* $x = (x_1, \ldots, x_m)$ *uma permutação dos inteiros* $1, 2, \ldots, m$, *e definamos* $f(x) = x_1 n_1 + \cdots + x_m n_m$. *Demonstre que existem duas permutações* a *e* b *tais que* $f(a) - f(b)$ *é divisível por* $m!$.

0.21 (IMO1991)**.** *Seja* $S = \{1, 2, \ldots, 280\}$. *Encontrar o menor inteiro* n *para o qual todo subconjunto de* S *com* n *elementos contém cinco números que são dois a dois primos entre si.*

0.22 (Erdős)**.** *Mostrar que toda a sequência com* n^2+1 *números reais contém ou uma subsequência crescente com* $n+1$ *termos ou uma subsequência decrescente com* $n + 1$ *termos.*

0.23. *Pintamos todos os pontos do plano de azul, verde ou preto. Mostrar que existe no plano um retângulo cujos vértices têm todos a mesma cor.*

Bibliografia

[1] F. E. Brochero Martinez, C. G. Moreira, N. C. Saldanha, E. Tengan - Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro - Projeto Euclides, IMPA, 2010.

[2] C. G. Moreira, *O teorema de Ramsey*, Revista Eureka! 6, 23–29.

[3] A. Shen e N. K. Vereshchagin, *Basic Set Theory*, AMS, 2002.

Dicas e Soluções

0.2 (d) Use a identidade $\binom{n-k}{k} + \binom{n-k}{k+1} = \binom{n+1-k}{k+1}$.

0.3 (b) Use a igualdade $5^{n+2} - 1 = 25 \cdot 5^n - 1 = 24 \cdot 5^n + 5^n - 1$.

0.5 Vamos ver que $c = 3$ funciona. Para isso, vamos mostrar por indução algo ligeramente mais forte que o pedido: para todo $k \geq 1$, temos $12 \cdot T(2010, k) < T(2, k+3)$. De fato, para $k = 1$, temos $24120 = 12 \cdot T(2010, 1) < 65536 = T(2, 4)$, e, se vale $12 \cdot T(2010, k) < T(2, k+3)$ para um certo $k \geq 1$, teremos

$$T(2, k+4) = 2^{T(2,k+3)} > 2^{12 \cdot T(2010,k)} = 4096^{T(2010,k)} =$$

$$= 2^{T(2010,k)} \cdot 2048^{T(2010,k)} > 12 \cdot 2010^{T(2010,k)} = 12 \cdot T(2010, k+1),$$

como queríamos.

Note que $T(2010, 1) = 2010 > 16 = T(2, 3)$, donde necessariamente $c > 2$.

0.8 Podemos provar por indução em n que

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\substack{i_j \geq 0, \forall j \leq k \\ i_1 + \cdots + i_k = n}} \binom{n}{i_1, \ldots, i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_k^{i_k},$$

usando a identidade

$$\binom{n}{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k} = \sum_{j=1}^{k} \binom{n-1}{i_1, \ldots, i_{j-1}, i_j - 1, i_{j+1}, \ldots, i_k},$$

para $i_1 + \cdots + i_k = n$.

0.10 Denotando um tal M por M_n, tome $M_{n+1} = 2 \cdot 10^n + M_n$, caso M_n seja divisível por 2^{n+1}, e $M_{n+1} = 10^n + M_n$, caso contrário.

0.11 Considere a função $g : \{0, 1, \dots, 1986\} \to \{0, 1, \dots, 1986\}$ em que $g(k)$ é o resto da divisão de $f(k)$ por 1987. Mostre que $g(g(k)) = k$ para todo k, e conclua que existe $a \in \{0, 1, \dots, 1986\}$ tal que $g(a) = a$. Use isso para chegar a uma contradição, considerando a restrição de f aos naturais que deixam resto a quando divididos por 1987.

0.12 Divida o retângulo como a união de 6 quadrados de lado 1, e observe que dois dos 7 pontos devem estar num mesmo quadrado.

0.14 Considere uma das pessoas, que chamaremos de P. Como há 5 outras pessoas na festa, ou há 3 outras pessoas que P conhece ou há 3 outras pessoas que P não conhece. Suponha a primeira alternativa, sem perda de generalidade. Se há duas dessas 3 pessoas que P conhece que se conhecem, junto com P teríamos 3 pessoas que se conhecem mutuamente. Caso contrário, essas 3 pessoas que P conhece são 3 pessoas que se desconhecem mutuamente.

0.15 Escreve cada um desses 51 números como $2^k \cdot b$, com b ímpar. Há apenas 50 possibilidades para b, de modo que a dois desses 51 números será associado um mesmo b e portanto um será múltiplo do outro.

