Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Teoria dos Números - Nível 3

Carlos Gustavo Moreira

Aula 13

Frações Contínuas e aproximações de números reais por racionais

A teoria de frações contínuas é um dos mais belos assuntos da Matemática elementar, sendo ainda hoje tema de pesquisa.

Nas inclusões $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, a passagem de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$ é sem dúvida a mais complicada conceitualmente e a representação de um número real está diretamente ligada à própria noção de número real.

De fato, o conceito de número natural é quase um conceito primitivo. Já um número inteiro é um número natural com um sinal que pode ser $+$ ou $-$, e um número racional é a razão entre um número inteiro e um natural não nulo. Por outro lado, dizer o que é um número real é tarefa bem mais complicada, mas há coisas que podemos dizer sobre eles. Uma propriedade essencial de $\mathbb{R}$ é que todo número real pode ser bem aproximado por números racionais. Efetivamente, dado $x \in \mathbb{R}$, existe $k = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \le x - k < 1$. Podemos escrever a representação decimal de

$$x - k = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots, \qquad a_i \in \{0, 1, \dots, 9\},$$

o que significa que se $r_n = a_n + 10 \cdot a_{n-1} + 100 \cdot a_{n-2} + \cdots + 10^{n-1} \cdot a_1$, então $\frac{r_n}{10^n} \le x - k < \frac{r_n+1}{10^n}$, e portanto $k + \frac{r_n}{10^n}$ é uma boa aproximação racional de x, no sentido de que o erro $\left|x - \left(k + \frac{r_n}{10^n}\right)\right|$ é menor do que $\frac{1}{10^n}$, que é um número bem pequeno se n for grande. A representação decimal de um número real fornece pois uma sequência de aproximações por racionais cujos denominadores são potências de 10.

Dado qualquer $x \in \mathbb{R}$ e q natural não nulo existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{p}{q} \le x < \frac{p+1}{q}$ (basta tomar $p = \lfloor qx \rfloor$), e portanto $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}$ e $\left|x - \frac{p+1}{q}\right| \le \frac{1}{q}$. Em particular há aproximações de x por racionais com denominador q com erro menor do que $\frac{1}{q}$. A representação decimal de x equivale a dar essas aproximações para os denominadores q que são potências de 10, e tem méritos como sua praticidade para efetuar cálculos que a fazem a mais popular das representações dos números reais. Por outro lado, envolve a escolha arbitrária da base 10, e oculta frequentemente aproximações racionais de x muito mais eficientes do que as que exibe. Por exemplo,

$$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| < \frac{1}{700} < \left|\pi - \frac{314}{100}\right| \quad \text{e} \quad \left|\pi - \frac{355}{113}\right| < \frac{1}{3000000} < \left|\pi - \frac{3141592}{1000000}\right|$$

mostram que $\frac{22}{7}$ e $\frac{355}{113}$ são melhores aproximações de π que aproximações decimais com denominadores muito maiores, e de fato são aproximações muito mais espetaculares do que se podia esperar.

O objetivo desta seção é apresentar uma outra maneira de representar números reais, a representação por *frações contínuas*, que sempre fornece aproximações racionais surpreendentemente boas, e de fato fornece todas as aproximações excepcionalmente boas, além de ser natural e conceitualmente simples.

Definimos recursivamente

$$\alpha_0 = x, \quad a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$$
$$\text{e, se } \alpha_n \notin \mathbb{Z}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

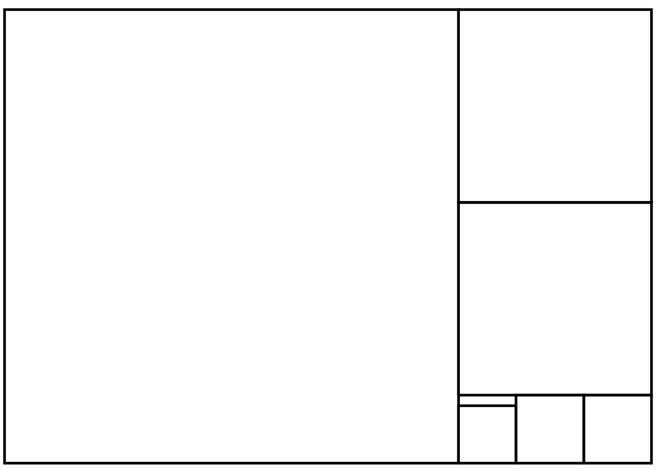
Se, para algum n, $\alpha_n = a_n$ temos

$$x = \alpha_0 = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] \stackrel{\text{def}}{=} a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

Se não denotamos

$$x = [a_0; a_1, a_2, \dots] \stackrel{\text{def}}{=} a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}.$$

O sentido dessa última notação ficará claro mais tarde. A representação acima se chama *representação por frações contínuas de x*.



A figura dá uma interpretação geométrica para a representação de um número por frações contínuas. Enchemos um retângulo $1 \times x$ com quadrados de forma "gulosa", isto é, sempre colocando o maior quadrado possível dentro do espaço ainda livre. Os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ indicam o número de quadrados de cada tamanho. Na figura, se os lados do retangulo são $c < d$ então

$$d/c = [1; 2, 2, 1, ...]$$

pois temos $a_0 = 1$ quadrado grande, $a_1 = 2$ quadrados menores, $a_2 = 2$ quadrados ainda menores, $a_3 = 1$ quadrados ainda ainda menores, e um número grande não desenhado de quadrados ainda ainda ainda menores (a_4 é grande). Deixamos a verificação de que esta descrição geométrica corresponde à descrição algébrica acima a cargo do leitor.

Note que, se a representação por frações contínuas de x for finita então x é claramente racional.

Reciprocamente, se $x \in \mathbb{Q}$, sua representação será finita, e seus coeficientes a_n vêm do algoritmo de Euclides: se $x = p/q$ (com $q > 0$) temos

$$\begin{aligned}
p &= a_0 q + r_1 & 0 &\le r_1 < q \\
q &= a_1 r_1 + r_2 & 0 &\le r_2 < r_1 \\
r_1 &= a_2 r_2 + r_3 & 0 &\le r_3 < r_2 \\
&\vdots & &\vdots \\
r_{n-1} &= a_n r_n
\end{aligned}$$

Temos então

$$x = p/q = a_0 + r_1/q = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + r_2/r_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + r_3/r_2}}$$

$$= \cdots = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Isso já é uma vantagem da representação por frações contínuas (além de não depender de escolhas artificiais de base), pois o reconhecimento de racionais é mais simples que na representação decimal.

Seja $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Sejam $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}_{>0}$ primos entre si tais que $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $n \ge 0$. Esta fração $\frac{p_n}{q_n}$ é chamada de n-ésima *reduzida* ou *convergente* da fração contínua de x. O seguinte resultado será fundamental no que seguirá.

Proposição 1. *Dada uma sequência (finita ou infinita) $t_0, t_1, t_2, \cdots \in \mathbb{R}$ tal que $t_k > 0$, para todo $k \ge 1$, definimos sequências (x_m) e (y_m) por*
$x_0 = t_0$, $y_0 = 1$, $x_1 = t_0 t_1 + 1$, $y_1 = t_1$, $x_{m+2} = t_{m+2} x_{m+1} + x_m$, $y_{m+2} = t_{m+2} y_{m+1} + y_m$, para todo $m \ge 0$. Temos então

$$[t_0; t_1, t_2, \ldots, t_n] = t_0 + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{t_2 + \ddots + \cfrac{1}{t_n}}} = \frac{x_n}{y_n}, \forall n \ge 0.$$

Além disso, $x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1} = (-1)^n$*, para todo* $n \geq 0$.

Demonstração. A prova será por indução em n. Para $n = 0$ temos $[t_0] = t_0 = t_0/1 = x_0/y_0$. Para $n = 1$, temos $[t_0; t_1] = t_0 + 1/t_1 = \frac{t_0 t_1 + 1}{t_1} = x_1/y_1$ e, para $n = 2$, temos

$$[t_0; t_1, t_2] = t_0 + \frac{1}{t_1 + 1/t_2} = t_0 + \frac{t_2}{t_1 t_2 + 1} = \frac{t_0 t_1 t_2 + t_0 + t_2}{t_1 t_2 + 1}$$

$$= \frac{t_2(t_0 t_1 + 1) + t_0}{t_2 t_1 + 1} = \frac{t_2 x_1 + x_0}{t_2 y_1 + y_0} = \frac{x_2}{y_2}.$$