0.16 Use o resultado do Exemplo 0.12.

0.17 Os possíveis fatores primos dos elementos de M são os seguintes 9 primos: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$. Dado um subconjunto de M com mais de $512 = 2^9$ elementos, haverá dois deles em cuja fatoração prima as paridades dos expoentes de cada primo coincidem, e portanto seu produto será um quadrado perfeito. Usando repetidamente esse argumento, obtemos 737 pares disjuntos de ememeentos de M tais que o produto dos elementos de cada par é um quadrado perfeito (de fato, se retirarmos de M menos de 737 pares de elementos distintos, sobram pelo menos $1985 - 2 \cdot 736 = 513$ elementos, dos quais podemos obter um novo par). Agora, como há mais de 512 pares em que o produto dos elementos é um quadrado perfeito, e os primos que dividem cada um desses produtos estão entre os 9 primos listados acima, haverá dois desses pares para os quais, se tomarmos os expoentes de cada um desses primos no produto dos termos do par e os dividirmos por 2, as paridades dos resultados coincidirão, e portanto o produto dos 4 termos desses dois pares será uma quarta potência.

0.18 Note que, se $X = \{166, 167, \dots, 999\}$, então X tem 834 elementos e $a + 2b + 3c \geq 168 + 2 \cdot 167 + 3 \cdot 166 > 999$ para quaisquer elementos distintos a, b, c de X. A resposta é 835 - de fato, se o conjunto tem pelo menos 835 elementos e c e b são o menor e o segundo menor elementos do conjunto, então $3c + 2b \leq 3 \cdot 165 + 2 \cdot 166 = 827$ e, se $1 \leq m \leq 999 - (3c + 2b)$, $m \notin \{b, c\}$, caso o conjunto não satisfizesse as condições do enunciado, teríamos m ou $3c + 2b + m$ fora do conjunto, o qual teria então pelo menos $999 - 827 - 2 = 170$ elementos de $\{1, 2, \dots, 999\}$ fora dele, absurdo.

0.20 Consideremos os restos das divisões de $f(x)$ por $m!$. Se $f(a)$ e $f(b)$ deixam restos iguais, então $f(a) - f(b)$ será múltiplo de $m!$. Caso os restos sejam todos diferentes, como há $m!$ permutações x e $m!$ possíveis restos, todos os restos são atingidos uma vez, e a soma de todos os restos é $0+1+\cdots+(m!-1) = m!(m!-1)/2$, que deixa resto $m!/2$ quando dividida por $m!$. Mas a soma de todos os $f(x)$ é $(1+2+\cdots+m)\cdot(m-1)!\cdot(n_1+\cdots+n_m) = ((n+1+\cdots+n_m).m!.(m+1)/2$, que é múltiplo de $m!$, pois $(m+1)/2$ é inteiro, absurdo.

0.21 A resposta é 217. Considere o conjunto dos inteiros positivos entre 1 e 280 que são múltiplos de 2, 3, 5 ou 7. Este conjunto tem 216 membros, e, dados 5 de seus elementos, dois deles terão um fator comum pertencente a $\{2, 3, 5, 7\}$.

Sejam agora $A_1 = \{1\} \cup \{p \text{ primo} | 2 \leq p < 280\}$, $A_2 = \{2\cdot 41, 3\cdot 37, 5\cdot 31, 7\cdot 29, 11\cdot 23, 13\cdot 19\}$, $A_3 = \{2\cdot 37, 3\cdot 31, 5\cdot 29, 7\cdot 23, 11\cdot 19, 13\cdot 17\}$, $A_4 = \{2\cdot 31, 3\cdot 29, 5\cdot 23, 7\cdot 19, 11\cdot 17, 13^2\}$, $A_5 = \{2\cdot 29, 3\cdot 23, 5\cdot 19, 7\cdot 17, 11\cdot 13\}$, e $A_6 = \{2\cdot 23, 3\cdot 19, 5\cdot 17, 7\cdot 13, 11^2\}$. Os elementos de cada conjunto A_i são primos entre si dois a dois. A_1 tem 60 elementos, A_2, A_3, e A_4 têm 6 elementos cada e A_5 e A_6 têm 5 elementos cada. Assim, os conjuntos A_i têm, no total, 88 elementos. Se um subconjunto X de $\{1, 2, \ldots, 280\}$ tem 217 elementos, terá pelo menos 25 elementos em comum com a união dos 6 conjuntos A_i, e, como $25 > 4\cdot 6$, existe $i \leq 6$ tal que X tem pelo menos 5 elementos em comum com A_i, os quais, por construção dos A_i, são necessariamente primos entre si dois a dois.

0.22 Considere, para cada k com $1 \leq k \leq n^2+1$, o tamanho $f(k)$ da maior subsequência monótona não-crescente da sequência dada cujo primeiro termo é o $k-$ésimo termo da sequência. Se, para algum k, $f(k) \geq n+1$, o problema está resolvido. Senão, $f(k)$ pode assumir apenas os valores $1, 2, \ldots, n$, e portanto existem $n+1$ valores $k_1 < k_2 < \cdots < k_{n+1}$ com $f(k_1) = f(k_2) = \cdots = f(k_{n+1})$. Nesse caso, os termos da sequência de índices $k_1, k_2, \ldots, k_{n+1}$ formarão uma subsequência crescente.