Suponha que a afirmação seja válida para n. Para $n + 1$ em lugar de n temos

$$\begin{aligned}[t_0; t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}] &= [t_0; t_1, t_2, \ldots, t_n + \frac{1}{t_{n+1}}] \\ &= \frac{\left(t_n + \frac{1}{t_{n+1}}\right) x_{n-1} + x_{n-2}}{\left(t_n + \frac{1}{t_{n+1}}\right) y_{n-1} + y_{n-2}} \\ &= \frac{t_{n+1}(t_n x_{n-1} + x_{n-2}) + x_{n-1}}{t_{n+1}(t_n y_{n-1} + y_{n-2}) + y_{n-1}} \\ &= \frac{t_{n+1} x_n + x_{n-1}}{t_{n+1} y_n + y_{n-1}} = \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}.\end{aligned}$$

Vamos agora mostrar, por indução, a segunda afirmação. Temos

$$x_1 y_0 - x_0 y_1 = (t_0 t_1 + 1) - t_0 t_1 = 1 = (-1)^0$$

e, se $x_{n+1} y_n - x_n y_{n+1} = (-1)^n$ para algum valor de n, então

$$\begin{aligned}x_{n+2} y_{n+1} - x_{n+1} y_{n+2} &= (t_{n+2} x_{n+1} + x_n) y_{n+1} - (t_{n+2} y_{n+1} + y_n) x_{n+1} \\ &= -(x_{n+1} y_n - x_n y_{n+1}) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}.\end{aligned}$$

□

Nos próximos resultados, $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ será um número real, e $(\frac{p_n}{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$, $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ será a sequência de reduzidas da fração contínua de x.

Corolário 2. *As sequências* (p_n) *e* (q_n) *satisfazem as recorrências*

$$p_{n+2} = a_{n+2} p_{n+1} + p_n \qquad e \qquad q_{n+2} = a_{n+2} q_{n+1} + q_n$$

para todo $n \geq 0$*, com* $p_0 = a_0$*,* $p_1 = a_0 a_1 + 1$*,* $q_0 = 1$ *e* $q_1 = a_1$*. Além disso,*

$$p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$$

para todo $n \geq 0$.

Demonstração. As sequências (p_n) e (q_n) definidas pelas recorrências acima satisfazem, pela proposição anterior, as igualdades

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] \text{ e } p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n, \forall n \geq 0.$$

Como $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que os p_n, q_n dados pelas recorrências acima são primos entre si. Além disso, também segue da recorrência que $q_n > 0, \forall n \geq 0$. Esses fatos implicam que $(\frac{p_n}{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência de reduzidas da fração contínua de x. □

Corolário 3. *Temos, para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$x = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}} \qquad e \qquad \alpha_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}}$$

Demonstração. A primeira igualdade segue da proposição anterior pois $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \alpha_n]$ e a segunda é consequência direta da primeira. □

Proposição 4. *Temos*

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2}$$

onde

$$\beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} = [0; a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1].$$

Em particular,

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2} < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}.$$

Demonstração. Pelo corolário anterior temos

$$\begin{aligned} x - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1}}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} \\ &= \frac{-(p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n)}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} = \frac{-(-1)^{n-1}}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} \\ &= \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + q_{n-1}/q_n)q_n^2} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2}. \end{aligned}$$

Em particular,

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2},$$

e, como $\lfloor \alpha_{n+1} \rfloor = a_{n+1}$ e $0 < \beta_{n+1} < 1$, segue que $a_{n+1} < \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} < a_{n+1} + 2$, o que implica a última afirmação.

A expansão de β_{n+1} como fração contínua segue de

$$\frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{q_{n-1}}{a_nq_{n-1} + q_{n-2}} \implies \frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{1}{a_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}}$$

aplicado recursivamente. □

Observação 5. *Como* $\lim_{n\to\infty} q_n = +\infty$ *(pois* (q_n) *é estritamente crescente), segue desta proposição que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = x,$$

o que permite recuperar x *a partir de* $a_0, a_1, a_2, \ldots,$ *e dá sentido à igualdade* $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *quando a fração contínua de* x *é infinita (i.e., quando* x *é irracional).*

Observação 6. *A proposição anterior implica que, para todo* α *irracional, a desigualdade* $|\alpha - p/q| < 1/q^2$ *tem infinitas soluções racionais* p/q*. Este fato é conhecido como o Teorema de Dirichlet.*

É interessante notar que, se $\alpha = r/s \in \mathbb{Q}$*, a desigualdade* $|\alpha - p/q| < 1/q^2$ *tem apenas um número finito de soluções racionais* p/q*. De fato,* $|r/s - p/q| < 1/q^2$ *equivale a* $|qr - ps| < s/q$*, o que implica que* $q \le s$*.*

A seguinte proposição mostra que os convergentes pares formam uma sequência crescente, e que os convergentes ímpares formam uma sequência decrescente. Além disso todos os convergentes ímpares são maiores do que todos os convergentes pares.

Proposição 7. *Para todo* $k \ge 0$*, temos*

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} \le \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} \le x \le \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} \le \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}.$$

Demonstração. O resultado segue dos seguintes fatos gerais. Para todo $n \ge 0$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{a_{n+2}p_{n+1} + p_n}{a_{n+2}q_{n+1} + q_n} - \frac{p_n}{q_n} \\ &= \frac{a_{n+2}(p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1})}{q_n(a_{n+2}q_{n+1} + q_n)} = \frac{(-1)^n a_{n+2}}{q_{n+2}q_n}\end{aligned}$$

é positivo para n par e negativo para n ímpar. Além disso, para todo $n \ge 0$, temos que $x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n}$ é positivo para n par e negativo para n ímpar. □

É possível provar (usando o chamado *princípio dos intervalos encaixados*) que, dados inteiros $a_0, a_1, a_2, \ldots$, com $a_k > 0, \forall k \ge 1$, existe um único número real α (que é irracional) cuja representação por frações contínuas é $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$.

Exemplo 8. *Temos*

- $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, \ldots]$, *portanto*

$$\frac{p_0}{q_0} = 3, \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113} \ldots$$

- $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots, 1, 1, 2n, \ldots]$

- $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$ *pois*

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}} = \cdots$$

- $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, \dots]$ *pois*

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} = \cdots$$

Isto prova em particular que $\sqrt{2}$ *e* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *são irracionais, pois suas frações contínuas são infinitas. Daí segue também que* $\sqrt{2} - 1 = [0; 2, 2, 2 \dots]$ *e* $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = [0; 1, 1, 1, \dots]$ *são pontos fixos da transformação de Gauss* g.

1 Reduzidas e Boas Aproximações

Teorema 9. *Temos, para todo* $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \le \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

Além disso,

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2q_n^2} \qquad \text{ou} \qquad \left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < \frac{1}{2q_{n+1}^2}.$$

Demonstração. O número x sempre pertence ao segmento de extremos $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ cujo comprimento é

$$\left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} \implies \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \le \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Além disso, se

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \ge \frac{1}{2q_n^2} \qquad \text{e} \qquad \left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \ge \frac{1}{2q_{n+1}^2},$$

então

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} = \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| + \left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \ge \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2} \implies q_{n+1} = q_n,$$

absurdo. □

Observação 10. *De fato* $\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{a_{n+1} q_n^2}$. *Quanto maior for* a_{n+1} *melhor será a aproximação* $\frac{p_n}{q_n}$ *de* x.

Teorema 11 (Hurwitz, Markov). *Para todo α irracional e todo inteiro $n \geq 1$, temos*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$$

para pelo menos um racional

$$\frac{p}{q} \in \left\{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right\}.$$

Em particular, a desigualdade acima tem infinitas soluções racionais p/q.

Demonstração. Suponha que o teorema seja falso. Então, pela proposição 4, existe α irracional, $n \geq 1$ com $\alpha_n + \beta_n \leq \sqrt{5}$, $\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \leq \sqrt{5}$ e $\alpha_{n+2} + \beta_{n+2} \leq \sqrt{5}$. Devemos portanto ter $a_{n+1} = a_{n+2} = 1$ já que claramente $a_k \leq 2$ para $k = n, n+1, n+2$ e se algum $a_k = 2$ com $k = n+1, n+2$, teríamos $a_k + \beta_k \geq 2 + \frac{1}{3} > \sqrt{5}$, absurdo.

Sejam $x = 1/\alpha_{n+2}$ e $y = \beta_{n+1}$. As desigualdades acima se traduzem em

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{y} \leq \sqrt{5}, \qquad 1 + x + y \leq \sqrt{5} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{1+y} \leq \sqrt{5}.$$

Temos

$$\begin{aligned} 1 + x + y \leq \sqrt{5} &\implies 1 + x \leq \sqrt{5} - y \\ &\implies \frac{1}{1+x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{\sqrt{5} - y} + \frac{1}{y} = \frac{\sqrt{5}}{y(\sqrt{5} - y)} \end{aligned}$$

e portanto $y(\sqrt{5} - y) \geq 1 \implies y \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Por outro lado temos

$$\begin{aligned} x \leq \sqrt{5} - 1 - y \implies \frac{1}{x} + \frac{1}{1+y} &\geq \frac{1}{\sqrt{5} - 1 - y} + \frac{1}{1+y} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{(1+y)(\sqrt{5} - 1 - y)} \end{aligned}$$

e portanto $(1+y)(\sqrt{5} - 1 - y) \geq 1 \implies y \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, e portanto devemos ter $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, o que é absurdo pois $y = \beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} \in \mathbb{Q}$. □

Observação 12. *Em particular provamos que $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$ tem infinitas soluções racionais $\frac{p}{q}$, para todo α irracional. O número $\sqrt{5}$ é o maior com essa propriedade. De fato, se*

$$\varepsilon > 0, \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q^2},$$

temos

$$\begin{aligned} &\left|q\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - p\right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q} \\ \implies &\left|q\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - p\right|\left|q\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - p\right| < \frac{\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q}\right|}{\sqrt{5}+\varepsilon}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|p^2 - pq - q^2| < \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} - \sqrt{5} \right| \Big/ (\sqrt{5} + \varepsilon).$$

Se q é grande, $1/q^2$ é pequeno, e $\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q}$ é muito próximo de 0, donde o lado direito da desigualdade é muito próximo de $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\varepsilon} < 1$, absurdo, pois $|p^2 - pq - q^2| \geq 1$, de fato se $p^2 - pq - q^2 = 0$ teríamos

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 - \left(\frac{p}{q}\right) - 1 = 0 \implies \frac{p}{q} \in \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\},$$

o que é absurdo, pois $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Outra maneira de ver que, para todo $\varepsilon > 0$, $\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q^2}$ tem apenas um número finito de soluções $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ é observar que as melhores aproximações racionais de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ são as reduzidas $\frac{p_n}{q_n}$ de sua fração contínua $[1; 1, 1, 1, \dots]$ (ver próxima seção), para as quais temos $\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1}+\beta_{n+1})q_n^2}$, com $\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}$ se aproximando cada vez mais de

$$[1; 1, 1, 1, \dots] + [0; 1, 1, 1, \dots] = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{5}.$$

2 Boas Aproximações são Reduzidas

O próximo teorema (e seu corolário 15) caracteriza as reduzidas em termos do erro reduzido da aproximação de x por p/q, o qual é, por definição, $|qx-p|$, a razão entre $|x-p/q|$ e o erro máximo da aproximação por falta com denominador q, que é $1/q$.

Teorema 13. *Para todo $p, q \in \mathbb{Z}$, com $0 < q < q_{n+1}$ temos*

$$|q_n x - p_n| \leq |qx - p|.$$

Além disso, se $0 < q < q_n$ a desigualdade acima é estrita.

Demonstração. Como $\text{mdc}(p_n, q_n) = 1$, temos que se $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ então $p = kp_n$ e $q = kq_n$ para algum inteiro $k \neq 0$ e neste caso o resultado é claro. Assim, podemos supor que $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ de modo que

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{qq_n} > \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

já que $q < q_{n+1}$. Assim, $\frac{p}{q}$ está fora do intervalo de extremos $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ e portanto

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \min\left\{ \left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right|, \left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \right\} \geq \frac{1}{qq_{n+1}}$$

o que implica

$$|qx - p| \geq \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_n x - p_n|.$$

Além disso, a igualdade só pode ocorrer se $x = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, donde $a_{n+1} \geq 2$, e $q_{n+1} > 2q_n$, pois numa fração contínua finita, como no algoritmo de Euclides, o último coeficiente a_n é sempre maior que 1. Nesse caso, se $q < q_n$, teremos

$$\begin{aligned}\left|x - \frac{p}{q}\right| &\geq \left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| - \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| \\ &\geq \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - q}{qq_n q_{n+1}} > \frac{1}{qq_{n+1}}\end{aligned}$$

o que implica

$$|qx - p| > \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_n x - p_n|.$$

$\square$

Corolário 14. *Para todo $q < q_n$,*

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|x - \frac{p}{q}\right|$$

Corolário 15. *Se $|qx - p| < |q'x - p'|$, para todo p' e $q' \leq q$ tais que $\frac{p}{q} \neq \frac{p'}{q'}$, então p/q é uma reduzida da fração contínua de x.*

Demonstração. Tome n tal que $q_n \leq q < q_{n+1}$. Pelo teorema, $|q_n x - p_n| \leq |qx - p|$, e portanto $p/q = p_n/q_n$. $\square$

Teorema 16. *Se $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$ então $\frac{p}{q}$ é uma reduzida da fração contínua de x.*

Demonstração. Seja n tal que $q_n \leq q < q_{n+1}$. Suponha que $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$. Como na demonstração do teorema anterior, $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{qq_{n+1}}$ e assim $\frac{p}{q}$ está fora do intervalo de extremos $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. Temos duas possibilidades:

(a) Se $q \geq \frac{q_{n+1}}{2}$ então $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{qq_{n+1}} \geq \frac{1}{2q^2}$, absurdo.

(b) Se $q < \frac{q_{n+1}}{2}$,

$$\begin{aligned}\left|x - \frac{p}{q}\right| &\geq \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p}{q}\right| - \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| \\ &\geq \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - q}{qq_n q_{n+1}} \\ &> \frac{1}{2qq_n} \geq \frac{1}{2q^2}\end{aligned}$$

o que também é um absurdo.

$\square$

3 Frações Contínuas Periódicas

Nesta seção provaremos que os números reais com fração contínua periódica são exatamente as raízes de equações do segundo grau com coeficientes inteiros.

Lembramos que na representação de x por fração contínua, a_n, α_n são definidos por recursão por

$$\alpha_0 = x, \quad a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor, \quad \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}$$

e temos

$$\alpha_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Isso dá uma prova explícita do fato de que se a fração contínua de x é periódica, então x é raiz de uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros. De fato, se $\alpha_{n+k} = \alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$ segue que

$$\frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}} = \frac{p_{n+k-2} - q_{n+k-2}x}{q_{n+k-1}x - p_{n+k-1}},$$

então $Ax^2 + Bx + C = 0$, onde

$$\begin{aligned}
A &= q_{n-1}q_{n+k-2} - q_{n-2}q_{n+k-1} \\
B &= p_{n+k-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n+k-1} - p_{n+k-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n+k-2} \\
C &= p_{n-1}p_{n+k-2} - p_{n-2}p_{n+k-1}.
\end{aligned}$$

Note que o coeficiente de x^2 é não-nulo, pois $\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}}$ é uma fração irredutível de denominador q_{n-2}, pois $p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} = (-1)^n$, e $\frac{q_{n+k-1}}{q_{n+k-2}}$ é uma fração irredutível de denominador $q_{n+k-2} > q_{n-2}$, donde $\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} \neq \frac{q_{n+k-1}}{q_{n+k-2}}$, logo $q_{n-1}q_{n+k-2} - q_{n-2}q_{n+k-1} \neq 0$.

Vamos provar agora um resultado devido a Lagrange segundo o qual se x é uma *irracionalidade quadrática*, isto é, se x é um irracional do tipo $r + \sqrt{s}$, $r, s \in \mathbb{Q}$, $s > 0$, então a fração contínua de x é periódica, i.e., existem $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}_{>0}$ com $\alpha_{n+k} = \alpha_n$. Neste caso, existem a, b, c inteiros tais que $ax^2+bx+c = 0$, com $b^2-4ac > 0$ e $\sqrt{b^2 - 4ac}$ irracional. Como $x = \frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}$, temos

$$\begin{aligned}
&ax^2 + bx + c = 0 \\
\Longrightarrow\ & a\left(\frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}\right)^2 + b\left(\frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}\right) + c = 0 \\
\Longrightarrow\ & A_n\alpha_n^2 + B_n\alpha_n + C_n = 0,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
A_n &= ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2 \\
B_n &= 2ap_{n-1}p_{n-2} + b(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2cq_{n-1}q_{n-2} \\
C_n &= ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2.
\end{aligned}$$

Note que $C_n = A_{n-1}$. Vamos provar que existe $M > 0$ tal que $0 < |A_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto $0 < |C_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2 = aq_{n-1}^2\left(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)\left(\bar{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right),$$

onde x e $\bar{x}$ são as raízes de $aX^2 + bX + c = 0$, mas

$$\begin{aligned}\left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_{n-1}^2} \leq 1 \implies |A_n| &= aq_{n-1}^2\left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|\left|\bar{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \\ &\leq a\left(|\bar{x} - x| + \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|\right) \\ &\leq M \overset{\text{def}}{=} a(|\bar{x} - x| + 1).\end{aligned}$$

Notemos agora que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n^2 - 4A_nC_n = (p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})^2(b^2 - 4ac) = b^2 - 4ac.$$

Portanto

$$\begin{aligned} B_n^2 &\leq 4A_nC_n + b^2 - 4ac \leq 4M^2 + b^2 - 4ac \\ \implies B_n &\leq M' \overset{\text{def}}{=} \sqrt{4M^2 + b^2 - 4ac}.\end{aligned}$$

Provamos assim que A_n, B_n e C_n estão uniformemente limitados, donde há apenas um número finito de possíveis equações $A_nX^2 + B_nX + C_n = 0$, e portanto de possíveis valores de α_n. Assim, necessariamente $\alpha_{n+k} = \alpha_n$ para alguma escolha de $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$.

Problemas Propostos

Problema 17. *Determine a fração contínua de $\sqrt{7}$. Mostre que ela é periódica a partir de um certo ponto, e determine o período.*

Problema 18. *Escreva na forma $r \pm \sqrt{s}$, com $r, s \in \mathbb{Q}, s \geq 0$, os números reais cujas representações em frações contínuas são as seguintes:*

(a) $[0; 3, 6, 3, 6, 3, 6, \dots]$.

(b) $[0; k, k, k, \dots]$, *onde k é um inteiro positivo dado.*

(c) $[0; 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, \dots]$.

Problema 19. *(a) Sabendo que $3,14 < x < 3,15$, determine o maior natural n e inteiros $a_0, a_1, \dots, a_n$ para os quais é possível garantir que a representação em frações contínuas de x começa por $[a_0; a_1, \dots, a_n]$.*

(b) Sabendo que $3,141592 < x < 3,141593$, determine o maior natural n e inteiros $a_0, a_1, \dots, a_n$ para os quais é possível garantir que a representação em frações contínuas de x começa por $[a_0; a_1, \dots, a_n]$.

(c) Sabendo que $3,1415926 < x < 3,1415927$, *determine o maior natural* n *e inteiros* $a_0, a_1, \dots, a_n$ *para os quais é possível garantir que a representação em frações contínuas de* x *começa por* $[a_0; a_1, \dots, a_n]$.

Problema 20. *(a) Determine as primeiros* 6 *reduzidas da fração continua de* $\sqrt{5}$.

(b) Definimos a sequência $a_n = n\sqrt{5} - \lfloor n\sqrt{5} \rfloor$. *Determine os valores de* $n \leq 2011$ *tais que* a_n *seja respectivamente máximo e mínimo.*

Problema 21. *Demonstre que, para todo inteiro positivo* a, *temos as seguintes expansões em frações contínuas periódicas:*

(a) $\sqrt{a^2+1} = [a, \overline{2a}]$.

(b) $\sqrt{a^2-1} = [a-1, \overline{1, 2a-2}]$.

(c) $\sqrt{a^2-2} = [a-1, \overline{1, a-2, 1, 2a-2}]$.

(d) $\sqrt{a^2-a} = [a-1, \overline{2, 2a-2}]$.

Problema 22. *Encontre as frações contínuas de* $\sqrt{a^2+4}$ *e* $\sqrt{a^2-4}$.

Problema 23. *Sejam* $a_0, a_1, \dots, a_n$ *inteiros com* $a_k > 0$, $\forall k \geq 1$, *e seja* $(p_k/q_k)_{k\geq 0}$ *a sequência de reduzidas da fração contínua* $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$.

(a) Prove que o conjunto dos números reais cuja representação por frações contínuas começa com $a_0, a_1, \dots, a_n$ *é o intervalo*

$$\begin{aligned} I(a_0, a_1, \dots, a_n) &= \left\{ \frac{p_n}{q_n} \right\} \cup \{[a_0, a_1, \dots, a_n, \alpha], \alpha > 1\} \\ &= \begin{cases} \left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}} \right) & \text{se } n \text{ é par} \\ \left(\frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n} \right] & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Prove que a função $G : (1, +\infty) \to I(a_0, a_1, \dots, a_n)$ *dada por* $G(\alpha) = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \alpha]$ *é monótona, sendo crescente para* n *ímpar e decrescente para* n *par.*

Problema 24. *Seja* $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots] \in \mathbb{R}$. *Prove que, se* $q_n \leq q < q_{n+1}$, $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$ *e* $p/q \neq p_n/q_n$ *então* $|\alpha - p/q| \leq |\alpha - p_n/q_n|$ *se, e somente se,* $\frac{p}{q} = \frac{p_{n+1} - rp_n}{q_{n+1} - rq_n}$, *onde* $r \in \mathbb{N}$ *é tal que* $0 < r < a_{n+1}/2$ *ou (*$r = a_{n+1}/2$ *e* $\alpha_{n+2}\beta_{n+1} \geq 1$*).*

Problema 25. *Seja* $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots] \in \mathbb{R}$. *Prove que, se* $q_n \leq q < q_{n+1}$, $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$ *e* $p/q \neq p_n/q_n$ *então* $|\alpha - p/q| < 1/q^2$ *se, e somente se, (*$a_{n+1} \geq 2$, $\dfrac{p}{q} = \dfrac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$ *e* $a_{n+1} - 2 + \beta_{n+1} < \alpha_{n+2}$*) ou (*$\frac{p}{q} = \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}$ *e* $(\alpha_{n+1} - 2)\beta_{n+1} < 1$*).*

Problema 26. *Prove que, para quaisquer inteiros* p, q *com* $q > 0$, *temos* $\left| \sqrt{2} - \dfrac{p}{q} \right| > \dfrac{1}{3q^2}$. *Determine todos os pares de inteiros* (p, q) *com* $q > 0$ *tais que* $\left| \sqrt{2} - \dfrac{p}{q} \right| < \dfrac{1}{q^3}$.

Problema 27. *Prove que, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, e quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$ com $s < t$, existem inteiros m, n com $n > 0$ tais que $s < n\alpha + m < t$.*

Problema 28. *Seja*

$$\frac{p_n}{q_n} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{\ddots\, 2 + \cfrac{(2n-3)^2}{2}}}}}$$

a n-ésima convergente da fração contínua

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{\ddots}}}}}$$

Demonstre que $\dfrac{p_n}{q_n} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}$.

Problema 29. *Dizemos que dois números irracionais α e β são $GL_2(\mathbb{Z})$-equivalentes se existem inteiros a, b, c, d com $|ad - bc| = 1$ tais que $\beta = \dfrac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$.*

Mostre que, se as frações contínuas de α e β são $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ e $\beta = [b_0; b_1, b_2, \ldots]$ então α e β são $GL_2(\mathbb{Z})$-equivalentes se, e somente se, existem $r \in \mathbb{Z}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $b_n = a_{n+r}, \forall n \geq n_0$.

Dicas e Soluções

Em breve.

Referências

[1] F. E. Brochero Martinez, C. G. Moreira, N. C. Saldanha, E. Tengan - Teoria dos Números - um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro, Projeto Euclides, IMPA, 2010.